Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln und Instantonen auf S^4

Frank Klinker

Diplomarbeit
Universität Osnabrück
Februar 2000

Diese Arbeit ist meiner Nichte

Jaqueline

gewidmet

Besonders bedanken möchte ich mich bei

Herrn Prof. Dr. Heinz Spindler und Herrn PD Dr. Matei Toma

die als Betreuer dieser Arbeit alle meine Fragen ernst genommen haben und mit mir in anregenden Diskussionen viele dieser Fragen geklärt haben.

Für das Korrektur lesen möchte ich mich ganz herzlich bei

Peter Albers und Andre Pönopp

bedanken.

Abstract

In the first part of this diploma thesis the different concepts of connections in differential geometry are investigated. It is shown that connections on manifolds and connections on vector bundles are in one-to-one correspondence with connections on principal bundles. The second part is on a special class of connections, the self dual connections on $SU(2)$-principal bundles over the four-sphere S^4 with integral second chern class $c_2 = -k$. These are the k-instantons.

Contents

Einleitung

Der vorliegende Text besteht im Wesentlichen aus zwei Teilen. Der erste Teil befasst sich mit den verschiedenen Begriffen des Zusammenhangs in der Differentialgeometrie und dem Beweis der Tatsache, dass all diese Begriffe äquivalent sind, bzw. auseinander hervorgehen. Es ergibt sich dann ein übergeordnetes Konzept, das des Zusammenhangs auf einem Prinzipalbündel.

Der Begriff des Zusammenhangs in seiner ursprünglichen Form macht Aussagen über die Möglichkeit des Vergleichs von Vektoren in verschiedenen lokalen Koordinatensystemen eines affin zusammenhängenden Raumes (vgl. [We1], [We2] oder [We3]). In der Physik liefert das eine mathematische Beschreibung der allgemeinen Relativitätstheorie. Dort beschreibt der Zusammenhang die relative Orientierung zweier lokaler Rahmungen der (gekrümmten) vierdimensionalen Raumzeit. Die Idee Hermann Weyls, formuliert in [We2], war es, die elektromagnetischen Potentiale mit der Längenmessung auf der Raumzeit zu identifizieren. Das Transformationsverhalten der Längen bei Umskalierung der Metrik entspricht optisch der Freiheit in der Wahl des Potentials bis auf die Hinzunahme eines totalen Differentials. Diese Interpretation über die Skalierung wurde jedoch rasch widerlegt, da sie mit bekannten physikalischen Tatsachen kollidierte.

Mit Entwicklung der Quantenmechanik wurde der Idee Weyls neuer Boden geliefert. Statt die Längen von Vektoren zu betrachten, betrachtet man nun die Phase einer Wellenfunktionen ψ als neue Variable und statt einer Änderung der Skalierung nun eine Änderung der Phase $\psi \mapsto \psi e^{-i\lambda}$. Die Änderung der Phase ändert die beobachtete physikalische Größe, die Observable, nicht, vorausgesetzt das elektromagnetische Potential transformiert sich gemäß $A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu \lambda$. Das elektromagnetische Potential läßt sich als Zusammenhang interpretieren, der die Phasen der Wellenfunktion an verschiedenen Orten der Raumzeit miteinander vergleicht.

Der neuartige Aspekt hierbei ist die Idee der inneren Struktur eines physikalischen Systems. Dem System wird in jedem Punkt der Raumzeit eine Phase zugeordnet, und bewegt sich das System (etwa ein freies Teilchen), so ändert sich die Phase und die Änderung wird durch den Zusammenhang beschrieben. Der zugrundeliegende Raum ist also die Raumzeit, der in jedem Punkt eine Version der Gruppe $U(1)$, der Phasenraum, zugeordnet ist. Ein Teilchen liefert somit einen Schnitt in diesem

"Faserbündel", der durch den Zusammenhang, das elektromagnetische Potential, beschrieben wird. Man spricht dann von einer Eichtheorie (hier $U(1)$-Eichtheorie).

Der Erfolg dieser Sichtweise veranlasste C.N. Yang und R.L. Mills (vgl. [YM]) dazu, auch die starke Wechselwirkung mit diesen Mitteln zu beschreiben. Der Phasenraum in diesem Fall ist der Raum aller möglichen Ausrichtungen des Isospins und entspricht der Gruppe $SU(2)$. Man bekommt somit eine $SU(2)$-Eichtheorie. Die Probleme in der physikalischen Interpretation der mathematischen Ergebnisse dieses Ansatzes wurden über einen Zeitraum von mehr als 25 Jahren nach und nach beseitigt und das Konzept der Eichtheorie wurde in dieser Zeit zu einem fundamentalen Hilfsmittel in der mathematischen Beschreibung physikalischer Theorien (schwache Wechselwirkung, starke Wechselwirkung, Gravitation, Unified Theories). Mit der Entwicklung der Eichtheorien und ihrer physikalischen und mathematischen Aspekte beschäftigen sich z.B. folgende Bücher und Artikel: [Mo], [BL] oder [Bo]. Die mathematische Beschreibung der Eichtheorien liefert den Begriff des Faserbündels und dabei speziell den des Prinzipalbündels. Die Theorie der Zusammenhänge entwickelt, wie hier im ersten Teil beschrieben, seine ganze Eleganz (vgl. [KN], [SW], [GS])

Mit der Idee von Yang und Mills beschäftigt sich dann der zweite Teil dieser Arbeit. Es wird ein Ansatz ausgearbeitet, der selbstduale Zusammenhänge einer $SU(2)$-Eichtheorie über der vierdimensionalen Sphäre S^4 liefert, die so genannten Instantons. Auf die Notwendigkeit einer euklidischen statt einer Lorentz-Mannigfaltigkeit soll hier nicht näher eingegangen werden. Sie hat ihre Begründung in Resultaten aus der Quantenfeldtheorie.

Seit Anfang der siebziger Jahre ist das Interesse an konkreten Instanton- (oder Pseudoteilchen-) Lösungen der Yang-Mills-Gleichung immer weiter gestiegen. So erschienen viele Konstruktionsansätze (z.B. [CWS], [DM], [BCW], [JR] oder [tHo]) und auch das Interesse an der Struktur der Menge der Lösungen (modulo Eichtransformationen) wuchs (vgl. [AHS], [At], [GP] oder [Si]). Dieser Raum spielt auch eine Rolle bei der Untersuchung differenzierbarer Strukturen auf vierdimensionalen Mannigfaltigkeiten (vgl. [FU], [Do]). Vor allem S. K. Donaldson lieferte durch mehrere Arbeiten in den Achtzigerjahren einen großen Beitrag zur Lösung bis dahin ungelöster Probleme in diesem Bereich. Eine Übersicht über die Ergebnisse liefert [Do].

Das erste Kapitel der vorliegenden Arbeit gliedert sich in drei Abschnitte, in denen die drei Konzepte des Zusammenhangs auf Mannigfaltigkeiten, auf Vektorbündeln und auf Prinzipalbündeln erläutert werden. Dabei wird besonderen Wert auf die lokale Darstellung der Zusammenhänge gelegt, da durch sie die Ähnlichkeit der verschieden Konzepte augenscheinlich wird. Darüberhinaus werden Beispiele von Zusammenhängen aufgeführt, von denen mehrere im späteren Text weitere Verwendung finden.

Nachdem man im ersten Kapitel schon gesehen hat, dass der Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit nur ein Spezialfall des Zusammenhangs auf Vektorbündeln ist, ist das zweite Kapitel der Äquivalenz der letzten beiden Konzepte gewidmet. Dazu wird im ersten Abschnitt die Definition und Konstruktionen assoziierter Bündel an- und durchgeführt. Als Beispiel folgt die konkrete Berechnung des Repèrebündels als zum Tangentialbündel assoziiertes Prinzipalbündel. Zusätzlich liefert der Begriff des assoziierten Bündels die Möglichkeit die Menge der Zusammenhänge elegant zu beschreiben. Anschließend an diese Definitionen, folgt dann der Beweis der Äquivalenz der Zusammenhangsbegriffe.

Das dritte Kapitel ist als Vorbereitung für das vierte zu sehen. Es werden hier in den ersten drei Abschnitten die Krümmung eines Zusammenhangs, der Begriff der Eichtransformation und der Hodge-Operator auf Mannigfaltigkeiten mit metrischer Struktur eingehend erläutert. Dabei wird neben der koordinatenfreien Beschreibung der Objekte, sei es als Schnitte in gewissen Bündeln oder als Bündelmorphismen, auch die lokale Beschreibung in den Vordergrund gestellt, da sie die Grundlage der konkreten Berechnungen im vierten Kapitel ist. Die Yang-Mills-Gleichung ist das Thema des letzten Abschnitts dieses Kapitels. Mit Hilfe der vorher entwickelten Begriffe, liefert diese Gleichung als Lösungsmenge eine Teilmenge der Zusammenhänge eines $SU(2)$-Prinzipalbündels über der Sphäre S^4.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit der expliziten Lösung der Yang-Mills-Gleichung. Der erste Abschnitt beschreibt den Modulraum mit Hilfe eines Satzes von Atiyah, Hitchin und Singer, der auf den hier behandelten Spezialfall angewendet wird. Im zweiten Abschnitt wird ein Ansatz von Atiyah, Hitchin, Drinfield und Manin benutzt, um die Menge der Instantons zu parametrisieren, der so genannte ADHM-Ansatz. Das heißt, es wird eine explizite Berechnungsmethode für die Lösungen der Yang-Mills-Gleichung zur Verfügung gestellt. Wie anschließend gezeigt wird, ergeben sich im Fall der 1-Instantons genau die Lösungen von G. t´Hooft. Zum Abschluss folgt dann noch ein kleiner Ausblick.

Der Anhang dient der Erläuterung einiger grundlegender Begriffe aus der Differentialgeometrie und der Topologie, die im vorliegenden Text benötigt werden. Ihre Beschreibung im Text würde zum Verständnis der dort behandelten Sachverhalte nicht beitragen, und somit den Lesefluss beeinträchtigen. Da der Anhang somit eher den Charakter einer Fussnote hat, wird hier auf Beweise und auf Vollständigkeit zugunsten von Literaturhinweisen verzichtet.

Es folgen noch einige Konventionen, von denen im Text Gebrauch gemacht wird. Die im Text behandelten Mannigfaltigkeiten und Bündel verstehen sich allesamt als C^∞-Mannigfaltigkeiten und C^∞-Bündel. Ebenfalls als beliebig oft differenzierbar zu verstehen sind Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten, Bündelmorphismen und Schnitte in Bündeln wie z.B. Vektorfelder, Tensorfelder sowie k-Formen. Abweichungen von dieser Regel, sofern sie auftreten, werden ausdrücklich erwähnt.

Durchgehend im Text gilt die so genannte Einsteinsche Summenkonvention. Das bedeutet, dass in einem Produkt indizierter Größen über den gesamten Indexbereich summiert wird, falls ein Index doppelt vorkommt und der Index nicht auf der gleichen Stufe steht. Z.B. $a_i b^{ij} = \sum_i a_i b^{ij}$, $R^{ij}_{kl} g_{im} g^{kl} = \sum_{ikl} R^{ij}_{kl} g_{im} g^{kl}$ oder $x = x^i \sigma_i = \sum_i x^i \sigma_i$, aber die Summierung entfällt bei $x^i x^i$. Abweichungen, wie etwa die Einschränkung des Indexbereiches oder die Summation über einen Index der gleichen Stufe, werden durch das Summenzeichen gekennzeichnet.

Chapter 1

Der Begriff des Zusammenhangs in der Differentialgeometrie

Der Begriff des Zusammenhangs, beziehungsweise der kovarianten Ableitung, tritt in der Differentialgeometrie an verschiedenen Stellen auf. Zum Beispiel stößt man bei der Untersuchung der inneren Struktur von Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum bei der Berechnung der Ableitungsgleichungen von Gauss und Weingarten auf die so genannten Christoffelsymbole. Diese entpuppen sich bei näherer Betrachtung als Koeffizienten des (eindeutigen) Levi-Civita-Zusammenhangs auf der betrachteten Fläche. In der Elementarteilchenphysik liefert die Untersuchung der inneren Geometrie der Teilchen den Begriff des Eichfeldes. Eine mathematische Untersuchung zeigt, dass es sich bei den Eichfeldern um die lokalen Darstellungen von Zusammenhängen in Prinzipalbündeln handelt.

Im Folgenden wird geklärt, was man unter einem Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit M, beziehungsweise einem Zusammenhang auf einem Vektorbündel $E\,(M,\pi,V,G)$ versteht, und was ein Zusammenhang auf einem Prinzipalbündel $P\,(M,\pi,G)$ ist. Es werden wichtige Eigenschaften beschrieben und Beispiele bearbeitet. Bei den Eigenschaften werden insbesondere die lokalen Darstellungen und ihre Transformationsverhalten eine wichtige Rolle spielen.

1.1 Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten

1.1.1 Definition und Eigenschaften

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^n$ stehen natürliche Begriffe zum Vergleich verschiedener Vektoren zur Verfügung: so etwa die Länge eines Vektors, oder die Parallelverschiebung zur Klärung der gegenseitigen Lage. Auf einer beliebigen Mannigfaltigkeit M hat man in jedem Punkt $x \in M$ einen Vektorraum T_xM, den Tangentialraum, und es gibt auf M eine Riemannsche Metrik, so dass T_xM ein euklidischer Raum wird (vgl. [GHL]). Diese Metrik liefert einen natürlichen Begriff der Länge von Vektoren und auch der Begriff der Parallelität innerhalb eines Tangentialraumes ist geklärt.

Um Vektoren verschiedener Tangentialräume vergleichen zu können, gibt es das Prinzip des Paralleltransports (längs eines Weges zwischen zwei Punkten in M). Grundlage hierfür ist eine zusätzliche Struktur auf M, die durch einen Zusammenhang auf M vermittelt wird.

Definition 1.1. *Ein Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung D von der Menge der Vektorfelder auf M in die Menge der $(1,1)$-Tensoren auf M*

$$D : \Gamma\,(TM) \longrightarrow \Gamma\,(T^*M \otimes TM)$$

mit

(i) $D\,(X+Y) = DX + DY$

(ii) $D\,(f \cdot X) = df \otimes X + f \cdot DX$

für Funktionen f und Vektorfelder X und Y. $D_Y X = DX\,(Y)$ nennt man die kovariante Ableitung von X in Richtung Y.

Der Operator D ist ein lokaler Operator in dem Sinne, dass wenn X oder Y auf einer offenen Menge $U \subset M$ verschwinden, dort auch $D_Y X$ verschwindet.

Zum Beweis verschwinde zunächst X auf U und x sei ein Punkt aus UDann gibt es eine abgeschlossene Umgebung V von x mit $V \subset U$ und eine Funktion f, so dass $f = 1$ auf V und $f = 0$ ausserhalb von U ist. Damit ist $\tilde{X} = fX = 0$ auf M. Wegen der Eigenschaft (ii) ist $D\tilde{X} = D(0\tilde{X}) = 0$ und wieder wegen (ii) $0 = (D_Y(fX))_x = df(Y)(x)X_x + f(x)(D_Y X)_x$ und es folgt $D_Y X = 0$ auf U, da x ein beliebiger Punkt aus U war.
Nun verschwinde Y auf U, und man setzt mit den vorigen Bezeichnungen $\tilde{Y} = fY = 0$ auf M. Das liefert das Verschwinden von $D_{\tilde{Y}} X$ und mit der Gleichung $0 = (D_{fY}(X))_x = f(x)(D_Y X)_x$ das Verschwinden von $D_Y X$ auf U.

Der Operator D läßt sich nun auf offene Teilmengen U von M einschränken, also

$$D : \Gamma(TU) \to \Gamma(T^*U \otimes TU).$$

Dazu definiert man die kovariante Ableitung für zwei Vektorfelder X und Y auf U über zwei Erweiterungen $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ für $x \in U$ durch $(D_Y X)_x = (D_{\tilde{Y}} \tilde{X})_x$. Wegen der Lokalitätseigenschaft, hängt das nicht von der gewählten Erweiterung ab.

Diese Einschränkung liefert dann auf einer Koordinatenumgebung U mit den Koordinaten $(x^1, ..., x^n)$ für den Zusammenhang in der lokalen Rahmung $\{e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$ des

Tangentialbündels die Darstellung

$$D_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k.$$

Die so definierten Koeffizienten Γ^k_{ij} nennt man Christoffelsymbole. Sie sind die Koeffizienten der lokalen Zusammenhangsformen

$$A^k_j = \Gamma^k_{ij} dx^i$$

auf U. Insbesondere gilt für ein Vektorfeld $X = X^k e_k$ auf U :

$$\begin{aligned} DX = D\left(X^k e_k\right) &= dX^k \otimes e_k + X^k D e_k \\ &= dX^k \otimes e_k + X^k \Gamma^j_{ik} dx^i \otimes e_j = \left(dX^k + X^j \Gamma^k_{ij} dx^i\right) \otimes e_k \\ &= \left(dX^k + X^j A^k_j\right) \otimes e_k \end{aligned}$$

oder mit der abkürzenden Matrixschreibweise $X = \left(X^1, ..., X^n\right)^\top$ und

$A = \left(A^j_i\right)$

$$DX = dX + A \cdot X.$$

Mit Hilfe des Zusammenhangs kann man den Begriff der Parallelverschiebung von Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$ (der durch die Standardableitung D einen kanonischen Zusammenhang erhält) auf M übertragen. Ein Vektorfeld Y auf dem $\mathbb{R}^n$ (also eine Abbildung vom $\mathbb{R}^n$ in den $\mathbb{R}^n$) besteht aus parallelen Vektoren, d.h. ist parallel, wenn es konstant ist. Das ist gleichbedeutend damit, dass die Ableitung des Vektorfeldes längs jeden Weges γ verschwindet, $DY(\gamma') = 0$. Analog definiert man

Definition 1.2. *Ein Vektorfeld Y auf M heißt parallel längs des Weges $\gamma : I \to M$, wenn für alle $t \in I$ gilt:*

$$D_{\gamma'} Y = 0.$$

In lokalen Koordinaten mit $Y^k(t) = Y^k \circ \gamma(t)$ ist das gleichbedeutend mit

$$(Y^k)'(t) = -A^k_j(\gamma'(t)) Y^j(t).$$

Insbesondere gibt es zu jedem Weg γ und zu jedem $t_0 \in I$ und $v \in T_{\gamma(t_0)} M$ genau ein paralleles Vektorfeld Y längs γ mit $Y(t_0) = v$ (vgl. [Wa]). Im $\mathbb{R}^n$ mit der Standardableitung sind das gerade die konstanten Vektorfelder. Unter der Parallelverschiebung eines Vektors $v \in T_x M$ längs eines Weges γ von $x = \gamma(t_0)$ nach $y = \gamma(t)$ versteht man den Wert des parallelen Vektorfeldes zu v und t_0 zum Zeitpunkt t. Dabei stimmen im Allgemeinen Parallelverschiebungen längs verschiedener Wege nicht überein. Insbesondere erhält man auf geschlossenen Wegen nicht notwendigerweise den Ausgangsvektor zurück. Dies führt dann zum Begriff der Holonomie (vgl [Na]).

Bemerkung 1.3. *Der Zusammenhang D läßt sich eindeutig zu einer Abbildung auf der Menge der Tensorfelder auf M*

$$D : \Gamma(\mathcal{T}(M)) \to \Gamma(\mathcal{T}(M))$$

erweitern, wenn man folgende Eigenschaften fordert:

1. *Für ein Tensorfeld K und ein Vektorfeld X ist $D_X K$ vom gleichen Typ wie K.*
2. *Für Funktionen f auf M ist $Df = df$.*
3. *Für zwei Tensorfelder K und L gilt $D(K \otimes L) = DK \otimes L + K \otimes DL$.*
4. *D vertauscht mit allen Kontraktionen.*

Beweis. Existenz:

Sei ω ein $(0,1)$-Tensor und X ein Vektorfeld auf M. Dann gilt für ein beliebiges Vektorfeld Y auf M mit der Kontraktion $\mathfrak{K}(\omega \otimes X) = \omega(X)$:

$$\begin{aligned} d(\omega(X))(Y) &\overset{2.}{=} D_Y(\omega(X)) = D_Y(\mathfrak{K}(\omega \otimes X)) \\ &\overset{4.}{=} \mathfrak{K}(D_Y(\omega \otimes X)) \\ &\overset{3.}{=} \mathfrak{K}((D_Y\omega) \otimes X + \omega \otimes D_Y X) = (D_Y\omega)(X) + \omega(D_Y X) \end{aligned}$$

Also liefert das die Wirkung des Zusammenhangs auf (0,1)-Tensoren zu

$$D_Y\omega(X) = d(\omega(X))(Y) - \omega(D_Y X).$$

Wegen der Eigenschaft 3. hat man damit die Wirkung auf beliebige Tensoren.
Eindeutigkeit: Dazu benötigt man die folgenden kleinen Aussagen.

(i) Die obige Abbildung D mit den Eigenschaften 1. - 4. hat die Lokalitätseigenschaft, d.h.: Ist $U \subset M$ offen und ist $K \equiv 0$ auf U, so ist $D_Y K \equiv 0$ für jedes Vektorfeld Y auf U. Insbesondere folgt dann aus $K \equiv L$ auf U dort auch sofort $DK \equiv DL$. Diese Ausage ist analog zur Bemerkung nach Definition 1.1 und zum Beweis ersetzt man nur X durch K.

(ii) Zwei Abbildungen D, D' mit den obigen Eigenschaften stimmen auf $\Gamma(\mathcal{T}(M))$ überein, wenn sie auf allen Funktionen und allen Vektorfeldern übereinstimmen.

Wegen (i) ist dies eine lokale Aussage und man kann sich auf eine Koordinatenumgebung zurückziehen. Wegen der Eigenschaft 3. muß man nur zeigen, dass D auf den $(0,1)$-Tensoren verschwindet, wenn D dies auf den Vektorfeldern und auf den Funktionen tut. Wegen der Wirkung von D auf den $(0,1)$-Tensoren gemäß des Existenzbeweises, folgt dies aber sofort. $\square$

1.1.2 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Als Beispiel eines Zusammenhangs auf einer Mannigfaltigkeit, M, betrachte man im Folgenden den Fall einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit Riemannscher Metrik g. Auf M gibt es einen ausgezeichneten Zusammenhang, den Levi-Civita-Zusammenhang, der mit der Metrik in der folgenden Weise verträglich ist.

Satz 1.4. *Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann gibt es auf M einen eindeutig definierten Zusammenhang D, den Levi-Civita-Zusammen- hang, so dass für alle Vektorfelder X, Y und Z auf M gilt:*

1. $d(g(X, Y))(Z) = g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y)$
2. $D_X Y - D_Y X = [X, Y]$

Beweis. Wegen 1. gilt

$$\begin{aligned} d(g(X,Y))(Z) &= g(D_Z X, Y) + g(X, D_Z Y), \\ d(g(X,Z))(Y) &= g(D_Y X, Z) + g(X, D_Y Z) \text{ und} \\ d(g(Z,Y))(X) &= g(D_X Z, Y) + g(Z, D_X Y). \end{aligned}$$

Addiert man die ersten zwei Gleichungen, und subtrahiert die dritte, so ergibt sich nach Umsortierung und Anwenden von 2.

$$\begin{aligned} 2g(D_Y Z, X) = {}& d(g(X,Y))(Z) + d(g(X,Z))(Y) - d(g(Z,Y))(X) \\ & - g(Y, [Z,X]) - g(Z, [Y,X]) - g(X, [Z,Y]). \end{aligned}$$

Wegen des durch g vermittelten Isomorphismus zwischen T^*M und TM wird $D_Y Z$ eindeutig durch diese Darstellung definiert, und man rechnet leicht nach, dass D die Eigenschaften eines Zusammenhangs und natürlich die Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs erfüllt. □

Mit der obigen Bemerkung und der Einführung des Torsionstensors $T(X, Y) = D_X Y - D_Y X - [X, Y]$ schreiben sich die Bedingungen als

$$1.\ Dg = 0 \quad \text{und} \quad 2.\ T = 0.$$

In lokalen Koordinaten lauten sie

$$1.\ \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + g_{il} \Gamma^l_{kj} \quad \text{und} \quad 2.\ \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji},$$

wobei $g_{ij} = g(e_i, e_j) = g_{ji}$ ist. Damit ergeben sich die Christoffelsymbole des Levi-Civita-Zusammenhangs zu

$$g_{kl} \Gamma^l_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Wie oben erwähnt, spielt der Levi-Civita-Zusammenhang eine große Rolle in der klassischen Untersuchung der inneren Struktur der Flächen im $\mathbb{R}^3$. Das führt zu der bekannten Tatsache, dass die Eigenschaft einer Fläche gekrümmt zu sein, ganz durch die Metrik auf der Fläche, also durch Längenmessung, bestimmt wird. Das spiegelt sich darin wider, dass die Christoffelsymbole, als Maß für die Abweichung der Tangentialräume vom "Parallelsein", durch die Koeffizienten der Metrik bestimmt sind.

Bemerkung. Handelt es sich bei M um eine Riemannsche Untermannigfaltigkeit von N mit Levi-Civita-Zusammenhang D^N, so ist der entsprechende Levi-Civita-Zusammenhang auf M durch $D^M = P \circ D^N$ gegeben. Dabei ist P die Orthogonalprojektion von TN auf TM. Ist M speziell eine Hyperfläche, so ist N der euklidische Raum, D^N die gewöhnliche Ableitung und P die gewöhnliche Projektion (vgl. [GHL]).

1.2 Zusammenhänge auf Vektorbündeln

1.2.1 Die invariante Definition

Die Definition des Paralleltransports im Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit, gesehen als Vektorbündel $TM(M, \pi, \mathbb{R}^n, GL_n\mathbb{R})$, läßt sich direkt auf beliebige Vektorbündel $E(M, \pi, V, G)$ verallgemeinern. Dazu benötigt man wie oben den Begriff des Zusammenhangs oder der kovarianten Ableitung. Die Grundlage wird im Folgenden ein Vektorbündel mit Strukturgruppe $G \subset GL_n\mathbb{R}$ sein, die auf den Vektorraum V per Multiplikation von links operiert (Eine Verallgemeinerung auf andere Gruppen und andere Operationen wird sich in Kapitel 2 automatisch ergeben). Mit $\Gamma(E)$ werden die Schnitte in E bezeichnet, das sind die Abbildungen $s : M \to E$ mit der Eigenschaft $\pi \circ s = id$. $\Gamma(TM)$ ist wie oben die Menge der Vektorfelder auf M und $\Gamma\left(\Lambda^1 T^*M\right) = \Gamma\left(T^*M\right)$ ist die Menge der 1-Formen auf M.

Definition 1.5. *Ein Zusammenhang auf einem Vektorbündel $E(M, \pi, V, G)$ ist eine Abbildung*

$$D : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E),$$

so dass für alle Schnitte t und s in E und für alle Funktionen f auf M folgendes erfüllt ist:

(i) $D(s + t) = Ds + Dt$

(ii) $D(f \cdot s) = df \otimes s + f \cdot Ds$

$D_X s \equiv Ds(X)$ heißt die kovariante Ableitung von s in Richtung X.

Aus der Definition folgt sofort, dass für alle Funktionen f, Vektorfelder X, Y und Schnitte s die kovariante Ableitung die Eigenschaft $D_{(f \cdot X+Y)} s = f \cdot D_X s + D_Y s$ hat.

Völlig analog zum Fall des Tangentialbündels kann man den Paralleltransport von Vektoren erklären, um damit die Verbindung zweier Fasern im Vektorbündel zu beschreiben.

Beispiel. Im trivialen Bündel $M \times \mathbb{R}^n$ hat ein Schnitt die einfache Gestalt $s(x) = (s_1(x), ..., s_n(x))$ mit Funktionen $s_i : M \to \mathbb{R}$.

1. Ein Zusammenhang D auf E kann man definieren durch Ds mit

$$(Ds)_i = ds_i.$$

   Dieser Zusammenhang heißt flacher Zusammenhang auf E.

2. Einen anderen Zusammenhang D' auf $M \times \mathbb{R}^n$ kann mit Hilfe einer $(n \times n)$-Matrix A, deren Einträge 1-Formen auf M sind, das heißt $A_i^j \in \Gamma\left(\Lambda^1 T^* M\right)$, definieren. Dazu setzt man für $i = 1, ..., n$

$$\left(D' s\right)_i = ds_i + A_i^j s_j$$

   oder kurz

$$D' s = ds + A \cdot s.$$

   A heißt dann die Zusammenhangsmatrix zum Zusammenhang D'.

Bemerkung 1.6. *Mit Hilfe der Konstruktion aus Beispiel 2. bekommt man alle Zusammenhänge auf dem trivialen Bündel.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass mit einem Zusammenhang D auf E der Operator $D - d$ die Form $D - d = A$ hat, mit einer Matrix A deren Einträge 1-Formen auf M sind. Das heißt, der Operator $D_X - d_X$ ist für jedes Vektorfeld X ein linearer Operator $A(X)$. Dafür reicht es zu zeigen, dass für Schnitte s und t und für Funktionen f die folgende Relation erfüllt ist:

$$(D_X - d_X)(f \cdot s + t) = f \cdot (D_X - d_X)\, s + (D_X - d_X)\, t.$$

Das folgt allerdings sofort aus den Eigenschaften (i) und (ii) für die Zusammenhänge D und d. □

Man sieht an dieser Bemerkung, dass die Menge $\mathcal{A}$ aller Zusammenhänge auf dem trivialen Bündel ein affiner Raum ist. Wählt man einen Nullpunkt, etwa d, so ist $\mathcal{A} \simeq \{$1-Formen auf M mit Werten in $M_n\mathbb{R}\}$.

1.2.2 Die lokale Darstellung des Zusammenhangs

Das Beispiel 2 zeigt, dass die matrixwertigen 1-Formen bei der Beschreibung der Zusammenhänge auf einem Vektorbündel E eine wichtige Rolle spielen. Deutlich wird das bei der Betrachtung des lokalen Verhaltens des Zusammenhangs, insbesondere bei einem Wechsel der Bündelkarte.

Ist $\{U_\alpha\}$ eine Überdeckung von M mit Bündelkarten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ von E, das heißt, die φ_α sind fasertreue Diffeomorphismen von $\pi^{-1}(U_\alpha) \subset E$ auf $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, bzw. für $x \in U_\alpha$ lineare Isomorphismen $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(x) \to \mathbb{R}^n$, so kann man jedem Schnitt s in E den lokalen Schnitt

$$s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n \quad \text{mit} \quad s_\alpha(x) = \varphi_\alpha \circ s(x)$$

zuordnen. Ist D ein Zusammenhang auf E, so hat die Einschränkung von D auf das triviale Bündel $E|U_\alpha$ wegen der Bemerkung 1.6 die Gestalt

$$(Ds)_\alpha = ds_\alpha + A_\alpha \cdot s_\alpha$$

mit einer Matrix $A_\alpha \in M_n\left(\Gamma\left(\Lambda^1 T^* U_\alpha\right)\right)$. Diese Matrix heißt lokale Zusammenhangsmatrix des Zusammenhangs D.
Beim Übergang zu einer anderen Karte (U_β, φ_β) wird die lokale Zusammenhangsmatrix im Allgemeinen auch eine andere sein. Schreibt man die Übergangsfunktion zwischen den Karten als $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$, so gilt $(Ds)_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot (Ds)_\beta$ und deshalb

$$\begin{aligned}(Ds)_\alpha &= g_{\alpha\beta}(ds_\beta + A_\beta s_\beta) = g_{\alpha\beta} d(g_{\beta\alpha} s_\alpha) + g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\beta\alpha} \cdot s_\alpha \\ &= g_{\alpha\beta} g_{\beta\alpha} ds_\alpha + (g_{\alpha\beta} dg_{\beta\alpha} + g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\beta\alpha}) s_\alpha \\ &= ds_\alpha + (g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}) s_\alpha.\end{aligned}$$

Das heißt, es gilt der folgende

Satz 1.7. *Die lokalen Zusammenhangsmatrizen A_α eines Zusammenhangs D auf einem Vektorbündel E genügen bei einem Kartenwechsel mit der Übergangsfunktion $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ der Transformationsformel*

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Umgekehrt ist ein Zusammenhang auf E durch seine lokale Darstellung schon bestimmt.

Satz 1.8. *Zum Vektorbündel E gebe es zum Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ eine Familie von matrixwertigen 1-Formen*

$$\left\{A_\alpha \in M_n\left(\Gamma\left(\Lambda^1 T^* U_\alpha\right)\right)\right\},$$

die bei einem Kartenwechsel das Transformationsverhalten aus Satz 1.7 haben. Dann gibt es genau einen Zusammenhang auf E, der die A_α als lokale Zusammenhangsmatrizen hat.

Beweis. Man definiert D über seine lokale Darstellung. Man setzt also $(Ds)_\alpha = ds_\alpha + A_\alpha s_\alpha$ für einen Schnitt s in E in der Karte U_α. Damit ist $D_X s$ für $X \in \Gamma(TM)$ ein Schnitt in E, denn es liegt das benötigte Transformationsverhalten $(Ds)_\alpha = g_{\alpha\beta} \cdot (Ds)_\beta$ vor (dazu verfolgt man die obige Rechnung zurück). Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
(D(fs+t))_\alpha &= d(fs+t)_\alpha + A_\alpha(fs+t)_\alpha \\
&= d((fs)_\alpha + t_\alpha) + A_\alpha((fs)_\alpha + t_\alpha) \\
&= d(f_\alpha s_\alpha) + f_\alpha A_\alpha s_\alpha + (Dt)_\alpha \\
&= df_\alpha \otimes s_\alpha + f_\alpha(ds_\alpha + A_\alpha s_\alpha) + (Dt)_\alpha \\
&= (df)_\alpha \otimes s_\alpha + f_\alpha(Ds)_\alpha + (Dt)_\alpha \\
&= (df \otimes s)_\alpha + (fDs)_\alpha + (Dt)_\alpha \\
&= (df \otimes s + fDs + Dt)_\alpha,
\end{aligned}$$

so dass die Bedingungen (i) und (ii) für einen Zusammenhang auch erfüllt sind. Dabei sind für Formen und Funktionen auf M die indizierten Größen einfach die Einschränkungen auf die jeweilige Karte.
Die Eindeutigkeit folgt sofort aus der Tatsache, dass die Differenz zweier Zusammenhänge mit denselben Zusammenhangsmatrizen überall verschwindet. □

Mit den Abkürzungen $\Omega^k = \Gamma\left(\Lambda^k T^*M\right)$ und $\Omega^k(E) = \Gamma\left(\Lambda^k T^*M \otimes E\right)$ - für $k=0$ sind das gerade die Schnitte in E - ist ein Zusammenhang auf E per Definition eine Abbildung von $\Omega^0(E)$ nach $\Omega^1(E)$. Diese Abbildung läßt sich auf natürliche Weise erweitern.

Bemerkung 1.9. *Ein Zusammenhang D auf E läßt sich für alle $k \in \mathbb{N}$ eindeutig zu einer Abbildung*

$$D : \Omega^k(E) \to \Omega^{k+1}(E)$$

erweitern, wenn man für alle $\vartheta \in \Omega^k$ und $s \in \Gamma(E)$ die folgende Produktregel fordert:

$$D(s \otimes \vartheta) = s \otimes d\vartheta + Ds \wedge \vartheta.$$

Auf einen Beweis dieser Bemerkung wird an dieser Stelle verzichtet, da sich diese Erweiterung in einem späteren Kontext nicht als eine solche erweist, sondern der Zusammenhang auf dem Vektorbündel, also $k=0$, dann eher als Spezialfall zu sehen ist (vgl. Kapitel 2). Es wird sich zeigen, dass diese Erweiterung bei der Einführung der Krümmung eine wichtige Rolle spielt.

1.2.3 Konstruktion von Zusammenhängen

Aus Vektorbündeln $E(M, \pi, V, G)$ und $F(M, \pi', W, G')$, mit $G \subset GL_n\mathbb{R}$ und $G' \subset GL_m\mathbb{R}$, kann man durch naheliegende Operationen neue Vektorbündel konstruieren (vgl. Anhang). Auf diesen kann man dann mit Hilfe von Satz 1.8 und mit Hilfe der Zusammenhänge D auf E bzw. D' auf F neue Zusammenhänge definieren. Dazu bezeichnen im Folgenden $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ bzw. $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ Atlanten und $g_{\alpha\beta}$ bzw. $h_{\alpha\beta}$ die Übergangsfunktionen sowie A_α bzw. A'_α die lokalen Zusammenhangsmatrizen von E bzw. F.

1. Ein Zusammenhang auf dem zu E dualen Bündel E^*.

   Behauptung. Durch die Matrizen

   $$\overset{*}{A}_\alpha = -A_\alpha^T$$

   wird auf E^* ein Zusammenhang D^* definiert.

   Beweis. Das Bündel E^* hat gemäß der Ausführungen im Anhang die Übergangsfunktionen $\overset{*}{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}^{-1\top}$. Man hat also zu zeigen, dass für die Matrizen $\overset{*}{A}_\alpha$ das geforderte Transformationsverhalten haben. Es gilt:

   $$\begin{aligned}\overset{*}{A}_\alpha &= -A_\alpha^\top = -(g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1})^\top = -(dg_{\alpha\beta}^{-1\top}) g_{\alpha\beta}^\top - g_{\alpha\beta}^{-1\top} A_\beta^\top g_{\alpha\beta}^\top \\ &= -(d\,\overset{*}{g}_{\alpha\beta})\,\overset{*}{g}{}_{\alpha\beta}^{-1} + \overset{*}{g}_{\alpha\beta} \overset{*}{A}_\beta \overset{*}{g}{}_{\alpha\beta}^{-1} = \overset{*}{g}_{\alpha\beta}\, d\,\overset{*}{g}{}_{\alpha\beta}^{-1} + \overset{*}{g}_{\alpha\beta} \overset{*}{A}_\beta \overset{*}{g}{}_{\alpha\beta}^{-1}\,.\end{aligned}$$

   Die letzte Gleichung folgt aus der Identität

   $$0 = d\,(id) = d(g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1}) = (dg_{\alpha\beta}) g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1}.$$

   Das beweist, dass die Matrizen einen Zusammenhang auf E^* definieren. □

2. Ein Zusammenhang auf der Summe $E \oplus F$ zweier Vektorbündel.

   Behauptung. Durch die Matrizen

   $$\hat{A}_\alpha = \begin{pmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & A'_\alpha \end{pmatrix}$$

   wird auf $E \oplus F$ ein Zusammenhang $D^\oplus$ definiert.

   Beweis. Das Bündel $E \oplus F$ hat die Übergangsfunktionen $\hat{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL_{n+m}\mathbb{R}$ mit $\hat{g}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta} \end{pmatrix}$. Damit bleibt wieder das gewünschte Transformationsverhalten der Zusammenhangsmatrizen zu zeigen. Das ist aber klar, denn die Gleichung $\hat{A}_\alpha = \hat{g}_{\alpha\beta} d\hat{g}_{\alpha\beta}^{-1} + \hat{g}_{\alpha\beta} \hat{A}_\beta \hat{g}_{\alpha\beta}^{-1}$ hat komponentenweise die Gestalt

   $$\begin{pmatrix} A_\alpha & 0 \\ 0 & A'_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta} dh_{\alpha\beta}^{-1} + h_{\alpha\beta} A'_\beta h_{\alpha\beta}^{-1} \end{pmatrix},$$

   und das sind gerade die Transformationen in E bzw. F. □

3. Ein Zusammenhang auf dem durch $f : N \to M$ zurückgeholten Bündel f^*E über der Mannigfaltigkeit N.

   Behauptung. Durch die Matrizen

$$\tilde{A}_\alpha = f^* A_\alpha$$

   gebildet aus den komponentenweise zurückgeholten Differentialformen, wird auf f^*E ein Zusammenhang f^*D definiert.

   Beweis. Im Bündel f^*E haben die Übergangsfunktionen die Gestalt $\tilde{g}_{\alpha\beta} = f^* g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} \circ f$. Deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\alpha = f^* A_\alpha &= f^*(g_{\alpha\beta} d g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}) \\ &= (g_{\alpha\beta} \circ f) d(g_{\alpha\beta}^{-1} \circ f) + (g_{\alpha\beta} \circ f) f^* A_\beta (g_{\alpha\beta}^{-1} \circ f) \\ &= \tilde{g}_{\alpha\beta} d\tilde{g}_{\alpha\beta}^{-1} + \tilde{g}_{\alpha\beta} \tilde{A}_\beta \tilde{g}_{\alpha\beta}^{-1}. \end{aligned}$$

   Dies ist das gemäß Satz 1.8 geforderte Transformationsverhalten zur Definition eines Zusammenhangs. □

4. Ein Zusammenhang auf einem zu E isomorphen Bündel E'

   Behauptung. Durch die Matrizen

$$A'_\alpha = A_\alpha \circ \Phi^{-1}$$

   ist auf E' ein Zusammenhang gegeben (dabei ist Φ die unten angegebene Abbildung).

   Beweis. Zu den Bündeln $E(M, \pi, V)$ bzw. $E'(M', \pi', V)$ induziert der Bündelisomorphismus f einen Diffeomorphismus Φ zwischen M und M' und lineare Isomorphismen f_x zwischen den Fasern $\pi^{-1}(x)$ und $\pi'^{-1}(\Phi(x))$. Zu den Karten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ und den Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ von E, konstruiert man Karten (U'_α, φ'_a) und Übergangsfunktionen $h_{\alpha\beta}$ mit $U'_\alpha = \Phi(U_\alpha)$, $\varphi'_{\alpha,x} = \varphi_{\alpha,\Phi^{-1}(y)}$ und $h_{\alpha\beta}(y) = g_{\alpha\beta}(\Phi^{-1}(y))$. Dann folgt das benötigte Transformationsverhalten einfach durch Ersetzen der entsprechenden Größen. Ist speziell $M = M'$, und $\Phi = id$, so sind die Matrizen identisch. □

5. Ein Zusammenhang auf dem Tensorbündel $E \otimes F$ der Bündel E und F.

   Behauptung. Durch die Produktregel

$$D^\otimes(s \otimes t) = Ds \otimes t + s \otimes D't$$

   wird ein Zusammenhang auf $E \otimes F$ definiert, der die lokale Darstellung

$$(D^\otimes r)_\alpha = dr_\alpha + A^\otimes_\alpha r_\alpha$$

für $r \in \Gamma(E \otimes F)$ mit $A_\alpha^\otimes = A_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes A'_\alpha$ besitzt.

Beweis. Die Übergangsfunktionen im Tensorbündel haben die Gestalt

$$k_{\alpha\beta}(x) = g_{\alpha\beta}(x) \otimes h_{\alpha\beta}(x) \in G \otimes G'\,.$$

Die lokale Darstellung von $D^\otimes$ ergibt sich zu

$$\begin{aligned}(D^\otimes(s \otimes t))_\alpha &= (Ds)_\alpha \otimes t_\alpha + s_\alpha \otimes (D't)_\alpha \\ &= ds_\alpha \otimes t_\alpha + s_\alpha \otimes dt_\alpha + A_\alpha s_\alpha \otimes t_\alpha + s_\alpha \otimes A'_\alpha t_\alpha \\ &= d(s \otimes t)_\alpha + (A_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes A'_\alpha)(s \otimes t)_\alpha\end{aligned}$$

und entspricht somit der Behauptung. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}A_\alpha^\otimes &= A_\alpha \otimes 1 + 1 \otimes A'_\alpha \\ &= (g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}) \otimes 1 + 1 \otimes (h_{\alpha\beta} dh_{\alpha\beta}^{-1} + h_{\alpha\beta} A'_\beta h_{\alpha\beta}^{-1}) \\ &= g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{\alpha\beta} dh_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \otimes 1 + 1 \otimes h_{\alpha\beta} A'_\beta h_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1} \otimes h_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} \otimes h_{\alpha\beta} dh_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \otimes h_{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}^{-1} \\ &\quad + g_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}^{-1} \otimes h_{\alpha\beta} A'_\beta h_{\alpha\beta}^{-1} \\ &= (g_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta})(dg_{\alpha\beta}^{-1} \otimes h_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}^{-1} \otimes dh_{\alpha\beta}^{-1}) \\ &\quad + (g_{\alpha\beta} \otimes h_{\alpha\beta})(A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \otimes h_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}^{-1} \otimes A'_\beta h_{\alpha\beta}^{-1}) \\ &= k_{\alpha\beta} d(g_{\alpha\beta}^{-1} \otimes h_{\alpha\beta}^{-1}) + k_{\alpha\beta}(A_\beta \otimes 1 + 1 \otimes A'_\beta)(g_{\alpha\beta}^{-1} \otimes h_{\alpha\beta}^{-1}) \\ &= k_{\alpha\beta} dk_{\alpha\beta}^{-1} + k_{\alpha\beta} A_\beta^\otimes k_{\alpha\beta}^{-1}.\end{aligned}$$

Also erfüllen die Matrizen $A_\alpha^\otimes$ die notwendige Transformationsregel. □

Die Konstruktion der obigen Zusammenhänge, und die Wirkung der lokalen Zusammenhangsmatrizen A_α auf die Schnitte in den aus E konstruierten Bündeln, wird durch die Einbeziehung einer linearen Darstellung ρ der Liegruppe G und der zugehörigen adjungierten Darstellung ρ_* der Liealgebra $\mathfrak{g}$, sowie des Begriffs des assoziierten Bündels in Kapitel 2, weiter vertieft. Wie im Anhang beschrieben, liefert zum Beispiel die Darstellung ρ von G auf dem Vektorraum V die Darstellung $\overset{*}{\rho}$ von G auf dem dualen Raum V^* mit

$$\overset{*}{\rho}\,(g) = (\rho(g)^\top)^{-1} \quad \text{für alle } g \in G.$$

Ist ρ_* die adjungierte Darstellung zu ρ auf V, dann ist die adjungierte Darstellung zu $\overset{*}{\rho}$ gegeben durch

$$\overset{*}{\rho}_*\,(A) = -\rho_*(A)^\top \quad \text{für alle } A \in \mathfrak{g}.$$

Diese Beziehung spiegelt sich in der Konstruktion 1. gerade wider.

Bezeichnung: Ein Zusammenhang auf E mit Strukturgruppe G, wobei G eine echte Teilmenge von $GL_n\mathbb{R}$ ist, etwa $O(n)$, heißt mit der durch G vermittelten Struktur auf E verträglich, falls die lokalen Zusammenhangsmatrizen ihre Werte in der zugehörigen Lialgebra $\mathfrak{g} \subset M_n\mathbb{R}$ annehmen, etwa $\mathfrak{g} = o(n)$.

Ein Beispiel für einen solchen Zusammenhang, mit $G = O(n)$ ist der Levi-Civita-Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M. Wählt man nämlich als lokale Rahmung des Tangentialbündels eine Orthonormalbasis, so sieht man aus der Bedingung 1. an diesen Zusammenhang, dass die Koeffizienten die Symmetriebedingung $\Gamma^i_{jk} = -\Gamma^k_{ji}$ erfüllen, d.h. die zugehörigen Matrizen sind schiefsymmetrisch, also aus $o(n)$.

1.3 Zusammenhänge auf Prinzipalbündeln

1.3.1 Zwei äquivalente Definitionen

Betrachtet wird im Folgenden ein Prinzipalbündel $P(M, \pi, G)$ mit dem Totalraum P und der Rechtsoperation $R : P \times G \to P$ mit $R(z, g) = R_g(z) = zg$. Durch jeden Punkt z der Mannigfaltigkeit P verläuft die Faser $\pi^{-1}(\pi(z))$ des Bündels, die über eine lokale Karte $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ diffeomorph zu G ist, dabei wird die Einschränkung von ψ_α auf eine Faser ebenfalls mit $\psi_\alpha : \pi^{-1}(\pi(z)) \to G$ bezeichnet. Für $\psi_\alpha(z) = (x, h)$ ist $\psi_\alpha(zg) = (x, hg)$ und R_g entspricht auf den Fasern der Rechtsoperation von G auf sich. Die Operation R ist auf den Fasern also frei und transitiv und liefert dort für jedes $g \in G$ einen Automorphismus. Im Punkt $z \in P$ gibt es in natürlicher Weise einen Unterraum V_z des Tangentialraums T_zP. V_z heißt die Menge der vertikalen Vektoren in z. Definiert wird diese Menge gemäß der Anschauung als Tangentialraum an die Faser durch z

$$V_z = T_z\pi^{-1}(\pi(z)).$$

Es gilt dann insbesondere $\pi_*v = 0$ für alle Vektoren v aus V_z , da π eingeschränkt auf die Faser konstant ist, und somit $V_z = \ker\pi_*$. Die Dimension von V_z ist gleich der Dimension der Liealgebra $T_eG \cong \mathfrak{g}$ von G, denn wegen der Identifizierung $G \cong \pi^{-1}(\pi(z))$ folgt die Isomorphie $T_eG \cong T_z\pi^{-1}(\pi(z))$ und somit die Isomorphie $\mathfrak{g} \cong V_z$. Außerdem gilt für alle $g \in G$ und $z \in P$

$$V_{zg} = (R_g)_*V_z,$$

da, weil R_g ein Automorphismus der Faser ist, $(R_g)_*$ einen Isomorphismus zwischen den Tangentialräumen zweier Punkte der Faser liefert.
Die Zuordnung $z \mapsto V_z$ ist glatt in dem Sinne, dass es zu jedem Punkt z aus P eine Umgebung U von z in P und Vektorfelder $X_1, ..., X_{\dim\mathfrak{g}} \in \Gamma(TU)$ gibt, so dass $X_1(y), ..., X_{\dim\mathfrak{g}}(y)$ für alle y aus U eine Basis von V_y bilden.

Um das zu sehen, reicht es aus, einen Homomorphismus von $\mathfrak{g}$ nach $\Gamma(TP)$ zu finden, dessen Bild aus Vektorfeldern X mit Werten $X(z)$ in $V_z \subset T_zP$ besteht, und der ein

Isomorphismus auf das Bild ist. Betrachtet wird dazu die Abbildung

$$\lambda_z : G \to P \quad \text{mit} \quad \lambda_z(g) = zg$$

und die daraus resultierende Abbildung

$$\lambda : \mathfrak{g} \to \Gamma(TP) \quad \text{mit} \quad (\lambda A)(z) = (\lambda_z)_* A \quad \text{für alle } z \in P.$$

Diese Abbildung ist offensichtlich ein Homomorphismus, und außerdem gilt

$$\pi_*(\lambda_z)_* A = (\pi \circ \lambda_z)_* A = 0\,,$$

da $\pi \circ \lambda_z : G \to M$ konstant ist. Deshalb ist $(\lambda A)(z)$ für alle z ein vertikaler Vektor. Außerdem ist λ ein Isomorphismus auf das Bild, da G durch λ_z bijektiv auf die Faser $\pi^{-1}(\pi(z))$ abgebildet wird und G transitiv und frei auf ihr operiert. Man sieht insbesondere, dass $U = P$ gewählt werden kann, und dass das vertikale Bündel $VP = \bigcup\limits_{z \in P} V_z$ ein triviales Unterbündel von TP ist.

Definition 1.10. *Zu A aus $\mathfrak{g}$ ist das Fundamentalvektorfeld (λA) aus $\Gamma(TP)$ definiert durch*

$$(\lambda A)(z) = (\lambda_z)_* A$$

für alle z aus P. Dabei ist $\lambda_z : G \to P$ mit $\lambda_z(g) = zg$.

Man hat ganz natürlich den Begriff des vertikalen Vektors und der vertikalen Vektorfelder, als Schnitte in dem vertikalen Bündel, erhalten. Was einem die Anschauung nicht mehr liefert, ist der horizontale Vektor. Dieses Manko motiviert die folgende

Definition 1.11. *Ein Zusammenhang auf P ist eine Zuordnung H von P in die Menge der Unterräume von TP mit den Eigenschaften*

(i) Die Zuordnung $H : z \mapsto H_z \subset T_zP$ ist glatt

(ii) $H_z \oplus V_z = T_zP$ für alle $z \in P$

(iii) $H_{zg} = (R_g)_* H_z$ für alle $z \in P$ und $g \in G$

Die Elemente aus H_z heißen wegen der Eigenschaft (ii) horizontale Vektoren.

$HP = \bigcup_{z \in P} H_z$ ist wegen Eigenschaft (i) ein Unterbündel von TP und es gilt $TP = HP \oplus VP$. Man nennt HP das horizontale Bündel. Für die horizontalen Vektoren ist $\pi_* : H_z \to T_{\pi(z)}M$ ein Isomorphismus, da π_* surjektiv und auf V_z Null ist. Die faserweisen Projektionen von TP auf HP bzw. VP werden mit p_H bzw. p_V bezeichnet. Sie vertauschen mit allen Rechtsoperationen $(R_g)_*$, denn es gilt $p_H \circ (R_g)_* v = p_H((R_g)_* \circ p_H(v) + (R_g)_* \circ p_V(v)) = p_H \circ (R_g)_* \circ p_H(v) = (R_g)_* \circ p_H(v)$ (analog auch für p_V statt p_H) - die zweite und dritte Gleichheit folgt dabei aus der

Eigenschaft (iii) des Zusammenhangs H und der analogen Eigenschaft der vertikalen Räume.

Zum Zusammenhang H gibt es eine 1-Form ω auf P mit Werten in der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G. Sie ist für alle $z \in P$ und $v \in T_zP$ definiert durch

$$\omega_z(v) = (\lambda_z)_*^{-1}(p_V(v))$$

und heißt die Zusammenhangsform zum Zusammenhang H auf P. Es gilt der folgende

Satz 1.12. *Ist H ein Zusammenhang auf P und ist $\omega \in \Gamma(\Lambda^1 T^*P \otimes \mathfrak{g})$ die zugehörige Zusammenhangsform, so hat diese die Eigenschaften*

(1) $\omega_z(H_z) = 0$ für alle $z \in P$

(2) $\omega_z((\lambda B)(z)) = B$ für alle $z \in P$ und $B \in \mathfrak{g}$

(3) $(R_g)^*\omega = Ad_{g^{-1}} \circ \omega$ für alle $g \in G$

Ferner gibt es zu jeder 1-Form $\omega \in \Gamma(\Lambda^1 T^*P \otimes \mathfrak{g})$ mit den Eigenschaften (2) und (3) genau einen Zusammenhang H auf P mit ω als Zusammenhangsform.

Dabei ist Ad die adjungierte Darstellung von G auf $\mathfrak{g}$: $Ad_g = (aut_g)_*$ mit $aut_g(h) = ghg^{-1}$ und $(Ad_g)^{-1} = Ad_{g^{-1}}$. **Beweis.** Ist H ein Zuammenhang auf P und ω die Zusammenhangsform, so folgen die Eigenschaften (1) und (2) direkt aus der Definition von ωDie (3) Aussage folgt aus $\lambda_{zg} = R_g \circ \lambda_z \circ \alpha_g$, denn damit gilt

$$\begin{aligned}
((R_g)^*\omega)_z(v) &= \omega_{zg}((R_g)_*v) = (\lambda_{zg})_*^{-1} \circ p_V((R_g)_*v) \\
&= (R_g \circ \lambda_z \circ \alpha_g)_*^{-1} \circ p_V((R_g)_*v) \\
&= (Ad_g)^{-1} \circ (\lambda_z)_*^{-1} \circ (R_g)_*^{-1} \circ p_V((R_g)_*v) \\
&= Ad_{g^{-1}} \circ (\lambda_z)_*^{-1} \circ (R_g)_*^{-1} \circ (R_g)_* \circ p_V(v) \\
&= Ad_{g^{-1}} \circ (\lambda_z)_*^{-1} \circ p_V(v) \\
&= Ad_{g^{-1}} \omega_z(v).
\end{aligned}$$

Ist umgekehrt $\omega \in \Gamma(\Lambda^1 T^*P \otimes \mathfrak{g})$ mit den Eigenschaften (2) und (3) gegeben, so sei H definiert durch

$$H_z = \mathrm{ker}\omega_z.$$

Diese Räume erfüllen wegen der Eigenschaft 2. die Eigenschaft (ii) für Zusammenhänge. Die Bedingung (iii) gilt, denn für $v \in H_z$ ist

$$\omega_{zg}((R_g)_*v) = ((R_g)^*\omega)_z(v) = Ad_{g^{-1}} \circ \omega_z(v) = 0\,,$$

also $(R_g)_*v \in H_{zg}$. Das heißt also $(R_g)_*H_z \subset H_{zg}$. Die Gleichheit folgt wegen $(R_g)_*V_z = V_{zg}$ und $T_zP = H_z \oplus V_z$ aus der Tatsache, dass $(R_g)_*$ ein Isomorphismus ist. □

Man hat jetzt die folgende zu Definition 1.11 äquivalente

Definition 1.13. *Ein Zusammenhang auf einem Prinzipalbündel P ist eine 1-Form ω auf P mit Werten in $\mathfrak{g}$, so dass die Eigenschaften (2) und (3) aus dem letzten Satz erfüllt sind.*

Wegen der Äquivalenz werden im Folgenden, wenn von einem Zusammenhang auf einem Prinzipalbündel gesprochen wird, die Begriffe horizontale Vektoren und Zusammenhangsform parallel benutzt.

1.3.2 Die lokale Darstellung des Zusammenhangs und das totale äußere Differential

Die Definition eines Zusammenhangs auf einem Prinzipalbündel $P(M, \pi, G)$ ist vom Ansatz her eine andere als die Definition im Fall eines Vektorbündels. Eine gewisse Ähnlichkeit wird sich bei der Betrachtung der lokalen Darstellung des Zusammenhangs und speziell bei der Untersuchung des Verhaltens bei einem Kartenwechsel herausstellen. Wie im anschließenden Kapitel erläutert wird, ist diese Ähnlichkeit nicht überraschend.

Zur Basismannigfaltigkeit M ist $\{U_\alpha\}$ eine Überdeckung mit Bündelkarten (U_α, ψ_α). Dabei ist, $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ ein fasertreuer Diffeomorphismus, dessen Einschränkung auf die Faser, gesehen als Abbildung von $\pi^{-1}(x)$ nach G, ebenfalls mit ψ_α bezeichnet wird. Zu jedem α gibt es einen ausgezeichneten lokalen Schnitt $s_\alpha : U_\alpha \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ durch P, den trivialen lokalen Schnitt. Dieser ist, wenn e das neutrale Element in G bezeichnet, gegeben durch

$$s_\alpha(x) = \psi_\alpha^{-1}(x, e).$$

Bemerkung 1.14. *Die trivialen lokalen Schnitte s_α transformieren sich bei einem Kartenwechsel mit den Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ gemäß*

$$s_\alpha(x) = s_\beta(x) g_{\beta\alpha}(x) \quad \textit{für alle } x \in U_\alpha.$$

Beweis. Die Übergangsfunktionen sind definiert durch $g_{\alpha\beta}(x) \cdot h = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}(x, h)$ für alle $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ und $h \in G$. Damit folgt

$$\begin{aligned} s_\alpha(x) &= \psi_\alpha^{-1}(x, e) = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(x, e) = \psi_\beta^{-1}(x, g_{\beta\alpha}(x)e) \\ &= \psi_\beta^{-1}(x, e g_{\beta\alpha}(x)) = R_{g_{\beta\alpha}} \circ \psi_\beta^{-1}(x, e) = R_{g_{\beta\alpha}} s_\beta(x) \\ &= s_\beta(x) g_{\beta\alpha}. \end{aligned}$$

Das beweist die Bemerkung. □

Mit Hilfe dieser Schnitte s_α definiert man zur Zusammenhangsform $\omega \in \Gamma(\Lambda^1 T^*P \otimes \mathfrak{g})$ die lokalen Zusammenhangsformen A_α als 1-Formen auf U_α mit Werten in der Liealgebra $\mathfrak{g}$ durch

$$A_\alpha = s_\alpha^* \omega.$$

Dies zeigt die erste Ähnlichkeit zu der Definition eines Zusammenhangs auf einem Vektorbündel, denn ist G eine Matrixgruppe, und $\mathfrak{g}$ eine Unteralgebra der Matrizen, so haben die lokalen Zusammenhangsformen hier und dort die gleiche Gestalt.

Das Transformationsverhalten der lokalen Darstellungen der Form ω wird geklärt durch den folgenden

Satz 1.15. *Ist $s : M \to P$ ein Schnitt in P und $g : M \to G$ eine G-wertige Funktion auf M, so gilt für den Schnitt $t = s \cdot g$*

$$t^*\omega = Ad_{g^{-1}}(s^*\omega) + g^{-1}dg.$$

Dabei ist $g^{-1}dg(v) = (l_{g^{-1}})_* g_*(v)$ für alle $v \in T_xM$, mit der Linksoperation l von G auf sich selbst, also $l_g h = gh$. Analog schreibt man für die Rechtsoperation r von G auf sich $r_g h = hg$.

Beweis. R ist die Rechtsoperation von G auf P, das heißt $R : P \times G \to P$ mit $R(z, g) = R_g(z) = \lambda_z(g)$. Für den Schnitt $t(x) = s(x)g(x)$ gilt wegen der Produktregel $t_* = (R_g)_* s_* + (\lambda_z)_* g_*$. Außerdem gilt $\lambda_z = \lambda_z \circ r_g \circ r_{g^{-1}} = R_g \circ \lambda_z \circ r_{g^{-1}}$. Faßt man das zusammen, so rechnet man für $x \in M$ und $v \in T_xM$:

$$(t^*\omega)_x(v) = \omega_{t(x)}(t_*v) = \omega_{t(x)} \left[(R_g)_* (s_*v + (\lambda_{s(x)})_* (r_{g^{-1}})_* g_* v) \right].$$

Da $(r_{g^{-1}})_* g_* v \in T_eG$ kann man die Definition des Fundamentalvektorfeldes anwenden und das liefert dann weiter

$$\begin{aligned} (t^*\omega)_x(v) &= \omega_{t(x)} \left[(R_g)_* \left(s_*v + \lambda \left((r_{g^{-1}})_* g_* v \right) (s(x)) \right) \right] \\ &= ((R_g)^*\omega)_{s(x)} \left(s_*v + \lambda \left((r_{g^{-1}})_* g_* v \right) (s(x)) \right). \end{aligned}$$

Wegen der Eigenschaften (2) und (3) der Zusammenhangsform und wegen $Ad_{g^{-1}} \circ (r_{g^{-1}})_* = (aut_{g^{-1}} \circ r_{g^{-1}})_* = (l_{g^{-1}})_*$ folgt:

$$\begin{aligned} (t^*\omega)_x(v) &= Ad_{g^{-1}} \left(\omega_{s(x)}(s_*v) + \omega_{s(x)} \left(\lambda \left((r_{g^{-1}})_* g_* v \right) (s(x)) \right) \right) \\ &= Ad_{g^{-1}} \left((s^*\omega)_x(v) + (r_{g^{-1}})_* g_* v \right) \\ &= \left(Ad_{g^{-1}} s^*\omega + (l_{g^{-1}})_* g_* \right)_x (v). \end{aligned}$$

Insgesamt hat man

$$t^*\omega = Ad_{g^{-1}} s^*\omega + (l_{g^{-1}})_* g_*,$$

also die Behauptung. □

Als Folgerung erhält man somit das Transformationsverhalten der lokalen Zusammenhangsformen des Zusammenhangs ω auf P zu

$$A_\alpha = Ad_{g_{\alpha\beta}}(A_\beta) + g_{\alpha\beta} dg_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Dazu setzt man in Satz 1.15 $t = s_\alpha$, $s = s_\beta$ und $g = g_{\beta\alpha}$.

An dieser Stelle ist die Analogie der Zusammenhangsbegriffe augenscheinlich: Die lokalen Zusammenhangsformen auf Prinzipal- und Vektorbündeln haben das gleiche Aussehen und auch das gleiche Transformationsverhalten. Diese Analogie geht aber noch weiter, denn im nächsten Kapitel wird sogar gezeigt, dass die zwei Begriffe äquivalent sind. Um diese Äquivalenz beschreiben zu können, benötigt man noch einige Bezeichnungen und Schreibweisen.

Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so kann man die k-Formen auf P mit Werten in V betrachten. Ist T so eine k-Form und S eine l-Form mit Werten in eventuell einem anderen Vektorraum W, und ist $\left\{v^i\right\}$ eine Basis von V und $\left\{w^j\right\}$ eine Basis von W, so kann man T und S mit geeigneten k-Formen T_i und l-Formen S_j auf P in der Form

$$T = T_i v^i \quad \text{und} \quad S = S_j w^j$$

darstellen. Das äußere Produkt $T \wedge S$ ist dann eine $(k+l)$-Form auf P mit Werten in $V \otimes W$ mit

$$T \wedge S = T_i \wedge S_j v^i \otimes w^j.$$

Spezialfälle sind hierbei:

$$\begin{array}{ll} k = l = 0 & T \wedge S = T \otimes S \\ k = 0,\ \mathrm{dim} V = 1 & T \wedge S = TS \\ \mathrm{dim} V = \mathrm{dim} W = 1 & T \wedge S = T \wedge S \end{array}$$

Zwei Eigenschaften, die so eine Differentialform besitzen kann, werden noch eine wichtige Rolle spielen, deshalb widmet man ihnen die

Definition 1.16. *Ist ρ eine Darstellung von G auf V, so sagt man die k-Form T auf P mit Werten in V ist vom Typ ρ, wenn für alle $g \in G$ gilt*

$$(R_g)^* T = \rho(g^{-1}) T\ .$$

Das heißt für $z \in P$ und $v_1, ..., v_k \in T_z P$ ist dann

$$T_{zg}((R_g)_* v_1, ..., (R_g)_* v_k) = \rho(g^{-1}) T_z(v_1, ..., v_k).$$

Außerdem nennt man eine solche k-Form horizontal, wenn für $z \in P$ und $v_1, ..., v_k \in T_z P$ gilt

$$T_z(v_1, ..., v_k) = 0, \text{ falls einer der Einträge ein vertikaler Vektor ist.}$$

Ist σ eine Darstellung von G auf W und sind T und S wie oben, dann gilt

1. Ist T vom Typ ρ und S vom Typ σ, so ist $T \wedge S$ vom Typ $\rho \otimes \sigma$.
2. Sind T und S horizontal, so auch $T \wedge S$.

Beispiel. Die Zusammenhangsform ω auf P ist eine 1-Form mit Werten in dem Vektorraum $\mathfrak{g}$ und ω ist vom Typ Ad.

Es folgt die wichtige

Definition 1.17. *Ist V ein Vektorraum und T eine k-Form auf P mit Werten in V, so ist das totale äußere Differential von T zum Zusammenhang H auf P definiert als die $(k+1)$-Form DT auf P mit Werten in V die gegeben ist durch*

$$DT_z(v_0, ..., v_k) = dT_z(p_H(v_0), ..., p_H(v_k))$$

für alle $z \in P$ und $v_0, ..., v_k \in T_zP$.

Sind T und S wie oben, so hat das totale äußere Differential die Eigenschaften

A) $D(T+S) = DT + DS$ und $D(T \wedge S) = DT \wedge S + (-1)^k T \wedge DS$

B) Ist T vom Typ ρ, so ist DT horizontal und vom Typ ρ.

Die Eigenschaften in A) und die Eigenschaft horizontal zu sein, folgen direkt aus der Definition, da diese D auf d zurückführt, und wegen der Tatsache, dass p_H angewendet auf vertikale Vektoren Null ist. Um zu sehen, dass DT vom Typ ρ ist, falls das für T der Fall ist, ist zu zeigen, dass für $g \in G$

$$(R_g)^* DT = \rho(g^{-1}) DT$$

gilt. Dazu rechnet man für $z \in P$ und $v_0, ..., v_k \in T_zP$:

$$\begin{aligned}
((R_g)^* DT)_z(v_0, ..., v_k) &= DT_{zg}((R_g)_* v_0, ..., (R_g)_* v_k) \\
&= dT_{zg}(p_H \circ (R_g)_* v_0, ..., p_H \circ (R_g)_* v_k) \\
&= dT_{zg}((R_g)_* \circ p_H(v_0), ..., (R_g)_* \circ p_H(v_k)) \\
&= ((R_g)^* dT)_z(p_H(v_0), ..., p_H(v_k)) \\
&= (d((R_g)^* T))_z(p_H(v_0), ..., p_H(v_k)) \\
&= (d(\rho(g^{-1})T))_z(p_H(v_0), ..., p_H(v_k)) \\
&= \rho(g^{-1})(dT)_z(p_H(v_0), ..., p_H(v_k)) \\
&= \rho(g^{-1})(DT)_z(v_0, ..., v_k).
\end{aligned}$$

Dieses Differential bildet gemeinsam mit den lokalen Zusammenhangsformen A_α die Grundlage für die weiteren Untersuchungen.

Chapter 2

Die Äquivalenz der Zusammenhangsbegriffe auf Prinzipal- und Vektorbündeln

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die verschiedenen Zusammenhangsbegriffe, auf die im vorigen Paragraphen eingegangen wurde, zu vereinen. Man hat schon gesehen, dass ein Zusammenhang auf einer Mannigfaltigkeit ein Spezialfall eines Zusammenhangs auf einem Vektorbündel ist, nämlich dem Tangentialbündel dieser Mannigfaltigkeit. Im Folgenden wird gezeigt, dass der Begriff des Zusammenhangs auf einem Prinzipalbündel vertauschbar ist mit dem auf einem Vektorbündel. Genauer heißt das, dass man jedem Prinzipalbündel P und jedem Zusammenhang auf P ein Vektorbündel E und einen Zusammenhang auf E zuordnen kann, und umgekehrt. Dazu wird im ersten Abschnitt geklärt, wie einem Prinzipal- ein Vektorbündel zuzuordnen ist. Das liefert dann den Begriff des assoziierten Vektorbündels. Umgekehrt wird auch geklärt, wie man einem Vektor- ein Prinzipalbündel zuordnet, was zum Begriff des Rahmenbündels führt. Dazu wird das Beispiel des Tangentialbündels ausführlich behandelt. Anschließend wird dann der Zusammenhang in die Überlegungen einbezogen.

Die grundlegenden Objekte in diesem und den folgenden Abschnitten sind ein Prinzipalbündel $P(M, \pi, G)$ mit Rechtsoperation R, ein n-dimensionaler Vektorraum V und eine lineare Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ der Liegruppe G auf V. Ferner ist $\mathfrak{g}$ die Liealgebra zur Liegruppe G.

2.1 Assoziierte Bündel

2.1.1 Konstruktion assoziierter Bündel

Konstruiert wird ein Vektorbündel $E(M, \pi_E, V)$ mit Standardfaser V, dessen Übergangsfunktionen $h_{\alpha\beta}$ bis auf die Wirkung der Darstellung ρ die Gleichen sind, wie die Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ des Prinzipalbündels P, also $h_{\alpha\beta} = \rho(g_{\alpha\beta})$. Dazu betrachte man die Produktmannigfaltigkeit $P \times V$ und auf ihr die Rechtsoperation $\tilde{R}$ von G gegeben durch

$$\tilde{R} : P \times V \times G \to P \times V \quad \text{mit} \quad \tilde{R}(z, v, g) = (zg, \rho(g^{-1})v).$$

Dividiert man diese Operation heraus, so bezeichne

$$P \times_\rho V$$

die Menge der entstehenden Orbits. Das heißt, man identifiziert Elemente (z, v) und (y, w) aus $P \times V$, wenn es ein g aus G gibt mit $zg = y$ und $\rho(g^{-1})v = w$. Bezeichnet man mit $\hat{\pi}$ und p die Projektionen

$$\hat{\pi} : P \times V \to P \times_\rho V \quad \text{und} \quad p : P \times V \to P$$

so liefert das eine Abbildung $\pi_E : P \times_\rho V \to M$, die das folgende Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccc} P \times V & \xrightarrow{\hat{\pi}} & P \times_\rho V \\ {\scriptstyle p}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_E} \\ P & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

Gezeigt wird mit Hilfe dieser Konstruktion der

Satz 2.1. *In dem obigen Diagramm gilt:*

1) *$P \times_\rho V(M, \pi_E, V)$ ist ein Vektorbündel.*

2) *$\hat{\pi}$ ist eine fasertreue Abbildung, und die Einschränkung auf eine Faser$\hat{\pi}_z$: $\{z\} \times V \to \pi_E^{-1}(\pi(z))$ ist ein Diffeomorphismus.*

3) *$P \times V(P \times_\rho V, \hat{\pi}, G)$ ist ein Prinzipalbündel mit Rechtsoperation $\tilde{R}$.*

4) *p ist ein Homomorphismus zwischen Prinzipalbündeln.*

Bevor der Beweis dieses Satzes geliefert wird, notiert man die

Definition 2.2. *Das Bündel $E = P \times_\rho V$ heißt ein über ρ assoziiertes Vektorbündel zum Prinzipalbündel P mit Standardfaser V.*

Beweis. 1) Mit Hilfe des Satzes 2 aus dem Anhang konstruiert man einen Bündelatlas auf $E = P \times_\rho V$. Dazu sei $\{U_\alpha\}$ eine Überdeckung von M mit Bündelkarten von P. Ferner seien (s_α) die lokalen trivialen Schnitte in P. Sie sind mit den Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ über $s_\beta(x) = s_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x)$ miteinander verbunden. Man definiert

$$\tilde{\varphi}_\alpha : U_\alpha \times V \to \pi_E^{-1}(U_\alpha) \quad \text{mit} \quad \tilde{\varphi}_\alpha(x,v) = \hat{\pi}(s_\alpha(x), v).$$

Dann gilt wegen $\pi_E \circ \hat{\pi} = \pi \circ p$ nun $\pi(\tilde{\varphi}_\alpha(x,v)) = x$, und $\tilde{\varphi}_\alpha$ läßt sich zu einer Abbildung zwischen den Fasern $\tilde{\varphi}_{\alpha,x} : V \to \pi_E^{-1}(x)$ einschränken. Außerdem existiert zu jedem Orbit von $\tilde{R}$ genau ein $v \in V$, so dass $(s_\alpha(x), v)$ in dem Orbit enthalten ist. Das folgt aus der Tatsache, dass $\tilde{R}$ frei auf den Fasern operiert. Also ist $\tilde{\varphi}_{\alpha,x}$ bijektiv und somit auch $\tilde{\varphi}_\alpha$. Es gilt

(a) $\hat{\pi}(zg, v) = \hat{\pi}(z, \rho(g)v)$ für alle $z \in P$, $g \in G$ und $v \in V$

(b) $\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}\tilde{\varphi}_\beta(x,v) = (x, \rho(g_{\alpha\beta}(x))v)$ für alle $(x,v) \in U_\alpha \cap U_\beta \times V$

Die Behauptung (a) folgt sofort, wenn man bemerkt: $\hat{\pi}(zg,v) = \hat{\pi}(z, \rho(g)v)$, falls es ein $h \in G$ gibt mit $zgh = z$ und $\rho(h^{-1})v = \rho(g)v$. Man wählt also $h = g^{-1}$.
Die Behauptung (b) folgt aus (a), denn es gilt

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\alpha(x, \rho(g_{\alpha\beta}(x))v) &= \hat{\pi}(s_\alpha(x), \rho(g_{\alpha\beta}(x))v) = \hat{\pi}(s_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x), v)\\ &= \hat{\pi}(s_\beta(x), v) = \tilde{\varphi}_\beta(x,v).\end{aligned}$$

Mit $g_{\alpha\beta}$, ist auch $\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}\tilde{\varphi}_\beta$ glatt, und ein Diffeomorphismus.

Aus dem oben zitierten Satz folgt, dass E ein Faserbündel mit Bündelkarten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ist, dabei ist $\varphi_\alpha = \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}$. Insbesondere haben die Bündel E und P (bis auf die Darstellung ρ) die gleichen Übergangsfunktionen. E ist ein Vektorbündel, da es auf $\hat{\pi}^{-1}(x)$ eine lineare Struktur gibt, so dass die Abbildungen $\hat{\pi}_z$ mit (vgl (2)) $\hat{\pi}_z : V \to \pi_E^{-1}(x)$, $\pi(z) = x$, Isomorphismen sind. Man setzt also für Z und Z' aus $\pi_E^{-1}(x)$ mit $\pi(z) = x : Z + Z' = \hat{\pi}_z(\hat{\pi}_z^{-1}(Z) + \hat{\pi}_z^{-1}(Z'))$.

3) Man betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} U_\alpha \times G \times V \arrow[r, "\tilde{\psi}_\alpha \times id"] \arrow[d, "id \times \rho"'] & \pi^{-1}(U_\alpha) \times V \arrow[d, "\hat{\pi}"] \\ U_\alpha \times V \arrow[r, "\tilde{\varphi}_\alpha"] & \pi_E^{-1}(U_\alpha) \end{tikzcd}$$

Es kommutiert, wenn man die Abbildung $\tilde{\psi}_\alpha$ definiert durch

$$\tilde{\psi}_\alpha(x,g) = s_\alpha(x)g,$$

denn dann gilt

$$\begin{aligned}\hat{\pi} \circ (\tilde{\psi}_\alpha \times id)(x,g,v) &= \hat{\pi}(s_\alpha(x)g, v) = \hat{\pi}(s_\alpha(x), \rho(g)v)\\ &= \tilde{\varphi}_\alpha(x, \rho(g)v) = \tilde{\varphi}_\alpha \circ (id \times \rho)(x,g,v).\end{aligned}$$

Man setzt $V_\alpha = \pi_E^{-1}(U_\alpha) \subset P \times_\rho V$ und sieht, dass damit

$$\hat{\pi}^{-1}(V_\alpha) = p^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \pi_E^{-1}(V_\alpha) = (\pi \circ p)^{-1}(U_\alpha) = \pi^{-1}(U_\alpha) \times V$$

gilt. Es gibt somit Bijektionenen $\tilde{\chi}_\alpha : V_\alpha \times G \to \hat{\pi}^{-1}(V_\alpha)$, die definiert sind durch

$$\tilde{\chi}_\alpha(\tilde{\varphi}_\alpha(x,v),g) = (\tilde{\psi}_\alpha(x,g), \rho(g^{-1})v).$$

Diese haben die Eigenschaften

(c) $\hat{\pi} \circ \tilde{\chi}_\alpha(Z,g) = Z$, für alle $Z \in V_\alpha$ und $g \in G$

(d) $\tilde{\chi}_\alpha(Z,gh) = \tilde{R}\left(\tilde{\chi}_\alpha(Z,g),h\right)$, für alle $Z \in V_\alpha$ und $g,h \in G$

Aussage (c) gilt mit $Z = \tilde{\varphi}_\alpha(x,v)$ wegen

$$\begin{aligned}\hat{\pi} \circ \tilde{\chi}_\alpha(Z,g) = \hat{\pi} \circ \tilde{\chi}_\alpha(\tilde{\varphi}_\alpha(x,v),g) &= \hat{\pi}(\tilde{\psi}_\alpha(x,g),\rho(g^{-1})v) \\ &= \hat{\pi}(s_\alpha(x)g, \rho(g^{-1})v) \overset{\text{(a)}}{=} \hat{\pi}(s_\alpha(x),v) \\ &= \tilde{\varphi}_\alpha(x,v) = Z.\end{aligned}$$

Aussage (d) folgt mit einer ähnlich einfachen Rechnung aus

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}_\alpha(Z,gh) &= \tilde{\chi}_\alpha(\tilde{\varphi}_\alpha(x,v),gh) = (\tilde{\psi}_\alpha(x,gh),\rho((gh)^{-1})v) \\ &= (s_\alpha(x)gh, \rho(h^{-1})\rho(g^{-1})v) = \tilde{R}\left(s_\alpha(x)g,\rho(g^{-1})v,h\right) \\ &= \tilde{R}\left(\tilde{\psi}_\alpha(x,g),\rho(g^{-1})v,h\right) = \tilde{R}\left(\tilde{\chi}_\alpha(\tilde{\varphi}_\alpha(x,v),g),h\right) \\ &= \tilde{R}\left(\tilde{\chi}_\alpha(Z,g),h\right).\end{aligned}$$

(c) bedeutet, dass es sich bei $\chi_\alpha = \tilde{\chi}_\alpha^{-1}$ um die gewünschten Bündelkarten handelt, und (d) zeigt die Verträglichkeit mit der Rechtsoperation.
Es gilt mit $Z = \tilde{\varphi}_\alpha(x,v)$:

$$\begin{aligned}\chi_\beta^{-1}(Z,g) &= (\tilde{\psi}_\beta(x,g),\rho(g^{-1})v) = (s_\beta(x)g,\rho(g^{-1})v) \\ &= (s_\alpha(x)g_{\alpha\beta}(x)g,\rho(g^{-1})v) = (\tilde{\psi}_\alpha(x,g_{\alpha\beta}(x)g),\rho(g^{-1})v) \\ &= \chi_\alpha^{-1}(\tilde{\varphi}_\alpha(x,\rho(g_{\alpha\beta}(x))v),g_{\alpha\beta}(x)g) \overset{\text{(b)}}{=} \chi_\alpha^{-1}(\tilde{\varphi}_\beta(x,v),g_{\alpha\beta}(x)g) \\ &= \chi_\alpha^{-1}(Z,g_{\alpha\beta}(x)g).\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Übergangsfunktionen $k_{\alpha\beta} : V_\alpha \cap V_\beta \to G$ mit $\chi_\alpha\chi_\beta^{-1}(Z,g) = (Z,k_{\alpha\beta}(Z)g)$ glatt sind, denn es gilt $k_{\alpha\beta}(Z) = g_{\alpha\beta}(\pi_E(Z))$.

2) $\hat{\pi}$ ist eine fasertreue Abbildung zwischen $P \times V$ und $P \times_\rho V$, in dem Sinne, dass für $(z,v) \in \pi^{-1}(x) \times V$, wegen der Kommutativität des ersten Diagramms $\pi_E \circ \hat{\pi}(z,v) = x$ gilt. Wegen des zweiten Diagramms, ist die Einschränkung $\hat{\pi}_z$ von $\hat{\pi}$ auf $\{z\} \times V$ ein Diffeomorphismus auf das Bild $\pi_E^{-1}(\pi(z))$.

4) Diese Aussage folgt direkt aus dem ersten Diagramm und der Tatsache, dass p mit den Rechtsoperationen verträglich ist, denn es gilt

$$p(\tilde{R}_g(z,v)) = p(zg, \rho(g^{-1})v) = zg = R_g(z) = R_g(p(z,v))\,.$$

$\square$

Wie oben angekündigt, kann man umgekehrt zu einem gegebenem Vektorbündel $E(M, \pi_E, V)$ ein Prinzipalbündel P konstruieren. Dazu betrachtet man zu $x \in M$ die Menge der linearen Isomorphismen von V nach $V_x = \pi_E^{-1}(x)$, $\mathcal{L}(V, V_x)$. Der Totalraum des zu konstruierenden Bündels P ist

$$P = \bigcup_{x \in M} \mathcal{L}(V, V_x),$$

und die Projektion von P auf die Basismannigfaltigkeit M ist die Abbildung π mit

$$\pi(z) = x \Longleftrightarrow z \in \mathcal{L}(V, V_x).$$

Das so konstruierte Bündel hat die gleichen Übergangsfunktionen wie das Ausgangsbündel E.
Mit diesen Bezeichnungen gilt dann der

Satz 2.3. *Die Menge $P = \bigcup_{x \in M} \mathcal{L}(V, V_x)$ mit der Projektion π ist ein Prinzipalbündel über M mit Standardfaser $GL(V)$.*

Beweis. Ist $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ eine Überdeckung von M mit Bündelkarten $\varphi_\alpha : \pi_E^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times V$, so ist der eingeschränkte Diffeomorphismus $\varphi_{\alpha,x} : V_x \to V$ ein linearer Isomorphismus. Dieser liefert eine Bijektion $\psi_{\alpha,x} : GL(V) \to \mathcal{L}(V, V_x)$ durch $\psi_{\alpha,x}(\Phi) = \varphi_{\alpha,x}^{-1} \circ \Phi$. Diese Abbildungen liefern ihrerseits ebenfalls bijektive Abbildungen $\psi_\alpha : U_\alpha \times GL(V) \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ durch $\psi_\alpha(x, \Phi) = \psi_{\alpha,x}(\Phi)$. Dabei gilt $\psi_\alpha^{-1}\psi_\beta(x, \Phi) = (x, \varphi_{\alpha,x} \circ \varphi_{\beta,x}^{-1} \circ \Phi)$ und die Übergangsfunktionen $\psi_\alpha^{-1}\psi_\beta(x, \Phi) = (x, g_{\alpha\beta}(x)\Phi)$ sind glatt, insbesondere sind das auch gerade die Übergangsfunktionen von E. Wegen des Satzes 2 aus dem Anhang ist somit $P(M, \pi, GL(V))$ ein Faserbündel mit Strukturgruppe $GL(V)$. Eine Operation von $GL(V)$ auf P ist gegeben durch $R_\Phi(\Psi_x) = \Psi_x \circ \Phi$, für Φ aus $GL(V)$ und Ψ_x aus der Faser $\mathcal{L}(V, V_x)$. Auf diese Weise operiert $GL(V)$ von rechts, und es gilt natürlich $R_\Phi \circ \psi_\alpha(x, \Psi) = \psi_\alpha(x, \Psi \circ \Phi)$. R macht P zu einem Prinzipalbündel. $\square$

Als Folgerung kann man grob sagen: Ein Vektorbündel und ein Prinzipalbündel sind assoziiert, wenn sie die gleichen Übergangsfunktionen haben.

Bemerkung. Man kann statt eines Vektorraumes V in der ersten Konstruktion eine beliebige Mannigfaltigkeit F verwenden, auf die G über eine Darstellung $\sigma : G \to Aut(F)$ operiert. Man erhält dann ein zu P assoziiertes Bündel $P \times_\sigma F$, das dann in der Regel kein Vektorbündel ist.

2.1.2 Beispiel: Das Repèrebündel

Ist M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Tangentialbündel $TM(M, \pi_T, \mathbb{R}^n)$, so konstruiert man auf natürliche Weise ein zu TM assoziiertes Prinzipalbündel. Dieses Bündel heißt das Rahmenbündel oder das Repèrebündel $RM(M, \pi_R, GL_n\mathbb{R})$ von M.

Die Konstruktion geht auf die "Methode der bewegten Basen" nach E. Cartan zurück. Die Idee besteht darin das Verhalten der Mannigfaltigkeit M, beschrieben durch Paralleltransport, Krümmung, Torsion etc., durch eine Zusammenhangsform auf dem Repèrebündel zu beschreiben. Die allgemeine Gültigkeit dieses Konzeptes, zeigt der Abschnitt 2.2.

Zur Konstruktion des Repèrebündels definiert man die Faser, den Totalraum und die Projektion durch

$$\begin{aligned} R_xM &= \{(b_1, ..., b_n) \in (T_xM)^n \quad ; \{b_1, ..., b_n\} \text{ ist eine Basis von } T_xM\} \\ RM &= \bigcup_{x \in M} R_xM \end{aligned}$$

und

$$\pi_R : RM \to M \quad \text{mit} \quad R_xM \ni b \mapsto \pi(b) = x.$$

Zu M hat man eine Überdeckung (U_α) mit Koordinaten $x_\alpha^1, ..., x_\alpha^n$. Diese liefern Bündelkarten $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ für TM mit

$$\varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \pi_T^{-1}(U_\alpha) \quad \text{mit} \quad (x, (v^1, ..., v^n)) \mapsto v^i \frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}.$$

Beim Übergang von einer Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ zu einer Karte (U_β, φ_β) entsprechen die Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ natürlich den Matrizen des Koordinatenwechsels, denn für $(x, v) \in U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^n$ ist

$$\begin{aligned} (x, g_{\alpha\beta}(x)v) &= \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) = \varphi_\alpha(x, v^i \frac{\partial}{\partial x_\beta^i}\Big|_x) \\ &= \varphi_\alpha(x, v^i \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}(x) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_x) = (x, (\frac{\partial x_\alpha^1}{\partial x_\beta^i}(x)v^i, ..., \frac{\partial x_\alpha^n}{\partial x_\beta^i}(x)v^i)) \\ &= (x, \left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}(x)\right)_{ij} \cdot v). \end{aligned}$$

Da jede Basis $\{b_i\}$ von T_xM lokal über der Menge U_α nach der Basis $(\frac{\partial}{\partial x_\alpha^i}\Big|_x)$ entwickelt werden kann, hat sie die Form

$$b_i = b_i^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_x$$

mit einer Matrix $B = (b_i^j)$, deren Determinante nicht verschwindet. Man bekommt so eine faserweise bijektive Abbildung

$$\phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times GL_n\mathbb{R} \to \pi_R^{-1}(U_\alpha) \text{ mit } \phi_\alpha^{-1}(x, B) = (b_1^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_x, ..., b_n^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_x).$$

Beim Wechsel der Karte ergeben sich folgende Übergangsfunktionen $h_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} (x, h_{\alpha\beta}(x)B) &= \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}(x, B) = \phi_\alpha((b_i^j \frac{\partial}{\partial x_\beta^j}\Big|_x)_i) \\ &= \phi_\alpha(x, (b_i^j \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j}(x) \frac{\partial}{\partial x_\alpha^k}\Big|_x)_i) = (x, \left(b_i^k \frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^k}(x)\right)_{ij}) \\ &= (x, \left(\frac{\partial x_\alpha^i}{\partial x_\beta^j}(x)\right)_{ij} \cdot B) = (x, g_{\alpha\beta}(x)B). \end{aligned}$$

Da $h_{\alpha\beta}$ mit $g_{\alpha\beta}$ übereinstimmt, sind die Übergangsfunktionen natürlich glatt, und analog zur Argumentation in Satz 2.3 ist RM ein Faserbündel mit Strukturgruppe und Faser $GL_n\mathbb{R}$.

Die Rechtsoperation von $GL_n\mathbb{R}$ auf RM ist gegeben durch die Zuordnung

$$(C = (c_i^j)_{ij}, (b_1, ..., b_n)) \mapsto R_C(b_1, ..., b_n) = (c_1^j b_j, ..., c_n^j b_j)$$

und entspricht der Rechtsmultiplikation von Matrizen, denn nun gilt

$$\begin{aligned} R_C\phi_\alpha^{-1}(x, B) &= R_C(b_1^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_x, ..., b_n^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_x) = (c_1^k b_k^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_x, ..., c_n^k b_k^j \frac{\partial}{\partial x_\alpha^j}\Big|_x) \\ &= \phi_\alpha^{-1}(x, (b_k^i c_j^k)) = \phi_\alpha^{-1}(x, BC). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass das Repèrebündel ein auf natürliche Weise zu TM assoziiertes Prinzipalbündel ist.

2.1.3 Die affine Struktur der Zusammenhänge

Ein spezielles zum Prinzipalbündel P assoziiertes Vektorbündel ist das Bündel über M mit der Standardfaser $\mathfrak{g}$ und der Operation Ad von G auf $\mathfrak{g}$. Dieses Bündel heißt das adjungierte Bündel zu P, und wird mit

$$AdP = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$$

bezeichnet. Die Schnitte in AdP sind lokal Funktionen auf M mit Werten in $\mathfrak{g}$, deren Transformationsverhalten bei Kartenwechsel gegeben ist durch

$$s_\alpha = g_{\alpha\beta} s_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \ .$$

Dabei sind s_α und s_β die lokalen Darstellungen des betrachteten Schnittes, und $g_{\alpha\beta}$ ist die Übergangsfunktion zwischen den entsprechenden Karten in P. Der Ausdruck gsg^{-1} steht hier für $Ad_g s$, in Anlehnung an die Darstellung von Ad im Falle von Matrixgruppen.

Sind ω und $\tilde{\omega}$ Zusammenhänge auf P mit den lokalen Darstellungen A_α und $\tilde{A}_\alpha$ und dem Transformationsverhalten

$$A_\alpha = g_{\alpha\beta} A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta} d g_{\alpha\beta}^{-1},$$

und analog für $\tilde{A}_\alpha$, so sieht man, dass für die lokalen Darstellungen $A_\alpha - \tilde{A}_\alpha$ der Differenz $\omega - \tilde{\omega}$, Folgendes gilt

$$A_\alpha - \tilde{A}_\alpha = g_{\alpha\beta} \left(A_\beta - \tilde{A}_\beta \right) g_{\alpha\beta}^{-1} \; .$$

Die restlichen Terme heben sich gerade gegenseitig auf. Das bedeutet, dass sich $\omega - \tilde{\omega}$ als 1-Form mit Werten in dem Bündel AdP, also als Element aus $\Omega^1(AdP) = \Gamma\left(\Lambda^1 T^* M \otimes AdP\right)$, interpretieren läßt.

Das bedeutet weiter, dass die Menge $\mathcal{A}$ aller Zusammenhänge auf dem Prinzipalbündel P ein affiner Raum ist. Wählt man einen beliebigen Zusammenhang als Nullpunkt, so ist $\mathcal{A} \cong \Omega^1(AdP)$.

2.2 Die Äquivalenz der verschiedenen Zusammenhangsbegriffe

Ist $E(M, \pi_E, V)$ ein über ρ zum Prinzipalbündel $P(M, \pi, G)$ assoziiertes Vektorbündel, so kann man zu $z \in P$ die Abbildung $[z] : V \to \pi_E^{-1}(\pi(z))$ betrachten. Diese ist über eine Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ von E und (U_α, ψ_α) von P definiert durch

$$[z]v = \varphi_\alpha^{-1}(\rho(\psi_\alpha(z))v)$$

Diese Definition ist von der Wahl der Karten unabhängig, denn für zwei weitere Karten (U_β, φ_β) und (U_β, ψ_β) gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi_\beta^{-1}(\rho(\psi_\beta(z))v) &= \varphi_\alpha^{-1} \circ (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\rho(\psi_\beta(z))v) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(\rho(g_{\alpha\beta}(x))\rho(\psi_\beta(z))v) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(\rho(\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\beta(z))v) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(\rho(\psi_\alpha(z))v).
\end{aligned}$$

Lokal bewirkt diese Abbildung für $\psi_\alpha(z) = (x, g)$ gerade $\varphi_\alpha([z]v) = \rho(g)v$, und sie hat die Eigenschaft

$$[zg]v = [z]\rho(g)v,$$

denn

$$\begin{aligned}
[zg]v &= \varphi_\alpha^{-1}(\rho(\psi_\alpha(zg))v) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(\rho(\psi_\alpha(z)g)v) \\
&= \varphi_\alpha^{-1}(\rho(\psi_\alpha(z))\rho(g)v) = [z]\rho(g)v.
\end{aligned}$$

Hat man eine k-Form S auf M mit Werten in E gegeben – das heißt, für alle $x \in M$ und alle $w_1, ..., w_k \in T_xM$ gilt gilt $\pi_E(S_x(w_1, ..., w_k)) = x$ – so kann man dieser eine k-Form $\hat{S}$ auf P mit Werten in V wie folgt zuordnen. Man setzt für $z \in P$ und $v_1, ..., v_k \in T_zP$

$$\hat{S}_z(v_1, ..., v_k) = [z]^{-1} S_{\pi(z)}(\pi_* v_1, ..., \pi_* v_k).$$

Diese hat die Eigenschaften

(i) $\hat{S}$ ist vom Typ ρ,

denn sind $z \in P$ und $v_1, ..., v_k \in T_zP$, so gilt für $g \in G$

$$\begin{aligned}
((R_g)^*\hat{S})_z(v_1, ..., v_k) &= \hat{S}_{zg}((R_g)_* v_1, ..., (R_g)_* v_k) \\
&= [zg]^{-1} S_{\pi(zg)}(\pi_*(R_g)_* v_1, ..., \pi_*(R_g)_* v_k) \\
&= \rho(g^{-1})[z]^{-1} S_{\pi(z)}(\pi_* v_1, ..., \pi_* v_k) \\
&= \rho(g^{-1})\hat{S}_z(v_1, ..., v_k).
\end{aligned}$$

Dabei gilt die vorletzte Gleichheit wegen $\pi \circ R_g = \pi$, also $\pi_*(R_g)_* = \pi_*$.

(ii) $\hat{S}$ ist horizontal,

denn ist ein Eintrag v_i von $\hat{S}$ vertikal, so ist $\pi_* v_i = 0$.

Umgekehrt kann man auch zu jeder horizontalen k-Form $\hat{S}$ auf P vom Typ ρ mit Werten in V eine k-Form S auf M mit Werten in E finden. Für $x \in M$ und $w_1, ..., w_k \in T_xM$ ist diese gegeben durch

$$S_x(w_1, ..., w_k) = [z]\hat{S}_z(v_1, ..., v_k)$$

mit $z \in \pi^{-1}(x)$ und $v_1, ..., v_k \in T_zP$ mit $\pi_* v_i = w_i$.

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl von $v_1, ..., v_k \in T_zP$ mit der Eigenschaft $\pi_* v_i = w_i$, da nur der horizontale Anteil von v_i einen Beitrag zum Argument von $\hat{S}$ liefert. Außerdem ist die Definition auch unabhängig von der Wahl von $z \in \pi^{-1}(x)$. Um das zu sehen wählt man ein anderes Element $zg \in \pi^{-1}(x)$ und dazu $\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_k \in T_{zg}P$ mit $\pi_* \tilde{v}_i = w_i$, und rechnet:

$$[zg]\hat{S}_{zg}(\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_k) = [z]\rho(g)\hat{S}_{zg}(\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_k) = [z]\hat{S}_z((R_{g^{-1}})_*\tilde{v}_1, ..., (R_{g^{-1}})_*\tilde{v}_k).$$

Beachtet man nun noch $\pi_*(R_{g^{-1}})_*\tilde{v}_i = \pi_*\tilde{v}_i = w_i$, so folgt die Unabhängigkeit von z aus der Unabhängigkeit der Einträge v_i.

Mit Hilfe der obigen Konstruktion hat man eine Bijektion hergestellt zwischen der Menge aller k-Formen auf M mit Werten in E, und der Menge aller horizontalen k-Formen vom Typ ρ auf P mit Werten in V. Speziell im Fall $k = 0$ bedeutet das

$$\Gamma(E) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\rho - \text{equivariante } V - \text{wertige Funktionen auf } P\}.$$

Equivariant meint dabei $S(zg) = \rho(g^{-1})S(z)$ für alle $z \in P$ und $g \in G$.

Um den Zusammenhang auf P mit der kovarianten Ableitung auf E zu vergleichen benötigt man den

Satz 2.4. *Sei $P(M, \pi, G)$ ein Prinzipalbündel mit Zusammenhang ω, V ein Vektorraum auf den G über eine lineare Darstellung ρ operiert und ρ_* die zu ρ adjungierte Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf V. Dann gilt für eine horizontale k-Form T vom Typ ρ auf P mit Werten in V*

$$DT = dT + \rho_*(\omega) \wedge T.$$

Beweis. Um die Formel nachzuweisen, hat man für $z \in P$ und $v_0, ..., v_k \in T_zP$ die Gleichung

$$DT_z(v_0, ..., v_k) = dT_z(v_0, ..., v_k) + \rho_*(\omega) \wedge T(v_0, ..., v_k)$$

nachzuweisen. Wegen der Linearität reicht es aus, dies für die folgenden drei Fälle zu tun.

Fall 1. $v_0, ..., v_k$ sind horizontale Vektoren.

In diesem Fall ist $\pi_H(v_i) = v_i$ und $\rho_*(\omega(v_i)) = 0$ für alle i. Die Behauptung reduziert sich damit auf die Definition des totalen äußeren Differentials von T.

Fall 2. Unter den Vektoren $v_0, ..., v_k$ befinden sich mindestens zwei vertikale Vektoren.

Die zwei vertikalen Vektoren sind ohne Beschränkung v_0 und v_1. Zu diesen beiden wählt man die Fundamentalvektorfelder λA_0 und λA_1 mit $(\lambda A_0)_z = v_0$ und $(\lambda A_1)_z = v_1$, sowie Vektorfelder $X_2, ..., X_k$ um z mit $X_{i,z} = v_i$ für $i = 2, ..., k$. Die linke Seite der Gleichung verschwindet, da das totale äußere Differential eine horizontale Form liefert. Für die rechte Seite rechnet man

$$\begin{aligned} dT_z(v_0, ..., v_k) = {} & v_0(T(\lambda A_1, X_2, ..., X_k)) - v_1(T(\lambda A_0, X_2, ..., X_k)) \\ & + \sum_{i=2}^{k} (-1)^i v_i(T(\lambda A_0, \lambda A_1, X_2, ..., \widehat{X_i}, ..., X_k)) \\ & + \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=2}^{k} (-1)^{i+j} T([\lambda A_i, X_j], \lambda A_{(i+1)\mathrm{mod}2}, X_2, ..., \widehat{X_j}, ..., X_k) \\ & - T([\lambda A_0, \lambda A_1], X_2, ..., X_k) \end{aligned}$$

(Dabei bedeutet $\widehat{\ }$ über einem Eintrag, dass dieser fehlt). In dieser Summe verschwinden alle Summanden, da in T ein Argument immer vertikal ist. Bei dem letzten Summanden folgt das aus

$$\begin{aligned}[\lambda A, \lambda B]_z = [(\lambda A)_z, (\lambda B)_z] &= [(\lambda_z)_* A, (\lambda_z)_* B] \\ &= (\lambda_z)_*[A, B] = (\lambda[A, B])_z.\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\rho_*(\omega) \wedge T(v_0, ..., v_k) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \rho_*(\omega(v_i)) T(v_0, ..., \widehat{v_i}, ..., v_k) = 0,$$

da in T auch hier mindestens ein Eintrag vertikal ist.

Fall 3. Einer der Vektoren $v_0, ..., v_k$ ist vertikal und die anderen sind horizontal.

Dieser eine Vektor ist ohne Beschränkung v_0. Zu diesem wählt man wieder das Fundamentalvektorfeld λA mit $(\lambda A)_z = v_0$Zu den horizontalen Vektoren v_i wählt man lokale, horizontale, $(R_g)_*$-invariante Vektorfelder X_i mit $X_{i,z} = v_i$.

Diese findet man, da es zu $v_i \in H_z \subset T_zP$ über den Isomorphismus $\pi_* : H_z \to T_xM$, $x = \pi(z)$, einen Vektor $\tilde{v}_i \in T_xM$, und zu diesem in einer Umgebung U von x ein Vektorfeld $\tilde{X}_i$ gibt mit $\tilde{X}_{i,x} = \tilde{v}_i$. Mit Hilfe des Isomorphismus π_* liefert das eindeutig eine Zuordnung $X_i : \pi^{-1}(U) \to TP$ mit $z \mapsto X_{i,z} = \pi_*^{-1} \tilde{X}_{i,\pi(z)}$. Es bleibt noch zu zeigen, dass X_i ein Vektorfeld, also glatt, ist. Ohne Beschränkung ist U eine Kartenumgebung von z, also $\pi^{-1}(U) \cong U \times G$, bzw $T\pi^{-1}(U) \cong TU \oplus TG$. Dann liefert dieser Bündelisomorphismus zu $\tilde{X}_i$ ein Vektorfeld Y_i auf $\pi^{-1}(U)$ mit $\pi_* Y_i = \tilde{X}_i$, dessen horizontaler Anteil natürlich auch glatt ist und wegen der Eindeutigkeit gerade mit X_i übereinstimmt. Da $(R_g)_*$ horizontale Vektoren in ebensolche überführt, folgt die Invarianz von X_i aus der Eindeutigkeit und aus $\pi_*((R_g)_* X_i) = (\pi \circ R_g)_* X_i = \pi_* X_i = \tilde{X}_i$.

Die linke Seite der gewünschten Gleichung verschwindet wie in Fall 2 und für die rechte Seite rechnet man auch wie im Fall 2

$$\begin{aligned} dT_z(v_0, ..., v_k) = v_0(T(X_1, ..., X_k)) &\\ &+ \sum_{i=1}^{k} (-1)^i v_i(T(\lambda A, X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., X_k)) \\ &+ \sum_{j=1}^{k} (-1)^j T([\lambda A, X_j], X_1, ..., \widehat{X_j}, ..., X_k) \\ &+ \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k} (-1)^{i+j} T([X_i, X_j], \lambda A, X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., \widehat{X_j}, ..., X_k). \end{aligned}$$

Man bemerkt, dass wegen des vertikalen Eintrags in T die erste und die dritte Teilsumme null ist. Das Verschwinden der mittleren Summe sieht man wie folgt.

Die Lieklammer $[\lambda A, X_j]$ ist definiert durch

$$[\lambda A, X_j]_z = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(X_j - (R_{g(t)})_* X_j)_z,$$

wobei $g(t)$ ein Weg in G mit $g(0) = e$ ist, der das als linksinvariantes Vektorfeld interpretierte Element $A \in \mathfrak{g}$ induziert, das heißt $\dot{g}(t) = A_{g(t)}$. Dieser Weg liefert einen Fluß $R_{g(t)}$ auf P, der dann das Vektorfeld λA induziert, denn

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(R_{g(t)}z) &= \frac{d}{dt}(\lambda_z g(t)) = (\lambda_z)_* \dot{g}(t) \\
&= (\lambda_z)_* A_{g(t)} = (\lambda_z)_* A_{g(t)e} \\
&= (\lambda_z)_*(l_{g(t)})_* A_e = (\lambda_z \circ l_{g(t)})_* A_e \\
&= (\lambda_{zg(t)})_* A_e = (\lambda A)_{zg(t)}.
\end{aligned}$$

Wegen der Invarianz ist $X_j = (R_{g(t)})_* X_j$, also $[\lambda A, X_j] = 0$ und somit die mittlere Summe Null. Es bleibt also lediglich der Term $(\lambda A)_z(T(X_1, ..., X_k))$ übrig. Für diesen rechnet man weiter:

$$\begin{aligned}
(\lambda A)_z(T(X_1, ..., X_k)) &= \frac{d}{dt}\ ((R_{g(t)})^* T(X_1, ..., X_k))\big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\ ((R_{g(t)})^* T)((R_{g(t)^{-1}})_* X_1, ..., (R_{g(t)^{-1}})_* X_k))\big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\ ((R_{g(t)})^* T)(X_1, ..., X_k))\big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}\ \rho(g(t)^{-1})\big|_{t=0} T(X_1, ..., X_k) \\
&= -\frac{d}{dt}\ \rho(g(t))\big|_{t=0} T(X_1, ..., X_k) \\
&= -\rho_*(A) T(X_1, ..., X_k) \\
&= -\rho_*(\omega(\lambda A)) T(X_1, ..., X_k) \\
&= -\rho_*(\omega(\lambda A)) T(X_1, ..., X_k) \\
&= -\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \rho_*(\omega(X_i)) T(\lambda A, X_1, ..., \widehat{X_i}, ..., X_k) \\
&= -\rho_*(\omega) \wedge T(\lambda A, X_1, ..., X_k).
\end{aligned}$$

In diesen Umformungen gilt die dritte Gleichheit wegen der Invarianz der X_i, die vierte, da T vom Typ ρ ist, die fünfte, da für die Inversenbildung $inv : G \to G$ an der Stelle $e \in G \quad inv_* A = -A$ für alle $A \in T_e G = \mathfrak{g}$ gilt, die sechste, da $g(t)$ gerade der Fluß zum Vektorfeld A ist und die achte, da die hinzugenommenen Summanden wegen der Horizontalität von T alle verschwinden. Mit Hilfe dieser letzten Rechnung ist die Gültigkeit des Satzes bewiesen. □

Wie man an der Zusammenhangsform ω von P erkennt, trifft der Satz für nichthorizontale Formen im Allgemeinen nicht zu. Es gilt vielmehr der

Satz 2.5. *Für die Zusammenhangsform ω auf dem Prinzipalbündel P gilt*

$$D\omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = d\omega + \omega \wedge \omega.$$

Schreibweise: Im Falle der linearen Darstellung $\rho = Ad$ der Liegruppe G auf ihrer Liealgebra $\mathfrak{g}$ gilt $\rho_* = ad$ für die Darstellung von $\mathfrak{g}$ auf sich selbst mit $ad_A B = [A, B]$. Wählt man in $\mathfrak{g}$ eine Basis $\{E_i\}$, dann haben zwei p- bzw. q-Formen α bzw. β mit Werten in $\mathfrak{g}$ die Entwicklungen $\alpha = \alpha^i E_i$ bzw. $\beta^i E_i$ mit gewöhnlichen p-Formen α^i bzw. q-Formen β^iDamit folgt

$$\begin{aligned}\rho_*(\alpha) \wedge \beta &= \rho_*(\alpha^i E_i) \wedge \beta^j E_j = \alpha^i \wedge \beta^j \rho_*(E_i) E_j \\ &= \alpha^i \wedge \beta^j [E_i, E_j] \stackrel{\text{def}}{=} [\alpha, \beta].\end{aligned}$$

Speziell im Falle zweier 1-Formen gilt dann

$$\begin{aligned}\rho_*(\alpha) \wedge \beta(v, w) &= \alpha^i \wedge \beta^j(v, w) [E_i, E_j] \\ &= \left(\alpha^i(v)\beta^j(w) - \alpha^i(w)\beta^j(v)\right) [E_i, E_j] \\ &= \alpha^i(v)\beta^j(w) [E_i, E_j] - \alpha^i(w)\beta^j(v) [E_i, E_j] \\ &= \left[\alpha^i(v)E_i, \beta^j(w)E_j\right] - \left[\alpha^i(w)E_i, \beta^j(v)E_j\right] \\ &= [\alpha(v), \beta(w)] - [\alpha(w), \beta(v)],\end{aligned}$$

also

$$[\alpha, \beta](v, w) = [\alpha(v), \beta(w)] - [\alpha(w), \beta(v)]$$

und falls $\alpha = \beta$ schließlich

$$[\alpha, \alpha](v, w) = 2[\alpha(v), \alpha(w)].$$

Handelt es sich bei $\mathfrak{g}$ um eine Matrixalgebra, so gibt es für die p-Form α und die q-Form β Darstellungen $\alpha = \alpha^{ij} E_{ij}$ und $\beta^{ij} E_{ij}$ mit gewöhnlichen p- und q-Formen α^{ij} und β^{ij} und den Matrizen $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$, und man sieht

$$\begin{aligned}\rho_*(\alpha) \wedge \beta &= \alpha^{ij} \wedge \beta^{kl} [E_{ij}, E_{kl}] \\ &= \alpha^{ij} \wedge \beta^{kl} [E_{ij}E_{kl} - E_{kl}E_{ij}] \\ &= \alpha^{ij} \wedge \beta^{kl} [\delta_{kj}E_{il} - \delta_{il}E_{kj}] \\ &= \sum_k \alpha^{ik} \wedge \beta^{kl} E_{il} - \sum_l \alpha^{lj} \wedge \beta^{kl} E_{kj} \\ &= \sum_k \alpha^{ik} \wedge \beta^{kl} E_{il} - (-1)^{pq} \sum_l \beta^{kl} \wedge \alpha^{lj} E_{kj} \\ &= \sum_k \left(\alpha^{ik} \wedge \beta^{kj} - (-1)^{pq} \beta^{ik} \wedge \alpha^{kj}\right) E_{ij} \\ &= (\alpha \wedge \beta - (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha)^{ij} E_{ij}.\end{aligned}$$

Das heißt also

$$[\alpha, \beta] = \alpha \wedge \beta - (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha,$$

oder im Falle zweier 1-Formen wieder

$$[\alpha, \beta] = \alpha \wedge \beta + \beta \wedge \alpha,$$

und falls $\alpha = \beta$ dann schließlich $[\alpha, \alpha] = 2\alpha \wedge \alpha$.
Wegen dieser Identitäten wird ab hier, falls der zugrundeliegende Vektorraum $\mathfrak{g}$ ist, die Schreibweise

$$DT = dT + [\omega, T] = dT + \omega \wedge T - (-1)^k T \wedge \omega$$

für eine k-Form gemäß Satz 2.4 verwendet.

Beweis. (Satz 2.5) Man hat zu zeigen, dass für $z \in P$, und $v, w \in T_z P$ $D\omega(v, w) = d\omega(v, w) + [\omega(v), \omega(w)]$ gilt. Dazu untersucht man analog zu 2.3 drei Fälle.

Fall 1. v und w sind horizontale Vektoren.

Dann gilt $D\omega_z(v, w) = d\omega_z(\pi_H v, \pi_H w) = d\omega_z(v, w)$ und $[\omega_z(v), \omega_z(w)] = [0, 0] = 0$.

Fall 2. v ist horizontal und w ist vertikal.

Sei X ein horizontales Vektorfeld um z mit $X_z = v$, und λA das Fundamentalvektorfeld mit $(\lambda A)_z = w$.

Dann gilt $D\omega_z(v, w) = 0$, da das totale äußere Differential horizontal und wegen $[\omega_z(v), \omega_z(w)] = [0, \omega_z(w)] = 0$.

Außerdem ist

$$\begin{aligned} d\omega_z(v, w) &= d\omega_z(X_z, (\lambda A)_z) \\ &= X_z(\omega(\lambda A)) - (\lambda A)_z(\omega(X)) - \omega_z([X, \lambda A]_z) \\ &= X_z(A) - (\lambda A)_z(0) - \omega_z([X, \lambda A]_z) \\ &= -\omega_z([X, \lambda A]_z) = 0. \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichheit folgt aus der Tatsache, dass A konstant ist, und die letzte weil $[X, \lambda A]_z$ horizontal ist. Die Definition der Lieklammer liefert nämlich (vgl. Beweis zu 2.3) $[X, \lambda A]_z = -\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(X - (R_{g(t)})_* X\right)_z$ und somit folgt die Horizontalität von $[X, \lambda A]_z$ aus der von $(R_{g(t)})_* X$ und X.

Fall3. v und w sind vertikal.

Dazu wählt man wieder Fundamentalvektorfelder λA und λB mit $(\lambda A)_z = w$ und

$(\lambda B)_z = v$. Dann ist wie in Fall 2 $D\omega_z(v, w) = 0$ und außerdem

$$\begin{aligned} d\omega_z(v, w) &= d\omega_z((\lambda B)_z, (\lambda A)_z) \\ &= (\lambda B)_z(\omega(\lambda A)) - (\lambda A)_z(\omega(\lambda B)) - \omega_z([\lambda B, \lambda A]_z) \\ &= (\lambda B)_z(A) - (\lambda A)_z(B) - \omega_z((\lambda[B, A])_z) \\ &= -[B, A] \\ &= -[\omega_z((\lambda B)_z), \omega_z((\lambda A)_z)] \\ &= -[\omega_z(v), \omega_z(w)]. \end{aligned}$$

Damit ist dann alles gezeigt. $\square$

Der Satz 2.4 erlaubt es einem, auf recht einfache Weise die lokalen Darstellungen des äußeren Differentials einer k-Form auf P - von dem obigen speziellen Typ - auszurechnen. In einer Karte (U_α, ψ_α) gilt:

$$(DT)_\alpha = s_\alpha^*(DT) = s_\alpha^*(dT) + s_\alpha^*(\rho_*(\omega) \wedge T) = d(s_\alpha^* T) + \rho_*(s_\alpha^* \omega) \wedge s_\alpha^* T,$$

also

$$(DT)_\alpha = dT_\alpha + \rho_*(A_\alpha) \wedge T_\alpha.$$

Im Falle $k = 0$, also den Fall der V-wertigen Funktionen auf P, bedeutet das $(DT)_\alpha = dT_\alpha + \rho(A_\alpha)T_\alpha$.

Zu T findet man einen Schnitt S in dem assoziierten Vektorbündel E mit $\hat{S} = T$. Die lokalen Darstellungen von S und $\hat{S}$ stimmen aber überein, denn es gilt in den Karten (U_α, ψ_α) von P und $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ von E

$$S_\alpha(x) = \varphi_\alpha \circ S(x)$$

und wegen

$$[s_\alpha(x)]v = \varphi_{\alpha,x}^{-1}(\rho(\psi_\alpha(s_\alpha(x)))v) = \varphi_{\alpha,x}^{-1}(\rho(e)v) \;=\; \varphi_{\alpha,x}^{-1}(v)$$

dann

$$\hat{S}_\alpha(x) = (s_\alpha^* \hat{S})(x) = \hat{S}(s_\alpha(x)) = [s_\alpha(x)]^{-1} S(x) = \varphi_{\alpha,x} \circ S(x),$$

also

$$S_\alpha = \hat{S}_\alpha.$$

Auf E kann man nun einen Zusammenhang D_E definieren, indem man für einen Schnitt $S \in \Gamma(E)$ setzt:

$$(D_E S)_\alpha = (D\hat{S})_\alpha.$$

Dann gilt nämlich $(D_E S)_\alpha = dS_\alpha + \rho_*(A_\alpha)S_\alpha$, und man hat mit Hilfe der Zusammenhangsmatrizen $\rho_*(A_\alpha)$, einen Zusammenhang auf E bekommen, denn das Transformationsverhalten überträgt sich von dem der A_α. Es gilt nämlich die folgende

Bemerkung 2.6. *Für die an der obigen Konstruktion beteiligten Darstellungen gilt*

a) $\rho \circ aut_g = aut_{\rho(g)} \circ \rho$ *und* $\rho_* \circ Ad_g = Ad_{\rho(g)} \circ \rho_*$ *sowie*

b) $\rho \circ l_g = l_{\rho(g)} \circ \rho$ *und* $\rho_* \circ (l_g)_* = (l_{\rho(g)})_* \circ \rho_*$

Beweis. Die zweiten Teile der Aussagen a) und b) folgen durch Differentiation aus den ersten. Diese aber sieht man gleich, denn es gilt

$$\begin{aligned}\rho \circ aut_g(h) &= \rho(ghg^{-1}) = \rho(g)\rho(h)\rho(g)^{-1} = aut_{\rho(g)}(\rho(h))\\ &= aut_{\rho(g)} \circ \rho(h)\\ \rho \circ l_g(h) &= \rho(hg) = \rho(h)\rho(g) = l_{\rho(g)}(\rho(h))\\ &= l_{\rho(g)} \circ \rho(h)\end{aligned}$$

für alle $h \in G$. □

Mit dieser Bemerkung folgt

$$\begin{aligned}\rho_*(A_\alpha) &= \rho_*(g_{\alpha\beta}A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1}) = \rho_*(Ad_{g_{\alpha\beta}}A_\beta + g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1})\\ &= Ad_{\rho(g_{\alpha\beta})}\rho_*(A_\beta) + (l_{\rho(g_{\alpha\beta})})_*\rho_*(g_{\alpha\beta}^{-1})_*\\ &= Ad_{\rho(g_{\alpha\beta})}\rho_*(A_\beta) + (l_{\rho(g_{\alpha\beta})})_*(\rho \circ g_{\alpha\beta}^{-1})_*\\ &= \rho(g_{\alpha\beta})\rho_*(A_\beta)\rho(g_{\alpha\beta})^{-1} + \rho(g_{\alpha\beta})d(\rho(g_{\alpha\beta})^{-1}),\end{aligned}$$

womit die obige Behauptung über die Zusammenhangsmatrizen $\rho_*(A_\alpha)$ bewiesen ist.

Betrachtet man eine k-Form auf M mit Werten in E, also eine Linearkombination von Produkten der Form $S \otimes \vartheta$ mit einer gewöhnliche k-Form ϑ und einem Schnitt S, so hat man $\widehat{S \otimes \vartheta} = \hat{S} \otimes \hat{\vartheta}$, mit einer horizontalen k-Form $\hat{\vartheta}$ auf P, und $\hat{S}$ wie oben. Dabei ist $\hat{\vartheta}_z(v_1, ..., v_k) = \vartheta_{\pi(z)}(\pi_* v_1, ..., \pi_* v_k)$ für $z \in P$ und $v_1, ..., v_k \in T_z P$, und es gilt $\hat{\vartheta}_\alpha \overset{\text{def}}{=} s_\alpha^* \hat{\vartheta} = \vartheta_\alpha \overset{\text{def}}{=} \vartheta|_{U_\alpha}$, wegen

$$\begin{aligned}(s_\alpha^*\hat{\vartheta})_x(w_1, ..., w_k) &= \hat{\vartheta}_{s_\alpha(x)}((s_\alpha)_* w_1, ..., (s_\alpha)_* w_k)\\ &= \vartheta_{\pi \circ s_\alpha(x)}(\pi_*(s_\alpha)_* w_1, ..., \pi_*(s_\alpha)_* w_k)\\ &= \vartheta_x(w_1, ..., w_k)\end{aligned}$$

und wegen $\pi \circ s_\alpha = id$. Man setzt

$$\begin{aligned}(D_E(S \otimes \vartheta))_\alpha &= (D(\widehat{S \otimes \vartheta}))_\alpha = d(\widehat{S \otimes \vartheta})_\alpha + \rho_*(A_\alpha) \wedge (\widehat{S \otimes \vartheta})_\alpha\\ &= d(\hat{S}_\alpha \otimes \hat{\vartheta}_\alpha) + \rho_*(A_\alpha) \wedge (\hat{S}_\alpha \otimes \hat{\vartheta}_\alpha)\\ &= dS_\alpha \wedge \vartheta_\alpha + S_\alpha \otimes d\vartheta_\alpha + (\rho_*(A_\alpha)S_\alpha) \wedge \vartheta_\alpha\\ &= d\vartheta_\alpha \otimes S_\alpha + (dS_\alpha + \rho_*(A_\alpha)S_\alpha) \wedge \vartheta_\alpha\\ &= d\vartheta_\alpha \otimes S_\alpha + (D_E S)_\alpha \wedge \vartheta_\alpha\\ &= (d\vartheta \otimes S + D_E S \wedge \vartheta)_\alpha.\end{aligned}$$

Das ist genau das Ergebnis aus Bemerkung 1.9, nämlich

$$D_E(S \otimes \vartheta) = d\vartheta \otimes S + D_E S \wedge \vartheta\,.$$

Zusammenfassung. Mit dem Begriff des assoziierten Bündels hat man nun gezeigt, dass aus einem Zusammenhang auf einem Prinzipalbündel ein Zusammenhang auf einem (assoziierten) Vektorbündel konstruiert werden kann. Diese Konstruktion ist umkehrbar, das heißt, zu einem Zusammenhang auf einem Vektorbündel gibt es einen Zusammenhang auf einem (assoziierten) Prinzipalbündel. Die lokalen Zusammenhangsmatrizen entsprechen sich bei diesem Verfahren gerade gegenseitig (gegebenenfalls bis auf eine Darstellung ρ) und die Transformationsverhalten sind dieselben.

Chapter 3

Yang-Mills-Theorie

3.1 Die Krümmung

Der Begriff der Krümmung ist eine erste Anwendung der kovarianten Ableitung, beziehungsweise des Zusammenhangs. Die Krümmung war lange Zeit, insbesondere bei der Formulierung der Elektrodynamik, das physikalisch relevante Objekt. Sie entspricht dort den elektrischen und magnetischen Feldern. Der Zusammenhang, also das Potential dieser Felder, wurde eher als eine Rechenhilfe angesehen und genutzt. Das änderte sich mit einem von D. Bohm und Y. Aharonov erdachten Experiment (vgl. [BA]), in dem ein elektromagnetisches Feld, einen physikalischen Effekt auf einen feldfreien Raum hat. Die Konsequenz, die von den beiden Autoren gezogen wird, ist die, dass nicht das Feld, sondern das Potential, das in dem betrachteten Bereich nicht verschwindet, die physikalisch relevante Größe ist (zu einer Diskussion der Interpretationen und Konsequenzen des Versuchs siehe [Er]). Da die Yang-Mills-Gleichungen als Verallgemeinerungen der Maxwellgleichungen gesehen werden können, wird die Krümmung auch bei diesen eine fundamentale Rolle spielen.

In diesem Kapitel wird die Krümmung auf Prinzipal- und Vektorbündeln definiert, und es wird wegen des vorigen Kapitels nicht verwunderlich sein, dass die Definitionen einander entsprechen.

Definition 3.1. *Die Krümmung eines Zusammenhangs ω mit totalem äußeren Differential D auf dem Prinzipalbündel $P(M, \pi, G)$ ist die 2-Form Ω mit Werten in der Liealgebra $\mathfrak{g}$ definiert durch*

$$\Omega = D\omega.$$

Definition 3.2. *Die Krümmung eines Zusammenhangs D_E auf dem Vektor- bündel $E(M, \pi_E, V)$ mit Strukturgruppe G ist der Operator $F : \Omega^0(E) \to \Omega^2(E)$ mit*

$$Fs = (D_E \circ D_E)\, s = D_E^2 s$$

für alle $s \in \Omega^0(E)$.

Um zu zeigen, dass sich diese zunächst äußerst unterschiedlichen Definitionen gemäß Kapitel 2 entsprechen, wird auch hier das Hilfsmittel die lokale Darstellung der Zusammenhänge sein. Zunächst wird der Fall des Prinzipalbündels näher betrachtet.

Die Krümmung Ω des Zusammenhangs ω auf P, hat gemäß Satz 2.5 die Eigenschaft

$$\Omega = D\omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

und ist selbst natürlich horizontal. Außerdem erfüllt Ω die Identität von Bianchi

$$D\Omega = 0.$$

Es gilt nämlich mit 2.3 und 2.4

$$\begin{aligned} D\Omega &= DD\omega = d(D\omega) + \omega \wedge D\omega - (-1)^2 D\omega \wedge \omega \\ &= d(d\omega + \omega \wedge \omega) + \omega \wedge (d\omega + \omega \wedge \omega) - (d\omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega \\ &= dd\omega + d(\omega \wedge \omega) + \omega \wedge d\omega + \omega \wedge (\omega \wedge \omega) - d\omega \wedge \omega - (\omega \wedge \omega) \wedge \omega \\ &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega + \omega \wedge d\omega - d\omega \wedge \omega = 0. \end{aligned}$$

Die lokalen Darstellungen der Krümmung Ω sind in einer Karte (U_α, ψ_α) mit dem lokalen trivialen Schnitt s_α, wie in Kapitel 2 im Falle des Zusammenhangs, gegeben durch die 2-Formen $\Omega_\alpha = s_\alpha^* \Omega$ auf U_α mit Werten in der Liealgebra $\mathfrak{g}$. Die Eigenschaften dieser lokalen 2-Formen, speziell bei einem Kartenwechsel, werden zusammengefasst im

Satz 3.3. *Für die lokale Darstellung der Krümmung Ω, $\Omega_\alpha = s_\alpha^* \Omega$, gilt*

$$\Omega_\alpha = dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha.$$

Und bei einem Wechsel von der Karte (U_α, ψ_α) zur Karte (U_β, ψ_β) mit Übergangsfunktion $g_{\alpha\beta}$ gilt für die lokalen Krümmungsformen das Transformationsverhalten

$$\Omega_\alpha = g_{\alpha\beta} \Omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha &= s_\alpha^* \Omega = s_\alpha^* (d\omega + \omega \wedge \omega) = d(s_\alpha^* \omega) + s_\alpha^* \omega \wedge s_\alpha^* \omega \\ &= dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha. \end{aligned}$$

Es bleibt noch das Transformationsverhalten zu zeigen.
Dazu nutzt man das entsprechende Verhalten der Zusammenhangsformen, nämlich

$A_\alpha = g_{\alpha\beta}A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}dg_{a\beta}^{-1}$ aus. Damit gilt dann

$$\begin{aligned}
\Omega_\alpha &= dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha \\
&= d\left(g_{\alpha\beta}A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}dg_{a\beta}^{-1}\right) \\
&\quad + \left(g_{\alpha\beta}A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}dg_{a\beta}^{-1}\right) \wedge \left(g_{\alpha\beta}A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}dg_{a\beta}^{-1}\right) \\
&= dg_{\alpha\beta} \wedge A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}(dA_\beta)g_{\alpha\beta}^{-1} - g_{\alpha\beta}A_\beta \wedge dg_{\alpha\beta}^{-1} + dg_{\alpha\beta} \wedge dg_{\alpha\beta}^{-1} \\
&\quad + g_{\alpha\beta}A_\beta \wedge A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}A_\beta \wedge dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1} \wedge g_{\alpha\beta}A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \\
&\quad + g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1} \wedge g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1} \\
&= dg_{\alpha\beta} \wedge A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}(dA_\beta)g_{\alpha\beta}^{-1} + dg_{\alpha\beta} \wedge dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}A_\beta \wedge A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \\
&\quad - (dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta} \wedge A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} - (dg_{\alpha\beta})g_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta} \wedge dg_{\alpha\beta}^{-1} \\
&= g_{\alpha\beta}(dA_\beta)g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}A_\beta \wedge A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1} \\
&= g_{\alpha\beta}\left(dA_\beta + A_\beta \wedge A_\beta\right) g_{\alpha\beta}^{-1} \\
&= g_{\alpha\beta}\Omega_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}.
\end{aligned}$$

Somit ist der Satz durch direktes Nachrechnen bewiesen. □

Dieses Verhalten der Krümmungsform beim Wechsel der lokalen Karten führt dazu, dass man Ω als 2-Form auf M mit Werten in dem zu P assoziierten Bündel $P \times_{Ad} \mathfrak{g} = AdP$ interpretieren kann, also als Schnitt in $\Lambda^2 T^*M \otimes AdP$ beziehungsweise als Element aus $\Omega^2(AdP)$ (vergleiche dazu Kapitel 2.1.3).

Ist $E = P \times_\rho V$ ein über ρ assoziiertes Vektorbündel zu P und D_E die durch den Zusammenhang ω vermittelte kovariante Ableitung auf E, so gilt für $s \in \Omega^k(E)$ in lokalen Koordinaten (ab jetzt wird der Index E an der kovarianten Ableitung unterdrückt)

$$(Ds)_\alpha = ds_\alpha + \rho_*(A_\alpha) \wedge s_\alpha,$$

insbesondere für $s \in \Gamma(E) = \Omega^0(E)$

$$(Ds)_\alpha = ds_\alpha + \rho_*(A_\alpha)s_\alpha.$$

Da Ds ein Element aus $\Omega^1(E)$ ist, kann man diesen Schnitt nochmal ableiten. Das Resultat ist dann ein Element aus $\Omega^2(E)$ und dies ist gerade das Ergebnis der Anwendung der Krümmung F des Zusammenhangs D auf s. Für die lokale Darstellung F_α des Operators F, ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
F_\alpha s_\alpha = (Fs)_\alpha &= (D \circ Ds)_\alpha \\
&= d(Ds)_\alpha + \rho_*(A_\alpha) \wedge (Ds)_\alpha \\
&= dds_\alpha + d(\rho_*(A_\alpha)s_\alpha) + \rho_*(A_\alpha) \wedge (ds_\alpha + \rho_*(A_\alpha)s_\alpha) \\
&= \rho_*(dA_\alpha)s_\alpha - \rho_*(A_\alpha) \wedge ds_\alpha + \rho_*(A_\alpha) \wedge ds_\alpha + \rho_*(A_\alpha) \wedge \rho_*(A_\alpha)s_\alpha \\
&= \rho_*(dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha)s_\alpha = \rho_*(\Omega_\alpha)s_\alpha.
\end{aligned}$$

Man sieht, dass die Krümmung F auf E zur kovarianten Ableitung D bis auf die Darstellung ρ die gleiche lokale Darstellung hat, wie die Krümmung des zugehörigen Zusammenhangs im assoziierten Prinzipalbündel. F ist als Operator von $\Omega^0(E)$ nach $\Omega^2(E)$ $C^\infty(M)$-linear, denn mit einer Funktion f und einem Schnitt s gilt

$$\begin{aligned} F(fs) &= DD(fs) = D(df \otimes s + fDs) \\ &= ddf \otimes s - df \otimes Ds + df \otimes s + fDDS \\ &= fDDs = fFs. \end{aligned}$$

Somit ist F aus $Hom(\Omega^0(E), \Omega^2(E))$. Wegen der folgenden Isomorphismen, kann man F als Schnitt in einem speziellen Bündel interpretieren. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} Hom(\Omega^0(E), \Omega^2(E)) &\cong Hom(\Gamma(E), \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes E)) \\ &\cong \Gamma(Hom(E, \Lambda^2 T^*M \otimes E)) \\ &\cong \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes Hom(E, E)) \\ &= \Gamma(\Lambda^2 T^*M \otimes End(E)). \end{aligned}$$

Somit ist F ein Schnitt in dem Bündel $\Lambda^2 T^*M \otimes End(E)$, also eine 2-Form mit Werten in dem Endomorphismenbündel $End(E)$ von E. Genauer gilt: da F_α die Werte in $\rho_*(\mathfrak{g})$ animmt, ist F eine 2-Form mit Werten in dem Unterbündel von $End(E)$, das als Standardfaser gerade $\rho_*(\mathfrak{g}) \subset End(V)$. Das Transformationsverhalten der lokalen Krümmungsformen überträgt sich natürlich von oben, und entspricht dem des Endomorphismenbündels (vergleiche Bemerkung 2.5 und Anhang)

$$F_\alpha = \rho(g_{\alpha\beta}) F_\beta \, \rho(g_{\alpha\beta})^{-1}.$$

Bemerkung: In den meisten Fällen handelt es sich bei der Gruppe G um eine Matrixgruppe. Deshalb wird im Folgenden für die Krümmung auf dem Prinzipalbündel ebenfalls die Bezeichnung F bzw. F_α und für den Zusammenhang A bzw. A_α benutzt. Ebenso wird auch die Darstellung ρ von G auf die Standardfaser V von E nicht mehr notiert, falls keine Verwirrung zu erwarten ist.

Beispiel: Die Krümmung einer zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit.

Man definiert auf einer Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang D einen Operator $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \to C^\infty M$ durch

$$R(X, Y, Z, \omega) = \omega(D_X(D_Y Z) - D_Y(D_X Z) - D_{[X,Y]} Z).$$

Dieser Operator ist C^∞-linear, also ein (3,1)-Tensor. In lokalen Koordinaten rechnet man für die Koeffizienten ${R_{mnk}}^j$ des Tensors R folgende Darstellung aus:

$$\begin{aligned} {R_{mnk}}^j &= R(e_m, e_n, e_k, dx^j) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma^j_{nk} - \frac{\partial}{\partial x^n} \Gamma^j_{mk} + \Gamma^j_{ml} \Gamma^l_{nk} - \Gamma^j_{nl} \Gamma^l_{mk} \\ &= (dA^j_k + A^j_l \wedge A^l_k)(e_m, e_n). \end{aligned}$$

Dabei sind die Bezeichnungen aus Kapitel 1.1 übernommen worden.

R heißt der Krümmungstensor der Mannigfaltigkeit M. Im Falle einer Riemannschen Mannigfaltigkeit mit dem Levi-Civita-Zusammenhang, weist er einige Symmetrien auf, die die Zahl der unabhängigen Komponenten deutlich verringern. Es gelten folgende Beziehungen (vgl. [So]) :

(1) $R_{mnkj} = R_{kjmn}$ mit $R_{mnkj} = g_{lj} R_{mnk}{}^{l}$

(2) $R_{mnkj} = -R_{nmkj} = -R_{mnjk}$

(3) $R_{mnk}{}^{j} + R_{kmn}{}^{j} + R_{nkm}{}^{j} = 0$

Das liefert im Fall der Dimension n eine Anzahl von $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ unabhängigen Komponenten (vgl. [Na]). Ist $n = 2$, so hat der Krümmungstensor nur einen relevanten Eintrag, etwa R_{1212}, und man kann das Theorema Egregium von Gauß beweisen (vgl [Re]), welches diesen Krümmungseintrag, der nur von der Metrik abhängt, mit der Gauß-Krümmung K in Verbindung bringt. Es gilt nämlich

$$K = \frac{R_{1212}}{\det(g_{ij})}.$$

3.2 Eichtransformationen

Unter einer Eichtransformation des Prinzipalbündels $P(M, \pi, G)$ versteht man einen äquivarianten, fasertreuen Diffeomorphismus von P auf sich selbst. Das bedeutet, dass die folgenden zwei Diagramme mit dem Diffeomorphismus f kommutieren.

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f} & P \\ \pi\downarrow & & \downarrow\pi \\ M & = & M \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} P \times G & \xrightarrow{f \times id} & P \times G \\ R\downarrow & & \downarrow R \\ P & \xrightarrow{f} & P \end{array}$$

Für $z \in P$ und $g \in G$ heißt das $\pi \circ f(z) = \pi(z)$ und $f(zg) = f(z)g$.

In einer lokalen Karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ entspricht die Abbildung f einer G-wertigen Funktion, denn eingeschränkt auf die Faser $\pi^{-1}(x) \subset P$ ergibt sich die Abbildung $f_{\alpha,x} : G \to G$ aus

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(x) & \xrightarrow{f} & \pi^{-1}(x) \\ \varphi_{\alpha,x}\downarrow & & \downarrow\varphi_{\alpha,x} \\ G & \xrightarrow{f_{\alpha,x}} & G \end{array}$$

zu $f_{\alpha,x}(g) = \varphi_{\alpha,x} \circ f \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}(g)$.
Wegen der Äquivarianz von f gilt für $g, h \in G$:

$$\begin{aligned} f_{\alpha,x}(hg) &= \varphi_{\alpha,x} \circ f \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}(hg) = \varphi_{\alpha,x} \circ f \circ R_g \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}(h) \\ &= \varphi_{\alpha,x} \circ R_g \circ f \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}(h) = r_g \circ \varphi_{\alpha,x} \circ f \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}(h) \\ &= f_{\alpha,x}(h)g. \end{aligned}$$

Speziell für $h = e$ gilt für alle g aus G

$$f_{\alpha,x}(g) = f_{\alpha,x}(eg) = f_{\alpha,x}(e)g.$$

Setzt man $f_\alpha(x) = f_{\alpha,x}(e)$, so hat man die G-wertige Funktion $f_\alpha : U_\alpha \to G$ gefunden. Das Transformationsverhalten dieser lokalen Funktionen ist gegeben durch

$$f_\alpha = g_{\alpha\beta}\, f_\beta\, g_{\alpha\beta}^{-1},$$

denn

$$\begin{aligned} f_\alpha(x) &= f_{\alpha,x}(e) = \varphi_{\alpha,x} \circ f \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}(e) \\ &= \varphi_{\alpha,x} \circ \varphi_{\beta,x}^{-1} \circ \varphi_{\beta,x} \circ f \circ \varphi_{\beta,x}^{-1} \circ \varphi_{\beta,x} \circ \varphi_{\alpha,x}^{-1}(e) \\ &= g_{\alpha\beta}(x)\, f_\beta(x)\, g_{\alpha\beta}^{-1}(x). \end{aligned}$$

Die Eichtransformation f läßt sich wegen dieser Eigenschaften als Schnitt in dem Bündel $P \times_{aut} G$ interpretieren. Dabei ist $aut : G \times G \to G$ die Darstellung von G auf sich selbst, die für $g \in G$ durch die Automorphismen $aut_g(h) = ghg^{-1}$ geliefert wird.

Die Verknüpfung zweier Eichtransformationen, das Inverse einer Eichtransformation und die Identität sind ebenfalls Eichtransformationen (lokal sieht die Verknüpfung aus wie die punktweise Multiplikation der entsprechenden Funktionen). Damit bilden sie eine Gruppe $\mathcal{G}$, die so genannte Eichgruppe von P.

Auf dem Niveau eines zu P assoziierten Vektorbündels $E = P \times_\rho V$, ist eine Eichtransformation ein G-Bündelisomorphismus f. Das heißt, f ist ein fasertreuer Diffeomorphismus, der auf den Fasern Isomorphismen induziert. Ähnliche Rechnungen wie oben zeigen, dass f in diesem Fall lokal eine Abbildung $f_\alpha : U_\alpha \to \rho(G) \subset End(V)$ ist, dabei spiegelt die Einschränkung des Bildes gerade die Eigenschaft von f, ein G-Bündelisomorphismus zu sein, wider. Das Transformationsverhalten ist ebenfalls das Gleiche, nämlich $f_\alpha = g_{\alpha\beta}\, f_\beta\, g_{\alpha\beta}^{-1}$, so dass man f hier interpretieren kann als Schnitt in dem Bündel $G_E \subset End(E)$, dessen Faser über $x \in M$ die Menge der G-Isomorphismen von $\pi_E^{-1}(x)$ ist.

Die Eichgruppe $\mathcal{G}$ operiert auf der Menge der Zusammenhänge $\mathcal{A}$. Wie dies geschieht, zeigt der

Satz 3.4. *Sei $P(M,\pi,G)$ ein Prinzipalbündel mit Eichgruppe $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}$ operiert auf der Menge $\mathcal{A}$ der Zusammenhänge auf P durch*

$$\mathcal{G}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}\quad \textit{mit}\quad (f,A)\mapsto A^f.$$

Dabei ist A^f gegeben durch seine lokale Darstellung $(A^f)_\alpha = f_\alpha df_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1}$.

Beweis. Um zu zeigen, dass diese lokale Definition wirklich einen Zusammenhang liefert, muß man das richtige Verhalten bei einem Kartenwechsel nachweisen. Es gilt

$$\begin{aligned}(A^f)_\alpha &= f_\alpha df_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1}\\
&= (g_{\alpha\beta}f_\beta g_{\alpha\beta}^{-1})d(g_{\alpha\beta}f_\beta g_{\alpha\beta}^{-1})^{-1}\\
&\quad + (g_{\alpha\beta}f_\beta g_{\alpha\beta}^{-1})(g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1})(g_{\alpha\beta}f_\beta g_{\alpha\beta}^{-1})^{-1}\\
&= g_{\alpha\beta}f_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}f_\beta^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}f_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}df_\beta^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1}\\
&\quad + g_{\alpha\beta}f_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}f_\beta^{-1}dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}f_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}f_\beta^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1}\\
&\quad + g_{\alpha\beta}f_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}A_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}f_\beta^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1}\\
&= g_{\alpha\beta}f_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}f_\beta^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}f_\beta df_\beta^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1}\\
&\quad + g_{\alpha\beta}f_\beta dg_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta}f_\beta^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}f_\beta A_\beta f_\beta^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1}\\
&= g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}(f_\beta df_\beta^{-1} + f_\beta A_\beta f_\beta^{-1})g_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}f_\beta(g_{\alpha\beta}^{-1}dg_{\alpha\beta}\\
&\quad + dg_{\alpha\beta}^{-1}g_{\alpha\beta})f_\beta^{-1}g_{\alpha\beta}^{-1}\\
&= g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}(f_\beta df_\beta^{-1} + f_\beta A_\beta f_\beta^{-1})g_{\alpha\beta}^{-1}\\
&= g_{\alpha\beta}dg_{\alpha\beta}^{-1} + g_{\alpha\beta}(A^f)_\beta g_{\alpha\beta}^{-1}.\end{aligned}$$

Somit erfüllen die lokalen Formen die gewünschte Transformationsregel, und mit A^f hat man einen neuen Zusammenhang auf P. □

Durch die Operation der Eichgruppe $\mathcal{G}$ auf die Menge der Zusammenhänge $\mathcal{A}$, wird durch ein Element $f\in\mathcal{G}$ auch die Krümmung transformiert. Und zwar gilt für die Krümmung Ω^f zum Zusammenhang A^f

$$(\Omega^f)_\alpha = f_\alpha\Omega_\alpha f_\alpha^{-1}.$$

Das rechnet man ebenfalls direkt aus, denn

$$\begin{aligned}(\Omega^f)_\alpha &= (DA^f)_\alpha = d(A^f)_\alpha + (A^f)_\alpha\wedge(A^f)_\alpha\\
&= d(f_\alpha df_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1}) + (f_\alpha df_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1})\wedge(f_\alpha df_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1})\\
&= df_\alpha\wedge df_\alpha^{-1} + df_\alpha\wedge A_\alpha f_\alpha^{-1} + f_\alpha dA_\alpha f_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha\wedge df_\alpha^{-1}\\
&\quad + f_\alpha df_\alpha^{-1}\wedge f_\alpha df_\alpha^{-1} + f_\alpha df_\alpha^{-1}\wedge f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1}\wedge f_\alpha df_\alpha^{-1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1} \wedge f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1} \\
&= df_\alpha \wedge df_\alpha^{-1} + df_\alpha \wedge A_\alpha f_\alpha^{-1} + f_\alpha dA_\alpha f_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha \wedge df_\alpha^{-1} \\
&\quad - f_\alpha f_\alpha^{-1} df_\alpha \wedge df_\alpha^{-1} - f_\alpha f_\alpha^{-1} df_\alpha \wedge A_\alpha f_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha \wedge df_\alpha^{-1} \\
&\quad + f_\alpha A_\alpha \wedge A_\alpha f_\alpha^{-1} \\
&= f_\alpha dA_\alpha f_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha \wedge A_\alpha f_\alpha^{-1} = f_\alpha (dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha) f_\alpha^{-1} \\
&= f_\alpha \Omega_\alpha f_\alpha^{-1}.
\end{aligned}
$$

Man kann ebenfalls die Wirkung einer Eichtransformation auf die kovariante Ableitung D des Zusammenhangs A untersuchen. Dann gilt für den transformierten Operator D^f in lokalen Koordinaten:

$$
\begin{aligned}
(D^f s)_\alpha &= ds_\alpha + (A^f)_\alpha s_\alpha = ds_\alpha + (f_\alpha df_\alpha^{-1} + f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1}) s_\alpha \\
&= f_\alpha f_\alpha^{-1} ds_\alpha + f_\alpha df_\alpha^{-1} s_\alpha + f_\alpha A_\alpha f_\alpha^{-1} s_\alpha \\
&= f_\alpha (d(f_\alpha^{-1} s_\alpha) + A_\alpha f_\alpha^{-1} s_\alpha) \\
&= f_\alpha (d + A_\alpha)(f_\alpha^{-1} s_\alpha) = f_\alpha D(f_\alpha^{-1} s_\alpha).
\end{aligned}
$$

Man findet in diesem Sinne in der Literatur auch die Schreibweise $D^f = fDf^{-1}$ (vgl. [La]). Auf diese Notation wird in dieser Arbeit jedoch weitgehend zugunsten der aus Satz 3.4 verzichtet.

3.3 Der Hodge-Operator

Der nun zu definierende Hodge-, oder $*$-Operator spielt bei der Formulierung der Yang-Mills-Gleichungen eine wesentliche Rolle. Er hat im Falle vierdimensionaler Mannigfaltigkeiten spezielle Eigenschaften, die im später behandelte Fall der Grundmannigfaltigkeit S^4 ausgenutzt werden.

Betrachtet wird vorerst jedoch eine n-dimensionale, kompakte, orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand (etwa S^4) mit Riemannscher Metrik g. Der durch g vermittelte kanonische Bündelisomorphismus

$$\iota : TM \to T^*M \quad \text{mit} \quad \iota(v) = g_x(v, \_),\ v \in T_xM$$

induziert auf T^*M eine Riemannsche Metrik $g^{(1)}$ mit

$$g^{(1)}(\xi, \eta) = g(\iota^{-1}(\xi), \iota^{-1}(\eta)).$$

Ebenso bekommt man auch auf den äußeren Produkten $\Lambda^k T^*M$ Riemannsche Metriken $g^{(k)}$ per

$$g_x^{(k)}(\xi_x^1 \wedge \ldots \wedge \xi_x^k, \eta_x^1 \wedge .. \wedge \eta_x^k) = \det(g_x^{(1)}(\xi_x^i, \eta_x^j))$$

(vgl. [Sp]). In lokalen Koordinaten hat g in der Basis $\{e_i = \frac{\partial}{\partial x^i}\}$ die Gestalt $g(v^i e_i, w^j e_j) = g_{ij} v^i w^j$ mit $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Damit gilt dann $\iota(v^i e_i) = g_{ij} v^i dx^j$ und $\iota^{-1}(\xi_i dx^i) = g^{ij} \xi_i e_j$ mit $g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j$. Damit rechnet man schließlich

$$\begin{aligned} g^{(1)}(\xi_i dx^i, \eta_j dx^j) &= g(\iota^{-1}(\xi_i dx^i), \iota^{-1}(\eta_j dx^j)) = g(g^{ij}\xi_i e_j, g^{kl}\eta_k e_l) \\ &= g^{ij}\xi_i g^{kl}\eta_k g_{jl} = \delta^i_l g^{kl}\xi_i\eta_k = g^{kl}\xi_l\eta_k, \end{aligned}$$

sowie mit $\xi = \frac{1}{k!}\xi_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}$ und $\eta = \frac{1}{k!}\eta_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge .. \wedge dx^{j_k}$

$$\begin{aligned} g^{(k)}(\xi, \eta) &= g^{(k)}(\frac{1}{k!}\xi_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}, \frac{1}{k!}\eta_{j_1 \dots j_k} dx^{j_1} \wedge ... \wedge dx^{j_k}) \\ &= (\frac{1}{k!})^2 \xi_{i_1 \dots i_k}\eta_{j_1 \dots . j_k} \det(g^{i_m j_l}) \\ &= (\frac{1}{k!})^2 \xi_{i_1 \dots i_k}\eta_{j_1 \dots j_k} \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sign}(\sigma) g^{i_1 \sigma(j_1)} ... g^{i_k \sigma(j_k)} \\ &= (\frac{1}{k!})^2 \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sign}(\sigma))^2 \xi_{i_1 \dots i_k}\eta_{\sigma(j_1) \dots \sigma(j_k)} g^{i_1 \sigma(j_1)} ... g^{i_k \sigma(j_k)} \\ &= \frac{1}{k!} g^{i_1 j_1} ... g^{i_k j_k} \xi_{i_1 \dots i_k}\eta_{j_1 \dots j_k}. \end{aligned}$$

Im Folgenden werden alle diese Metriken mit g bezeichnet.

Der Rang des Bündels $\Lambda^k T^*M$ ist $\binom{n}{k}$, ebenso wie der von $\Lambda^{n-k} T^*M$.

Satz 3.5. *Es gibt zwischen den beiden Bündeln $\Lambda^k T^*M$ und $\Lambda^{n-k} T^*M$ einen Isomorphismus*

$$* : \Lambda^k T^*M \to \Lambda^{n-k} T^*M.$$

Dieser ist eindeutig durch die Eigenschaft $\xi \wedge *\eta = g_x(\xi, \eta) vol_x$ für $\xi, \eta \in \Lambda^k T^*_x M$ charakterisiert, wobei vol die eindeutig bestimmte Volumenform auf $\Lambda^n T^*M$ ist, die in lokalen Koordinaten die Gestalt $vol = \sqrt{det(g_{ij})} dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$ hat.

Definition 3.6. *Der gemäß Satz 3.5 definierte Isomorphismus heißt $*$- oder Hodge-Operator.*

Da in den obigen Konstruktionen alles differenzierbar von x abhängt, kann man diese punktweise auf Schnitte erweitern und man erhält Abbildungen

$$g : \Omega^k \times \Omega^k \to C^\infty \quad \text{und} \quad * : \Omega^k \to \Omega^{n-k}.$$

Lokal hat der $*$-Operator die folgende Darstellung.

Bemerkung 3.7. *Für $\eta = \dfrac{1}{k!}\eta_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}$ ist*

$$*\eta = \frac{\sqrt{det(g_{ij})}}{(n-k)!k!} g^{i_1 j_1} ... g^{i_k j_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k l_{k+1} \dots l_n} \eta_{j_1 \dots j_k} dx^{l_{k+1}} \wedge .. \wedge dx^{l_n}.$$

Beweis. (Bemerkung 3.7) Für alle $\xi = \frac{1}{k!}\xi_{i_1...i_k} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k}$ ist per Definition $\xi \wedge *\eta = g(\xi, \eta)vol$. Die rechte Seite sieht in Koordinaten wie folgt aus:

$$g(\xi, \eta)vol = \frac{1}{k!} g^{i_1 j_1} ... g^{i_k j_k} \xi_{i_1...i_k} \eta_{j_1...j_k} vol.$$

Mit der Darstellung $*\eta = \frac{1}{(n-k)!}\tilde{\eta}_{j_{k+1}...j_n} dx^{j_{k+1}} \wedge ... \wedge dx^{j_n}$ liest man die linke Seite als:

$$\begin{aligned}
\xi \wedge *\eta &= \frac{1}{k!(n-k)!}\xi_{i_1...i_k}\tilde{\eta}_{j_{k+1}...j_n} dx^{i_1} \wedge ... \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_{k+1}} \wedge ... \wedge dx^{j_n} \\
&= \frac{\det(g_{ij})}{k!(n-k)!}\xi_{i_1...i_k}\tilde{\eta}_{j_{k+1}...j_n}\varepsilon^{i_1...i_k j_{k+1}...j_n} dx^1 \wedge .. \wedge dx^n \\
&= \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{k!(n-k)!}\xi_{i_1...i_k}\tilde{\eta}_{j_{k+1}...j_n}\varepsilon^{i_1...i_k j_{k+1}...j_n} vol.
\end{aligned}$$

Das liefert durch Gleichsetzen beider Seiten für $\xi_{i_1...i_k} = \varepsilon_{i_1...i_k l_{k+1}...l_n}$

$$\frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{k!(n-k)!}\tilde{\eta}_{j_{k+1}...j_n}\varepsilon_{i_1...i_k l_{k+1}...l_n}\varepsilon^{i_1...i_k j_{k+1}...j_n} = \frac{1}{k!} g^{i_1 j_1} ... g^{i_k j_k}\varepsilon_{i_1...i_k l_{k+1}...l_n}\eta,$$

und somit

$$\tilde{\eta}_{l_{k+1}...l_n} = \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{k!} g^{i_1 j_1} ... g^{i_k j_k}\varepsilon_{i_1...i_k l_{k+1}...l_n}\eta_{j_1...j_k}.$$

Dabei ist der total antisymmetrische Tensor ε benutzt worden, der durch

$$\varepsilon_{i_1...i_n} = \begin{cases} sign\begin{pmatrix} i_1...i_n \\ 1...n \end{pmatrix} & \text{für eine Permutation } (i_1, ..., i_n) \text{ von } (1, ..., n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Zwei in den Rechnungen benutzte Eigenschaften dieses Tensors, die man durch direktes Ausrechnen verifiziert, sind

$$\varepsilon^{i_1...i_n} = g^{i_1 j_1} ... g^{i_n j_n}\varepsilon_{j_1...j_n} = \frac{1}{\det(g_{ij})}\varepsilon_{i_1...i_n}$$

und damit auch

$$\xi_{j_{k+1}...j_n}\varepsilon^{i_1...i_k j_{k+1}...j_n}\varepsilon_{i_1...i_k l_{k+1}...l_n} = k!(n-k)!\frac{1}{\det(g_{ij})}\xi_{l_{k+1}...l_n}.$$

□

Beweis. (Satz 3.5) Durch die lokale Darstellung aus Bemerkung 3.7 ist für $\eta \in \Omega^k$ die Darstellung von $*\eta \in \Omega^{n-k}$ eindeutig bestimmt, und erfüllt per Konstruktion die definierende Eigenschaft aus dem Satz. □

Der $*$-Operator hat unter anderen noch drei interessante Eigenschaften, die zusammengefasst werden in dem folgenden

Satz 3.8. *Für den Hodge-Operator* $* : \Omega^k \to \Omega^{n-k}$ *gilt:*

(1) Für alle $\eta, \xi \in \Omega^k$ *gilt*
$$\xi \wedge *\eta = \eta \wedge *\xi$$

(2) $*$ *ist eine Isometrie, d.h.für alle* $\eta, \xi \in \Omega^k$ *ist*
$$g(*\eta, *\xi) = g(\eta, \xi)$$

(3) Das Quadrat des $*$*-Operators, ist eine Abbildung von* Ω^k *in sich und es gilt*
$$*^2 = (-1)^{k(n-k)} id$$

Beweis. (1) ist klar mit der definierenden Eigenschaft aus Satz 3.5
(2) Mit der lokalen Darstellung des Operators rechnet man für $\xi = \frac{1}{k!}\xi_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ und $\eta = \frac{1}{k!}\eta_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge .. \wedge dx^{i_k}$

$$\begin{aligned}
g(*\xi, *\eta) &= \frac{1}{(n-k)!} \frac{\left(\sqrt{\det(g_{ij})}\right)^2}{(k!)^2} g^{q_{k+1} l_{k+1}} \dots g^{q_n l_n} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_k j_k} \varepsilon_{i_1 \dots i_k l_{k+1} \dots l_n} \xi_{j_1 \dots j_k} \cdot \\
&\quad \cdot g^{m_1 p_1} \dots g^{m_k p_k} \varepsilon_{m_1 \dots m_k q_{k+1} \dots q_n} \eta_{p_1 \dots p_k} \\
&= \frac{\det(g_{ij})}{(n-k)!(k!)^2} g^{m_1 p_1} \dots g^{m_k p_k} \varepsilon^{j_1 \dots j_k q_{k+1} \dots q_n} \varepsilon_{m_1 \dots m_k q_{k+1} \dots q_n} \xi_{j_1 \dots j_k} \eta_{p_1 \dots p_k} \\
&= \frac{1}{k!} g^{m_1 p_1} \dots g^{m_k p_k} \xi_{m_1 \dots m_k} \eta_{p_1 \dots p_k} \\
&= g(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

(3) Wegen $\xi \wedge *\eta = g(\xi, \eta) vol$ für alle $\eta, \xi \in \Omega^k$, ist $*\eta$ ungleich null, falls dieses für η gilt. Denn angenommen η verschwindet nicht, aber es gilt $*\eta = 0$, dann ist $0 = \xi \wedge *\eta = g(\xi, \eta) vol$ für alle ξ, beziehungsweise $g(\xi, \eta) = 0$ für alle ξ. Das ist ein Widerspruch zur Definitheit von g.
Mit (2) sieht man sofort

$$\begin{aligned}
*\eta \wedge * * \eta &= g(*\eta, *\eta) vol = g(\eta, \eta) vol = \eta \wedge *\eta \\
&= (-1)^{k(n-k)} * \eta \wedge \eta
\end{aligned}$$

bzw. $*\eta \wedge (* * \eta - (-1)^{k(n-k)} \eta) = 0$ für alle $\eta \in \Omega^k$ und mit der obigen Feststellung dann
$$* * \eta - (-1)^{k(n-k)} \eta = 0,$$
was in (3) behauptet wurde. □

Ist die Dimension der Mannigfaltigkeit M $n = 2m$, also gerade, so bildet $*$ die mittlere äußere Potenz von T^*M in sich ab, und es gilt mit $* : \Lambda^m T^*M \to \Lambda^m T^*M$

dann $*^2 = (-1)^m$. Damit zerfällt das Bündel $\Lambda^m T^*M$ in die Summe zweier Unterbündel $\Lambda^m_+ T^*M$ und $\Lambda^m_- T^*M$, die jeweils Eigenräume zu den beiden Eigenwerten ± 1 (im Falle m gerade), bzw. $\pm i$ (im Falle m ungerade) sind. Entsprechend zerfällt auch Ω^m durch $*$ mit der Bezeichnung $\Omega^m_\pm = \Gamma(\Lambda^m_\pm T^*M)$ in die Summe

$$\Omega^m = \Omega^m_+ \oplus \Omega^m_-.$$

Tensoriert man die äußeren Potenzen mit einem Vektorbündel E über M, so kann man den $*$-Operator in naheliegender Weise erweitern. Dazu setzt man mit der gewohnten Bezeichnung $\Omega^k(E) = \Gamma(\Lambda^k T^*M \otimes E)$

$$* : \Omega^k(E) \to \Omega^{n-k}(E) \quad \text{mit} \quad *(\xi \otimes s) = *\xi \otimes s.$$

Bemerkung: Ist P ein G-Prinzipalbündel über der vierdimensionalen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M, so läßt sich $*$ auf die Krümmung F anwenden, da dies ein Element aus $\Omega^2(AdP)$ mit $AdP = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ ist. Das Ergebnis liegt wieder in $\Omega^2(AdP)$. Dabei ist wie immer $\mathfrak{g}$ die Liealgebra zu G.

Gibt es auf E ein inneres Produkt $h : E \times E \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ ist dabei der Grundkörper der Standardfaser), z.B. eine Riemannsche Metrik auf einem reellen oder eine hermitesche Form auf einem komplexen Bündel, so kann man die Abbildung $g : \Omega^k \times \Omega^k \to C^\infty$ erweitern zu $\tilde{g} : \Omega^k(E) \times \Omega^k(E) \to C^\infty$ durch $\tilde{g}(\xi \otimes s, \eta \otimes t)(x) = g(\xi, \eta)(x) h_x(s(x), t(x))$. Für diese Abbildung gilt der

Satz 3.9. *Ist (M, g) eine kompakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit ohne Rand, und E ein $\mathbb{K}$-Vektorbündel über M mit innerem Produkt h, so ist durch*

$$\langle\,.\,,\,.\,\rangle : \Omega^k(E) \times \Omega^k(E) \to \mathbb{K}$$
$$\langle S, T\rangle = \int_M \tilde{g}(S, T) vol$$

ein inneres Produkt definiert. Dabei ist $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ eine Riemannsche Metrik, bzw. eine positiv definite, hermitesche Form, wenn dies für h gilt. Ist $S = T$, so schreibt man $\|S\|^2 = \langle S, S\rangle$ und $|S|^2 = \tilde{g}(S, S) vol$, und $\|.\|$ ist in den speziellen Fällen eine Norm.

Beweis. Die Abbildung $\tilde{g}$ übernimmt als Tensorprodukt die Linearitätseigenschaften von g und h bezüglich des Grundkörpers. Wegen der $\mathbb{K}$-Linearität des Integrals, ist $\langle\,.\,,\,.\,\rangle$ ein inneres Produkt.

Ist h eine Riemannsche Metrik (bzw. eine positiv definite, hermitesche Form), so ist $\tilde{g}(T, T)$ für $T \neq 0$ eine positive Funktion, so dass das Integral nicht verschwindet. Damit ist dann $\|.\|$ in diesen Fällen auch eine Norm. □

Ist das innere Produkt h auf E nichtentartet, so wird - analog zum Kotangentialbündel - durch den kanonischen Isomorphismus ι ein inneres Produkt h auf E^* induziert. Auf das Tensorbündel $E \otimes E^*$ wird h durch $h(v \otimes \vartheta, w \otimes \chi) = h(v, w) h(\vartheta, \chi)$

erweitert. In einer lokalen lokalen Basis $\{e_i\}$ von E bzw. der dualen Basis $\{e^i\}$ von E^* bedeutet das mit $v = v^i e_i$, $w^i e_i$, $\vartheta = \vartheta_i e^i$, $\chi = \chi_i e^i$, $\phi = \phi^i{}_j e_i \otimes e^j$ und $\theta = \theta^i{}_j e_i \otimes e^j$ sowie $h_{ij} = h(e_i, e_j)$ und $h_{ik}h^{kj} = \delta_i^j$:

$$h(v,w) = h_{ij} v^i \bar{w}^j$$
$$h(\vartheta,\chi) = h^{ij} \vartheta_i \bar{\chi}_i$$
$$h(\phi,\theta) = h_{ik} h^{jl} \phi^i{}_j \bar{\theta}^k_l$$

Der natürliche Isomorphismus $E \otimes E^* \cong End(E)$, der lokal die Form $\phi^i{}_j e_i \otimes e^j \leftrightarrow$ Matrix $(\phi^i{}_j)$ hat, liefert dazu ebenfalls ein Produkt h auf $End(E)$ durch $h(\Phi,\Psi) = \mathrm{Spur}(\iota^{-1} \circ \Psi^* \circ \iota \circ \Phi)$. Wählt man die lokale Basis als orthonormiert bezüglich h, so ist $h^{ij} = h_{ij} = \delta^i_j$ und es gilt $h(\Phi,\Psi) = \mathrm{Spur}(\Psi^*\Phi)$.

Im Folgenden ist das Vektorbündel von der Form $E = P \times_{id} \mathbb{C}^n$, also ein zum $SU(n)$-Prinzipalbündel P assoziiertes Vektorbündel, und h eine hermitesche Form auf E. Dann hat man das Produkt h auf $End(E)$ und dieses liefert auf dem Unterbündel $\mathfrak{su}(n)$ mit $su(n) = \{A \in gl_n(\mathbb{C});\ A = -A^*,\ \mathrm{Spur}A = 0\}$ als Standardfaser (vgl. Kapitel 3.1) eine Riemannsche Metrik. Das heißt, dass h eingeschränkt auf $\mathfrak{su}(n)$ symmetrisch ist, denn es gilt

$$h(B,A) = \mathrm{Spur}(A^*B) = \mathrm{Spur}(BA^*) = \mathrm{Spur}(-B^*(-A)) = \mathrm{Spur}(B^*A) = h(A,B)\,.$$

Auf der Liealgebra $\mathfrak{g}$ zur Liegruppe G gibt es eine Bilinearform *kill*, die invariant gegenüber der Operation Ad von G auf $\mathfrak{g}$ ist. Diese heißt Killingform und sie berechnet sich für $A, B \in \mathfrak{g}$ zu

$$kill(A,B) = \mathrm{Spur}(ad_A \circ ad_B).$$

Im Falle der Gruppe $GL_n\mathbb{C}$ und der Algebra $gl_n\mathbb{C}$ heißt das für zwei Matrizen A und B $kill(A,B) = 2n\mathrm{Spur}(AB) - 2\mathrm{Spur}(A)\mathrm{Spur}(B)$, was sich für die Unteralgebra $su(n)$ zu $kill(A,B) = 2n\mathrm{Spur}(AB)$ reduziert. Man sieht sofort, dass $-kill(A,B) = -2n\mathrm{Spur}(AB) = 2n\mathrm{Spur}(A^*B)$ bis auf einen positiven Faktor der Bilinearform, die auf dem Endomorphismenbündel von $P \times_{id} \mathbb{C}^n$ induziert wurde, entspricht. Sie ist also symmetrisch und positiv definit und somit ein Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$.

Man erhält also in beiden Konzepten des Zusammenhangs bis auf einen konstanten Faktor die gleiche natürliche Struktur in den Bündeln, in denen die Krümmungen leben.

Schreibweise: Im Falle der Gruppe $SU(n)$ und dem Vektorbündel $E = P \times_{id} \mathbb{C}^n$ schreibt man für die in Satz 3.5 eingeführte Metrik mit $F, G \in \Omega^2(\mathfrak{su}(n))$

$$\langle F, G \rangle = -\int\limits_M \mathrm{Spur}(F \wedge *G),$$

und analog

$$|F|^2 = -\mathrm{Spur}(F \wedge *F) \quad \text{und} \quad \|F\|^2 = \int\limits_M |F|^2\,.$$

Dabei ist das Produkt als Matrixprodukt zu verstehen, und der $*$-Operator wirkt auf die Komponenten von F bzw. G. Dass die Schreibweise sinnvoll ist, zeigt die folgende kleine Rechnung:

Seien $F, G \in \Omega^k(\mathfrak{su}(n))$, also lokal k-Formen mit Werten in $su(n)$, nämlich: $F = (\zeta_{ij}) = \sum\limits_{ij} \zeta_{ij} E_{ij} = \sum\limits_{ij} \zeta_{ij} \otimes E_{ij}$ und $G = (\vartheta_{ij}) = \sum\limits_{ij} \vartheta_{ij} E_{ij} = \sum\limits_{ij} \vartheta_{ij} \otimes E_{ij}$ mit gewöhnlichen k-Formen ζ_{ij} und ϑ_{ij}, sowie $(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
\langle F, G \rangle &= \int\limits_M \tilde{g}(F,G) vol = \sum_{ijkl} \int\limits_M \tilde{g}(\zeta_{ij} \otimes E_{ij}, \vartheta_{kl} \otimes E_{kl}) vol \\
&= \sum_{ijkl} \int\limits_M \tilde{g}(\zeta_{ij}, \vartheta_{kl}) h(E_{ij}, E_{kl}) vol = -\sum_{ijkl} \int\limits_M \zeta_{ij} \wedge *\vartheta_{kl} \mathrm{Spur}(E_{ij} E_{kl}) \\
&= -\sum_{ijkl} \int\limits_M \zeta_{ij} \wedge *\vartheta_{kl} \mathrm{Spur}(\delta_{jk} E_{il}) = -\sum_{ijklm} \int\limits_M \zeta_{ij} \wedge *\vartheta_{kl} \delta_{jk} \delta_{im} \delta_{ml} \\
&= -\sum_{ij} \int\limits_M \zeta_{ij} \wedge *\vartheta_{ji} = -\int\limits_M \mathrm{Spur}(\sum_j \zeta_{ij} \wedge *\vartheta_{jk}) \\
&= -\int\limits_M \mathrm{Spur}((\zeta_{ij}) \wedge (*\vartheta_{ij})) = -\int\limits_M \mathrm{Spur}(F \wedge *G).
\end{aligned}
$$

Bezüglich dieses Skalarproduktes gibt es einen zur kovarianten Ableitung $D : \Omega^k(E) \to \Omega^{k+1}(E)$ adjungierten Operator $D^* : \Omega^{k+1}(E) \to \Omega^k(E)$ mit

$$
\langle DF, G \rangle = \langle F, D^* G \rangle .
$$

Zur Definition von D^* bemerkt man, dass für den $*$-Operator als Abbildung von $\Omega^k(E)$ nach $\Omega^{n-k}(E)$ $*^2 = (-1)^{k(n-k)} id$ gilt. Also folgt für das Inverse $*^{-1} = (-1)^{k(n-k)} * : \Omega^{n-k}(E) \to \Omega^k(E)$. Man betrachte das folgende Diagramm, in dem eine Abbildung $(-1)^{k+1} D^*$ so gewählt wird, dass es kommutiert.

$$
\begin{array}{ccc}
\Omega^{k+1}(E) & \xrightarrow{(-1)^{k+1} D^*} & \Omega^k(E) \\
\star \downarrow & & \downarrow \star \\
\Omega^{n-k-1}(E) & \xrightarrow{D} & \Omega^{n-k}(E)
\end{array}
$$

Also $D^* = (-1)^{k+1} *^{-1} D* = (-1)^{k+1+k(n-k)} * D* = (-1)^{nk+1} * D*$.

Damit gilt für $F \in \Omega^k(A)$ und $G \in \Omega^{k+1}(E)$

$$
\begin{aligned}
\langle DF, G \rangle - \langle F, D^* G \rangle &= -\int\limits_M (\mathrm{Spur}(DF \wedge *G) + \mathrm{Spur}(F \wedge *D^* G)) \\
&= -\int\limits_M \mathrm{Spur}(DF \wedge *G + (-1)^{k+1} F \wedge D * G))
\end{aligned}
$$

$$= -\int_M \mathrm{Spur}(DF \wedge *G - (-1)^k F \wedge D * G))$$
$$= -\int_M \mathrm{Spur}(D(F \wedge *G))$$
$$= -\int_M d\mathrm{Spur}(F \wedge *G) = 0.$$

Dabei gilt die vorletzte Gleichheit wegen

$$\begin{aligned}\mathrm{Spur}(DG) &= \mathrm{Spur}(dG + [A, G]) = \mathrm{Spur}(dG) + \mathrm{Spur}([A, G]) \\ &= \mathrm{Spur}(dG) = d\mathrm{Spur}G\end{aligned}$$

und da die Spur einer Lieklammer immer verschwindet, und die letzte Gleichheit wegen des Stokes´schen Satzes.

Wendet man sich nun dem in den folgenden Betrachtungen interessanten Fall $\mathrm{dim}M = 4$ und $G = SU(n)$ zu, so hat man bemerkt, dass der $*$-Operator $\Omega^2(\mathfrak{su}(n))$ in die Eigenräume zu den Eigenwerten ± 1 zerlegt, das heißt

$$\Omega^2(\mathfrak{su}(n)) = \Omega^2_+(\mathfrak{su}(n)) \oplus \Omega^2_-(\mathfrak{su}(n)).$$

Da die Eigenräume orthogonal bezüglich $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ sind – es gilt $\mathrm{Spur}(F_- \wedge *F_+) = \mathrm{Spur}(F_+ \wedge *F_-) = -\mathrm{Spur}(F_+ \wedge F_-) = -\mathrm{Spur}(F_- \wedge F_+) = -\mathrm{Spur}(F_- \wedge *F_+)$ – wird die Krümmung F in zwei senkrechte Anteile F_+ und F_- zerlegt, und es gilt

$$\|F\|^2 = \int_M |F_+|^2 + |F_-|^2 = \|F_+\|^2 + \|F_-\|^2 .$$

Wegen dieser Eigenschaften des $*$-Operators führt man noch folgende Sprechweise ein.

Definition 3.10. *Man nennt den zur Krümmung gehörigen Zusammenhang A selbstdual (bzw. anti-selbstdual), wenn für die Krümmung $*F = F$ (bzw. $*F = -F$) gilt.*

Bemerkung: Ist g in diesem Kapitel keine Riemannsche Metrik, sondern etwa die Lorenz-Metrik auf $\mathbb{R}^4$ mit Signatur $(-1, 1, 1, 1)$, so kann man den $*$-Operator ebenso definieren, nämlich über Bemerkung 3.7 mit $\sqrt{|\det(g_{ij})|}$ statt $\sqrt{\det(g_{ij})}$. Der Satz 3.5 behält seine Richtigkeit dann, wenn man die Definition der Volumenform $vol = \sqrt{|\det(g_{ij})|}dx^1 \wedge .. \wedge dx^n$ in diesem Fall übernimmt. Für das Quadrat von $*$ gilt dann $*^2 = (-1)^{k(n-k)+1}id$, und für den zu D adjungierten Operator $D^* = (-1)^{nk} * D *$. Natürlich ist die Bilinearform $\langle\, .\, ,\, .\,\rangle$ auch in diesem Fall erklärt, sie ist nur in der Regel nicht positiv definit.

3.4 Die Yang-Mills-Gleichung

Hermann Weyls Interpretation des Elektromagnetismus als $U(1)$-Eichtheorie, oder in der hier entwickelten Terminologie die Interpretation der elektromagnetischen Potentiale als Zusammenhänge in einem $U(1)$-Prinzipalbündel über $\mathbb{R}^{3,1} = (\mathbb{R}^4$, Lorentzmetrik), benötigt eine Lagrangedichte der Form $|iF|^2$, um als Feldgleichungen die Maxwell-Gleichungen zu bekommen. Dabei ist iF die Krümmung zum betrachteten Zusammenhang.

Für den $U(1)$-Zusammenhang schreibt man $ia \in \Omega^1(i\mathbb{R})$, die Liealgebra von $U(1)$ ist $u(1) = i\mathbb{R}$, und setzt noch $a = a_j dx^j$ mit $(a_0, ..., a_3) = (-V, A_1, A_2, A_3) = (-V, \vec{A})$ (dabei läuft j von 0 bis 3 und $(x_0, ..., x_3) = (t, x, y, z)$). Eine Eichtransformation ist hier eine Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to U(1)$, $f(x) = e^{-i\phi(x)}$, und da $U(1)$ abelsch ist, gilt $a^f = -ifdf^{-1} + faf^{-1} = a + d\phi$ und natürlich $F^f = fFf^{-1} = F$ für die Krümmung zu A. Man berechnet die Krümmung zu

$$iF \equiv \frac{i}{2} F_{kj} dx^k \wedge dx^j = iDa = ida + [ia, ia] = ida = i\frac{\partial a_j}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^j.$$

Es gilt $F_{kj} = -F_{jk} = \dfrac{\partial a_j}{\partial x^k} - \dfrac{\partial a_k}{\partial x^j}$. Setzt man noch $E_j = F_{j0}$ für $j = 1, 2, 3$ und $F_{jk} = B_l$ für $j, k, l \in \{1, 2, 3\}$ zyklisch, oder in Matrixschreibweise

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix},$$

so folgt

$$E_j = -\frac{\partial V}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^0} \quad \text{bzw.} \quad \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

und

$$B_l = \frac{\partial A_k}{\partial x^j} - \frac{\partial A_j}{\partial x^k} = (\text{rot}\vec{A})_l \text{ mit } j, k, l \text{ zyklisch} \quad \text{bzw.} \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}.$$

Man hat in der Gleichung $Da = F$ die klassischen Definitionen der Felder über das skalare elektrische Potential V und das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ zusammengefasst.

Benötigt wird, wie oben erwähnt, die Lagrangedichte $|F|^2$. Dabei wird vorausgesetzt, dass die behandelten Felder auf jeder Hyperfläche $\{x_0 = const.\}$ hinreichend schnell verschwinden, oder dort einen kompakten Träger haben. Um die Feldgleichungen zu bekommen, integriert man die Dichte $|F|^2$ über einen Bereich $K = [t_1, t_2] \times \mathbb{R}^3$. Dann variiert man den Zusammenhang a zu $a_\sigma = a + \sigma b$ mit $b \in \Omega^1$, wobei b in t_1 und t_2 verschwindet, und berechnet die Stellen, an denen $\mathcal{L}(a) = \int_K |F|^2$ stationär ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(a_\sigma) &= \int\limits_K |da_\sigma|^2 = \int\limits_K |da + \sigma db|^2 \\
&= \int\limits_K |da| + \sigma da \wedge *db + \sigma db \wedge *da + \sigma^2 |db|^2 \\
&= \int\limits_K |da| + 2\sigma da \wedge *db + \sigma^2 |db|^2 ,
\end{aligned}$$

und die stationären Stellen, sind genau die, an denen $\frac{d}{d\sigma}\, \mathcal{L}(a_\sigma)|_{\sigma=0}$ verschwindet. Dazu rechnet man

$$\frac{d}{d\sigma}\, \mathcal{L}(a_\sigma)|_{\sigma=0} = 2\int\limits_K da \wedge *db = 2\int\limits_K F \wedge *db = 2\int\limits_K d^* F \wedge *b = 0.$$

Da dies für beliebige b richtig sein soll, folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung die Feldgleichung $d^*F = 0$, was sich wegen der Proportionalität $d^* \propto *d*$ als $d * F = 0$ schreiben läßt. Mit der Identität von Bianchi hat man somit zwei Gleichungen, die die elektromagnetischen Felder beschreiben, nämlich

$$dF = 0 \quad \text{und} \quad d * F = 0.$$

Rechnet man in einer Orthonormalrahmung mit $g_{ij} = \delta_{ij}$ für $i,j = 1,2,3$ und $g_{0j} = -\delta_{0j}$ für $j = 0,1,2,3$, so ist $*F = \frac{1}{2}\tilde{F}_{kl} dx^k \wedge dx^l$ mit $\tilde{F}_{kl} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}F^{ij}$ und $F^{ij} = F_{ij}$ für $i,j = 1,2,3$ sowie $F^{0j} = -F_{0j}$ für $j = 0,1,2,3$. Damit kann man die Komponenten von $*F$ bestimmen, und in Matrixschreibweise ergibt sich

$$*F = \begin{pmatrix} 0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ -B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ -B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ -B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die zwei Feldgleichungen kann man dann auch mit diesen Bezeichnungen formulieren, und man erhält mit $dF = \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l = 0$ dann nach Sortieren der Koeffizienten für $(j,k,l) = (1,2,3)$

$$\frac{\partial F_{23}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x^2} + \frac{\partial F_{12}}{\partial x^3} = \frac{\partial B_1}{\partial x^1} + \frac{\partial B_2}{\partial x^2} + \frac{\partial B_3}{\partial x^3} = 0 \quad \text{bzw. } \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

und für $(j,k,l) = (0,1,2)$

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x^0} + \frac{\partial F_{20}}{\partial x^1} + \frac{\partial F_{01}}{\partial x^2} = \frac{\partial B_3}{\partial x^0} + \frac{\partial E_2}{\partial x^1} - \frac{\partial E_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{bzw. } (\mathrm{rot}\vec{E})_3 = -\frac{\partial B_3}{\partial t}$$

Analoge Rechnungen für die übrigen Komponenten von dF und $d * F$ liefern

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

sowie

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0 \quad \text{und} \quad \mathrm{rot}\vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Man sieht, dass sich hinter den beiden Feldgleichungen die klassischen Maxwellgleichungen verbergen.

Lange Zeit war die Möglichkeit der Formulierung des Elektromagnetismus als $U(1)$-Eichtheorie eher als zufällige Eigenschaft dieser Theorie betrachtet worden, und somit wurde ihr kaum Beachtung geschenkt. Außerdem schien sie, wegen der Eigenschaft, reine Phasenänderungen zu bewirken, eher eine quantenmechanische als eine elektromagnetische Eigenschaft zu sein.

Die Idee von C.N. Yang und R. L. Mills war es, diese bei der Theorie des Elektromagnetismus so erfolgreiche Lagrangedichte $\mathcal{L}(A)$ auf die Theorie der starken Wechselwirkung zu erweitern (vgl. [YM]). Die Symmetriegruppe, die den Isospin beschreibt (Heisenberg hatte lange vorher vorgeschlagen, Proton und Neutron als "up"- und "down"-Zustände eines abstrakten Spins zu beschreiben), ist hier $SU(2)$, und die Potentiale und Felder der starken Wechselwirkung wären somit Zusammenhänge und dazugehörige Krümmungen eines $SU(2)$-Prinzipalbündels über $\mathbb{R}^{3,1}$. Lokal handelt es sich bei den Potentialen also um 1-Formen mit Werten in $su(2)$, die sich unter einer Eichtransformation f gemäß $A^f = f df^{-1} + f A f^{-1}$ transformieren. Da die hier betrachtete Gruppe nicht kommutativ ist, vereinfacht sich die Gleichung in diesem Fall nicht.

Yang und Mills postulierten die Existenz von Potentialen (= Zusammenhänge), die die starke Wechselwirkung beschreiben, und deren Felder (= Krümmungen) sich aus der Lagrangedichte $|F|^2$ berechnen lassen. Der gleiche Variationsansatz wie in dem obigen Beispiel liefert die gleichen Feldgleichungen

$$DF = 0 \quad \text{und} \quad D * F = 0.$$

Bemerkung 3.11. *Die Lagrangedichte $|F|^2$ ist unabhängig von der gewählten Eichung. Das heißt für eine Eichtransformation f gilt $\left|F^f\right|^2 = |F|^2$*

Beweis. Die Behauptung rechnet man direkt aus:

$$\begin{aligned}\left|F^f\right|^2 &= -\mathrm{Spur}((fFf^{-1}) \wedge *(fFf^{-1})) = -\mathrm{Spur}(fF \wedge *Ff^{-1}) \\ &= -\mathrm{Spur}(f^{-1}fF \wedge *F) = -\mathrm{Spur}(F \wedge *F) = |F|^2\end{aligned}$$

□

Statt einer Mannigfaltigkeit mit einer Lorentzmetrik betrachtet man nun eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. So gelangt man dann zur folgenden

Definition 3.12. *Sei $P(M, \pi, SU(n))$ ein Prinzipalbündel über der kompakten, vierdimensionalen, Riemannschen Mannigfaltigkeit M und $\mathcal{A}$ die Menge der Zusammenhänge auf P. Dann ist das Yang-Mills-Funktional*

$$\mathcal{YM} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$$

definiert durch

$$\mathcal{YM}(A) = \int_M |F_A|^2 = \|F_A\|^2 .$$

Die folgende Komponentenschreibweise für das Yang-Mills-Funktional wird in der Physikliteratur oft bevorzugt (z.B. [At], [Na], [Ra]). Sie lautet mit $F = F_{kl} dx^k \wedge dx^l$

$$\begin{aligned}
\mathcal{YM}(A) = \|F_A\|^2 &= -\int \operatorname{Spur}(F \wedge *F) \\
&= -\frac{1}{4} \int \operatorname{Spur}(F_{kl}(*F)_{mn}) dx^k \wedge dx^l \wedge dx^m \wedge dx^n \\
&= -\frac{1}{4} \int \sum_{klmn} \operatorname{Spur}(F_{kl}(*F)_{mn}) \varepsilon_{klmn} d^4x \\
&= -\frac{1}{8} \int \sum_{klmnpq} \operatorname{Spur}(F_{kl} F_{pq} \varepsilon_{mnpq} \varepsilon_{klmn}) d^4x \\
&= -\frac{1}{2} \int \sum_{kl} \operatorname{Spur}(F_{kl} F_{kl}) d^4x \\
&= -\frac{1}{2} \int \operatorname{Spur}(F_{kl} F^{kl}) d^4x.
\end{aligned}$$

Wegen des einleitenden Beispiels und der vorigen Abschnitts sieht man sofort die Gültigkeit von

Satz 3.13. *Ist der Zusammenhang A auf P selbstdual oder anti-selbstdual, so macht A das Yang-Mills-Funktional stationär.*

Beweis. Die Variationsaufgabe aus dem Beispiel zeigt:

$$\mathcal{YM} \text{ stationär} \iff D * F_A = 0.$$

Dabei ist der Integrationsbereich nun ganz M, und es gilt mit $A_\sigma = A + \sigma B$

$$\frac{d}{d\sigma} \mathcal{YM}(A_\sigma)|_{\sigma=0} = 2 \langle D^* F, B \rangle .$$

Gemäß Definition 3.10 heißt A genau dann selbstdual (bzw. anti-selbstdual), wenn $*F_A = F_A$ ($*F_A = -F_A$). Ist dies der Fall, so folgt aus der Identität von Bianchi, $DF_A = 0$, sofort $D * F_A = 0$, also die Behauptung. $\square$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen der Variationsaufgabe $\mathcal{YM}(A) \stackrel{!}{=}$ stationär, $D * F_A = 0$, heißen Yang-Mills-Gleichungen. Erfüllt F_A diese, so nennt man F_A Yang-Mills-Feld, und den zugehörigen Zusammenhang A Yang-Mills-Potential. Gemäß Bemerkung 3.11 ist das Yang-Mills-Funktional unabhängig von der gewählten Eichung. Es gilt also für f aus der Eichgruppe $\mathcal{G}$ von P

$$\mathcal{YM}(A^f) = \mathcal{YM}(A).$$

Man kann das Funktional also auf der Quotientenmenge der Klassen eichäquivalenter Zusammenhänge, $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$, erklären. Man schreibt $\mathcal{B} \ni [A] = \left\{A^f; f \in \mathcal{G}\right\}$. Wegen Satz 3.13 ist auch die folgende Menge noch von Bedeutung. Sie wird speziell im nächsten Kapitel Gegenstand der Untersuchung sein.

Definition 3.14. *Die Menge der Klassen eichäquivalenter, selbstdualer Zusammenhänge auf P*

$$\mathcal{M} = \{[A] \in \mathcal{B}; A \textit{ selbstdual}\}$$

heißt der Modulraum des Prinzipalbündels P.
Ist $M = S^4$ und $G = SU(2)$, so nennt man die selbstdualen Zusammenhänge Instantons.

Chapter 4

Die Struktur des Modulraums

Gegenstand der Untersuchungen in diesem Kapitel wird der Modulraum $\mathcal{M}$ der Klassen eichäquivalenter, selbstdualer Zusammenhänge eines $SU(2)$-Prinzipalbündels über der Sphäre S^4 sein, also der Modulraum der Instantons.

Im ersten Teil wird dazu ein Satz von Atiyah, Hitchin und Singer verwendet, um die Dimension der Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ zu berechnen. Dieser Satz wird zitiert, und nach Überprüfung der Voraussetzungen für den Spezialfall formuliert. Der zweite Teil widmet sich dann der expliziten Berechnung der Instantons. Das heißt, dass eine lokale Parametrisierung der Räume $\mathcal{M}_k$ geliefert wird.

4.1 Allgemeine Betrachtungen

Wie angekündigt, wird zuerst der oben genannte Satz zitiert. Für einen Beweis dieses Satzes sei auf die Arbeit von Atiyah, Hitchin und Singer (vgl. [AHS]) und auf den Artikel von Thomas Friedrich (in [Fr]) verwiesen.

Satz 4.1. *Der Modulraum $\mathcal{M}$ der irreduziblen, selbstdualen Zusammenhänge eines Prinzipalbündels P mit halbeinfacher, kompakter Strukturgruppe G über der selbstdualen, kompakten, vierdimensionalen, Riemannschen Mannigfaltigkeit M mit positiver, skalarer Krümmung $\mathcal{R}$ ist entweder leer, oder eine Mannigfaltigkeit der Dimension*

$$dim\mathcal{M} = \int_M p_1(AdP^{\mathbb{C}}) - \frac{1}{2} dimG(\chi(M) - \sigma(M)).$$

In der Formel zur Berechnung der Dimension des Modulraums ist $p_1(AdP^{\mathbb{C}})$ die erste Pontrjaginklasse des komplexifizierten adjungierten Bündels von P, $\chi(M)$ die Eulercharakteristik und $\sigma(M)$ die Signatur von M. Zur Erläuterung dieser Begriffe vergleiche man die Ausführungen im Anhang.

Auffällig in der Formulierung von Satz 4.1 ist die Einschränkung des Modulraums auf irreduzible Zusammenhänge. Dabei heißt ein Zusammenhang A auf dem G-Prinzipalbündel P reduzibel, wenn er seine Werte in einer Lieunteralgebra $\mathfrak{h}$ der Liealgebra $\mathfrak{g}$ von G annimmt. A liefert dann einen Zusammenhang in einem reduziertem Bündel von P, das ist ein H-Prinzipalbündel über S^4, mit einer Lieuntergruppe H von G (vgl. [KN]).

Diese Einschränkung des Modulraums ist notwendig, da die reduziblen Zusammenhänge Singularitäten auf $\mathcal{M}$ liefern. Man zeigt, dass diese Singularitäten verhältnismäßig "harmlos" sind. Es gibt nämlich zu jeder dieser Singularitäten eine Umgebung in $\mathcal{M}$, die diffeomorph zu einem Kegel über $P_2\mathbb{C}$ ist (vgl. [FU]).

Im weiteren hier untersuchten Fall wird diese Einschränkung zu einer leeren Bedingung, denn es gilt der Satz

Satz 4.2. *Auf einem nichttrivialen $SU(2)$-Prinzipalbündel über S^4 gibt es keine reduziblen Zusammenhänge.*

Beweis. Sei P ein nichttriviales $SU(2)$-Prinzipalbündel über $M = S^4$, A ein reduzibler, nichttrivialer Zusammenhang auf P und $E = P \times_{id} \mathbb{C}^2$ ein zu P assoziiertes Vektorbündel. Da A reduzibel ist, liegen die Werte in der zu $u(1)$ isomorphen Unteralgebra $\widetilde{u(1)} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ von $su(2)$. Die zu dieser Algebra gehörige und zu $U(1)$ diffeomorphe, zusammenhängende Lieuntergruppe von $SU(2)$ ist $\widetilde{U(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{pmatrix}; z \in U(1) \right\}$. Wegen der Reduzibilität des Zusammenhangs sind die Übergangsfunktionen von P aus $\widetilde{U(1)}$, und E spaltet deshalb in die Summe zweier Geradenbündel $L \oplus K$ über S^4 (sogar $L \oplus L^{-1}$, damit $c_1(E) = 0$). Die komplexen Geradenbündel über M werden durch $H^2(M, \mathbb{Z})$ charakterisiert, und wegen $H^2(S^4, \mathbb{Z}) = 0$ sind L und K triviale Bündel. Somit ist also E und schließlich auch P trivial, was einen Widerspruch zur Annahme liefert. $\square$

Um zu sehen, dass S^4 die Voraussetzungen des Satzes 4.1 erfüllt, sind einige Vorbetrachtungen notwendig.

Die Krümmung R einer vierdimensionalen, Riemannschen Mannigfaltigkeit M zum Levi-Civita-Zusammenhang ist ein Schnitt in dem Unterbündel von $\Lambda^2 T^*M \otimes End(T^*M)$ mit Standardfaser $so(4) = \left\{A = -A^T \in gl_4\mathbb{R}\right\}$. Wegen der Isomorphie $End(T^*M) \cong T^*M \otimes TM = T_1^1 M$ kann man die Krümmung als 2-Form mit Werten in den $(1,1)$-Tensoren auf M auffassen. Lokal kann man also schreiben:

$$R = \frac{1}{2}\left(R_{ijk}{}^{l} e^k \otimes e_l\right) e^i \wedge e^j.$$

Dabei ist $\{e_i\}$ eine lokale Orthonormalrahmung von TM und $\left\{e^i\right\}$ die duale Orthonormalrahmung von T^*M. Damit gilt dann natürlich

$$g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij} \quad \text{und} \quad R_{ijkl} = R_{ijk}{}^{m} g_{ml} = R_{ijk}{}^{l}.$$

Nutzt man die Symmetrien dieses Tensors gemäß des abschließenden Beispiels aus Abschnitt 3.1 aus, so ist

$$R = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}R_{ijkl}e^k \wedge e^l\right) e^i \wedge e^j.$$

Die Krümmung ist somit eine 2-Form mit Werten in den 2-Formen. Mit Hilfe dieses Tensors werden noch neue Größen eingeführt, die aus R durch Kontraktion entstehen.

Bezeichnung: Der Ricci-Tensor Ric von M ist für $X, Y \in \Gamma(TM)$ definiert als Spur des Endomorphismus von TM, der gegeben ist durch (vgl. Abschnitt 3.1)

$$Z \mapsto R(X, Z, Y, .) = D_X(D_Z Y) - D_Z(D_X Y) - D_{[X,Z]}Y.$$

In lokalen Koordinaten gilt

$$Ric(X, Y) = R(X, e_k, Y, e^k) \quad \text{bzw.} \quad R_{ij} = Ric(e_i, e_j) = R_{ikj}{}^k.$$

Wie man mit Hilfe der lokalen Darstellung leicht überprüft, ist der Ricci-Tensor symmetrisch.

Die skalare Krümmung $\mathcal{R}$ von M ist dann definiert durch die negative Spur des durch Ric vermittelten Endomorphismus von TM, gegeben durch $Z \mapsto \iota^{-1}(Ric(., Z))$. Dabei ist $\iota : TM \to T^*M$ der durch die Metrik vermittelte Isomorphismus gemäß Abschnitt 3.3. In lokalen Koordinaten gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= -\iota^{-1}(Ric(., e_i))(e^i) = -\iota^{-1}(R_{ji}e^j)(e^i)\\ &= -R_{ji}g^{jk}e_k(e^i) = -R_{ji}g^{ji} = -R_i{}^i = -R_{ik}{}^{ik}.\end{aligned}$$

Abgesehen von diesen Krümmungsgrößen legt die Interpretation der Krüm- mung als 2-Form mit Werten in den 2-Formen die Einführung der Abbildung

$$\tilde{R} : \Lambda^2 T^*M \to \Lambda^2 T^*M \quad \text{mit} \quad \tilde{R}(e^i \wedge e^j) = R_{ijkl}e^k \wedge e^l$$

nahe. Diese Abbildung ist selbstadjungiert, denn es gilt für alle i, j, m, n

$$\begin{aligned}g(e^i \wedge e^j, \tilde{R}(e^m \wedge e^n)) &= g(e^i \wedge e^j, R_{mnkl}e^k \wedge e^l) = R_{mnkl}g(e^i \wedge e^j, e^k \wedge e^l)\\ &= R_{mnkl}(\delta^{ik}\delta^{jl} - \delta^{jk}\delta^{il}) = R_{mnij} - R_{nmji}\\ &= 2R_{mnij} = 2R_{ijmn}\\ &= R_{ijmn} - R_{ijnm} = R_{ijkl}(\delta^{mk}\delta^{nl} - \delta^{nk}\delta^{ml})\\ &= R_{ijkl}g(e^k \wedge e^l, e^m \wedge e^n) = g(R_{ijkl}e^k \wedge e^l, e^m \wedge e^n)\\ &= g(\tilde{R}(e^i \wedge e^j), e^m \wedge e^n).\end{aligned}$$

Das Bündel $\Lambda^2 T^*M$ wird durch den Hodge-Operator $*$ gemäß Abschnitt 3.3 in die Summe zweier Unterbündel zerlegt, die jeweils Eigenräume von $*$ zu den Eigenwerten $+1$ und -1 sind.

$$\Lambda^2 T^*M = \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-.$$

Lokal gilt für die obigen Orthonormalrahmungen $*(e^i \wedge e^j) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}e^k \wedge e^l$ und somit ist

$$\Lambda^2_\pm \;=\; \mathrm{span}\{f^1_\pm, f^2_\pm, f^3_\pm\}$$

mit

$$\begin{aligned} f^1_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 \wedge e^2 \pm e^3 \wedge e^4), \\ f^2_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 \wedge e^3 \mp e^2 \wedge e^4) \\ f^3_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^1 \wedge e^4 \pm e^2 \wedge e^3). \end{aligned}$$

Für $\tilde{R}$ hat man bezüglich dieser Basis die Zerlegung

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} A_+ & B \\ B^* & A_- \end{pmatrix} : \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_- \to \Lambda^2_+ \oplus \Lambda^2_-$$

mit $B : \Lambda^2_- \to \Lambda^2_+$, $B^* : \Lambda^2_+ \to \Lambda^2_-$ und $A_\pm = A^*_\pm : \Lambda^2_\pm \to \Lambda^2_\pm$.

Eine direkte Rechnung zeigt, dass die Spur von $A_\pm$ sich zu $Spur A_\pm = -\frac{1}{4}\mathcal{R}$ ergibt. Nun führt man noch die spurfreien Anteile $W_\pm = A_\pm + \frac{1}{12}\mathcal{R}$ ein, und die Zerlegung von $\tilde{R}$ schreibt sich als

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{12}\mathcal{R} = W + B - \frac{1}{12}\mathcal{R}.$$

Das macht den Weg frei zur

Definition 4.3. *Die Riemannsche Mannigfaltigkeit M heißt selbstdual, wenn in der obigen Darstellung W_- verschwindet.*

Insbesondere gilt die folgende Beziehung zwischen der Selbstdualität der Mannigfaltigkeit M und der Selbstdualität des Levi-Civita-Zusammenhangs:

Bemerkung 4.4. *Der Levi-Civita-Zusammenhang auf M ist genau dann selbstdual, wenn in der obigen Darstellung W_-, B und $\mathcal{R}$ verschwinden.*

Beweis. Der Levi-Civita-Zusammenhang ist selbstdual, wenn für die Krümmung

$R = *R$ gilt. Dabei wirkt $*$ auf die Koeffizienten $F_{ij} = R_{ijkl}e^k \wedge e^l$ und es gilt

$$\begin{aligned}
*R = R \Leftrightarrow F_{ij} &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}g^{mk}g^{nl}F_{mn} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\delta^{mk}\delta^{nl}F_{mn} \\
\Leftrightarrow R_{ijkl}e^k \wedge e^l &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\delta^{mk}\delta^{nl}R_{mnpq}e^p \wedge e^q \\
\Leftrightarrow \tilde{R}(e^i \wedge e^j) &= \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\delta^k_m\delta^l_n\tilde{R}(e^m \wedge e^n) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}\tilde{R}(e^k \wedge e^l) \\
\Leftrightarrow \tilde{R}(e^i \wedge e^j &- \frac{1}{2}\varepsilon_{ijkl}e^k \wedge e^l) = 0 \\
\Leftrightarrow \tilde{R}|_{\Lambda^2_-} &= 0
\end{aligned}$$

Die Rückrichtung folgt sofort aus $\tilde{R}|_{\Lambda^2_-} = W_- + B - \frac{1}{12}\mathcal{R}$. Die andere Richtung rechnet man direkt nach. Die durch $*R = R$ neu hinzugewonnenen Symmetriebedingungen an die R_{ijkl} liefern nach Berechnung der Matrizen in der Basis $\{f^1_\pm, f^2_\pm, f^3_\pm\}$sofort $B = 0$ und $\mathcal{R} = 0$, so dass $W_- = 0$ zwingend folgt. □

Es folgt eine Bezeichnung, die es oft ermöglicht, die Selbstdualität einer Mannigfaltigkeit ohne explizite Berechnung von W_- zu überprüfen.

Bezeichnung: Der Weyl-Tensor der Riemannschen Mannigfaltigkeit M ist definiert durch

$$W_{kl}{}^{ij} = R_{kl}{}^{ij} - \frac{1}{2}(\delta^i_k R^j_l - \delta^i_l R^j_k - \delta^j_k R^i_l + \delta^j_l R^i_k) + \frac{\mathcal{R}}{6}(\delta^i_k\delta^j_l - \delta^i_l\delta^j_k).$$

Man überzeugt sich schnell davon, dass dieser Tensor die gleichen Symmetrien erfüllt, wie der Krümmungstensor (vergleiche das Beispiel aus Abschnit 3.1). Der Weyl-Tensor ist konform invariant. Das heißt, ändert man die Metrik g mit einer Funktion σ zu $\hat{g} = e^{2\sigma}g$, so gilt $\hat{W}_{ijk}{}^l = W_{ijk}{}^l$ [vgl. [We1]].

Interpretiert man den Weyl-Tensor als Abbildung $\tilde{W}$ von $\Lambda^2 T^*M$ in sich durch

$$\tilde{W}(e^i \wedge e^j) = W_{ijkl}e^k \wedge e^l,$$

so zeigt man wieder durch direktes Ausrechnen der Matrix zu $\tilde{W}$ in der Basis $\{f^1_\pm, f^2_\pm, f^3_\pm\}$ die folgende

Bemerkung 4.5. *Mit der gerade eingeführten Bezeichnung und der obigen Darstellung von $\tilde{R}$ gilt* $\tilde{W} = \begin{pmatrix} W_+ & 0 \\ 0 & W_- \end{pmatrix}$.

Die Sphäre S^4 erfüllt nun die Voraussetzungen des Satzes 4.1, denn es gilt der

Satz 4.6. *Für die vierdimensionale Sphäre gilt*

1) *S^4 ist eine kompakte Riemannsche Mannigfaligkeit.*

2) S^4 *ist selbstdual.*

3) S^4 *hat positive skalare Krümmung.*

Beweis. S^4 ist als beschränkte abgeschlossenen Menge im $\mathbb{R}^5$ natürlich kompakt. Versehen mit den Karten der stereographischen Projektion

$$\begin{aligned} &\varphi_\pm : \mathbb{R}^4 \to S^4 \setminus \{P_\pm\} \quad \text{mit} \quad P_\pm = (0,0,0,0,\pm 1) \\ &\varphi_\pm : x \mapsto \frac{(2x, \pm(1-|x|^2)}{1+|x|^2} \end{aligned}$$

ergeben sich die Koeffizienten der Metrik lokal zu

$$\begin{aligned} g_{ij}^\pm &= \left\langle \frac{\partial \varphi_\pm}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi_\pm}{\partial x^j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{(2e_i, \mp 2x^i)}{1+|x|^2} - \frac{2x^i(2x, \pm(1-|x|^2)}{(1+|x|^2)^2}, \frac{(2e_j, \mp 2x^j)}{1+|x|^2} - \frac{2x^j(2x, \pm(1-|x|^2)}{(1+|x|^2)^2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{(1+|x|^2)^2}(4\delta_{ij} + 4x^i x^j) - \frac{4}{(1+|x|^2)^3} x^j (4x^i - 2x^i(1-|x|^2)) \\ &\quad + \frac{4}{(1+|x|^2)^4} x^i x^j (4|x|^2 + (1-|x|^2)^2) \\ &= \frac{4}{(1+|x|^2)^2}(\delta_{ij} + x^i x^j) - \frac{4}{(1+|x|^2)^2} x^i x^j = \frac{4}{(1+|x|^2)^2}\delta_{ij}. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass (S^4, g) konform zu $(\mathbb{R}^4, \delta)$ ist. Damit ist der Weyl-Tensor beider Mannigfaltigkeiten der Gleiche. Da $(\mathbb{R}^4, \delta)$ flach ist, das heißt, da alle Krümmungsgrößen verschwinden, ist $W = 0$, und somit auch die Komponente W_-. Damit ist S^4 eine selbstduale Riemannsche Mannigfaltigkeit.

Mit Hilfe der lokalen Darstellung von g berechnet man die Christoffelsymbole wegen $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -\dfrac{16x^k}{(1+|x|^2)^3}\delta_{ij}$ zu

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) \\ &= \frac{(1+|x|^2)^2}{8} \delta^{kl} \left(\frac{(-16)x^i}{(1+|x|^2)^3}\delta_{kj} + \frac{(-16)x^j}{(1+|x|^2)^3}\delta_{ik} - \frac{(-16)x^k}{(1+|x|^2)^3}\delta_{ij} \right) \\ &= -\frac{2}{1+|x|^2}(x^i \delta_{jl} + x^j \delta_{il} - x^l \delta_{ij}), \end{aligned}$$

und deren Ableitungen zu

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^m} = -\frac{2(\delta_{im}\delta_{jl} + \delta_{jm}\delta_{il} - \delta_{lm}\delta_{ij})}{1+|x|^2} + \frac{4x^m(x^i\delta_{jl} + x^j\delta_{il} - x^l\delta_{ij})}{(1+|x|^2)^2}.$$

Daraus ergibt sich für die skalare Krümmung $\mathcal{R}$ ein Wert von

$$\begin{aligned}
\mathcal{R} &= -R_{jk}{}^{jk} = -g^{ij} R_{jki}{}^{k} = -\frac{(1+|x|^2)^2}{4}\delta^{ij} R_{jki}{}^{k} = \frac{(1+|x|^2)^2}{4}\delta^{ij} R_{kji}{}^{k} \\
&= \frac{(1+|x|^2)^2}{4}\delta^{ij}\left\{\frac{\partial \Gamma^k_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^k_{ki}}{\partial x^j} + \Gamma^k_{km}\Gamma^m_{ji} - \Gamma^k_{jm}\Gamma^m_{ki}\right\} \\
&= \frac{(1+|x|^2)^2}{4}\left\{\sum_{ki}\frac{\partial \Gamma^k_{ii}}{\partial x^k} - \sum_{ki}\frac{\partial \Gamma^k_{ki}}{\partial x^i} + \sum_{kim}\Gamma^k_{km}\Gamma^m_{ii} - \sum_{kim}\Gamma^k_{im}\Gamma^m_{ki}\right\} \\
&= \frac{(1+|x|^2)^2}{4}\left\{\sum_{ki}\frac{(-2)}{1+|x|^2}(\delta_{ki}\delta_{ki} + \delta_{ki}\delta_{ki} - \delta_{ii}\delta_{kk})\right. \\
&\quad + \sum_{ki}\frac{4x^k}{(1+|x|^2)^2}(x^i\delta_{ik} + x^i\delta_{ik} - x^k\delta_{ii}) \\
&\quad - \sum_{ki}\frac{(-2)}{1+|x|^2}(\delta_{ki}\delta_{ki} + \delta_{ii}\delta_{kk} - \delta_{ik}\delta_{ik}) \\
&\quad - \sum_{ki}\frac{4x^i}{(1+|x|^2)^2}(x^k\delta_{ik} + x^i\delta_{kk} - x^k\delta_{ki}) \\
&\quad + \sum_{kim}\frac{4}{(1+|x|^2)^2}(x^k\delta_{mk} + x^m\delta_{kk} - x^k\delta_{mk})(x^i\delta_{mi} + x^i\delta_{mi} - x^m\delta_{ii}) \\
&\quad \left. - \sum_{kim}\frac{4}{(1+|x|^2)^2}(x^i\delta_{mk} + x^m\delta_{ik} - x^k\delta_{im})(x^k\delta_{mi} + x^i\delta_{mk} - x^m\delta_{ik})\right\} \\
&= -\frac{1+|x|^2}{2}\sum_i(2\delta_{ii} - 4\delta_{ii}) + \sum_i\left(2x^ix^i - |x|^2\delta_{ii}\right) + \frac{1+|x|^2}{2}\sum_i 4\delta_{ii} \\
&\quad - \sum_i 4x^ix^i + \sum_{ik}(x^ix^k\delta_{ik} + x^ix^k\delta_{ik} - x^kx^k\delta_{ii} + x^ix^i\delta_{kk} + x^ix^i\delta_{kk} \\
&\quad - |x|^2\delta_{ii}\delta_{kk} - x^ix^k\delta_{ik} - x^ix^k\delta_{ik} + x^kx^k\delta_{ii}) - \sum_{ki}(x^ix^k\delta_{ik} + x^ix^i\delta_{kk} \\
&\quad - x^ix^k\delta_{ik} + x^ix^k\delta_{ik} + x^ix^k\delta_{ik} - |x|^2\delta_{ik}\delta_{ik} - x^kx^k\delta_{ii} - x^ix^k\delta_{ik} + x^kx^i\delta_{ik}) \\
&= -\frac{1+|x|^2}{2}(-8) + (2|x|^2 - 4|x|^2) + \frac{1+|x|^2}{2}16 - 4|x|^2 \\
&\quad + \sum_i(4x^ix^i + 4x^ix^i - 4|x|^2\delta_{ii}) - \sum_i(4x^ix^i + 2x^ix^i - |x|^2\delta_{ii} - |x|^2\delta_{ii}) \\
&= 4(1+|x|^2) - 6|x|^2 + 8(1+|x|^2) - 8|x|^2 + 2|x|^2 = 12.
\end{aligned}$$

Die Krümmung ist also positiv, womit die Voraussetzungen des Satzes 4.1 an die Mannigfaltigkeit erfüllt sind. □

Zur Überprüfung der weiteren Voraussetzungen, nämlich die an die betrachtete Liegruppe, benötigt man noch die

Bezeichnung: Eine Liegruppe G heißt halbeinfach, wenn sie keine kommutative, zusammenhängende normale Untergruppe besitzt.

Im Fall der hier betrachteten kompakten Liegruppe G ist das äquivalent zur Endlichkeit des Zentrums $Z(G) = \{g \in G; gh = hg \text{ für alle } h \in G\}$, beziehungsweise zur negativen Definitheit der Killingform der Liealgebra $\mathfrak{g}$ zu G (vgl. [BtD]).

Da die Gruppe $SU(2)$ kompakt ist, greifen hier die Rechnungen aus Kapitel 3.3, die gerade zeigen, dass die Killingform von $su(2)$ negativ definit ist und somit $SU(2)$ die Voraussetzungen aus Satz 4.1 erfüllt.

Um die Aussage weiter präzisieren zu können, wird von der Eigenschaft der $SU(2)$-Prinzipalbündel über S^4 Gebrauch gemacht, durch ihre zweiten Chernklassen charakterisiert zu sein. Das bedeutet, dass zwei solche Prinzipalbündel genau dann isomorph sind, wenn die zugehörigen zweiten Chernklassen übereinstimmen. Diese werden, gemäß der Ausführungen im Anhang, mit der Krümmung F eines Zusammenhangs auf P, bestimmt durch

$$\int\limits_{S^4} c_2(P) = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{S^4} Spur(F \wedge F) = -k \in \mathbb{Z}\,.$$

k nennt man hier auch die topologische Ladung oder die Instantonzahl von P. Im Zusammenhang mit der Instantonzahl macht man sofort die folgende

Bemerkung 4.7. *Die selbstdualen Zusammenhänge des Prinzipalbündels P mit Instantonzahl $k > 0$ minimieren das Yang-Mills-Funktional $\mathcal{YM}$ absolut.*

Beweis. Es gilt für die Zerlegung $F = F_+ + F_-$ der Krümmung des Zusammenhangs A in zwei orthogonale Anteile mit $*F_+ = F_+$ und $*F_- = -F_-$

$$\mathcal{YM}(A) = \|F\|^2 = \|F_+\|^2 + \|F_-\|^2$$

und

$$\begin{aligned}
8\pi^2 k &= -\int\limits_{S^4} Spur(F \wedge F) \\
&= -\int\limits_{S^4} (Spur(F_+ \wedge F_+) + Spur(F_- \wedge F_-) + 2Spur(F_+ \wedge F_-)) \\
&= -\int\limits_{S^4} (Spur(F_+ \wedge *F_+) + \int\limits_{S^4} (Spur(F_- \wedge *F_-) + \int\limits_{S^4} 2Spur(F_+ \wedge *F_-) \\
&= \|F_+\|^2 - \|F_-\|^2 - 2\langle F_+, F_-\rangle = \|F_+\|^2 - \|F_-\|^2\,.
\end{aligned}$$

Damit ist also

$$\mathcal{YM}(A) = \|F_+\|^2 + \|F_-\|^2 \geq \|F_+\|^2 - \|F_-\|^2 = 8\pi^2 k,$$

mit Gleichheit genau dann, wenn F_- verschwindet, also A selbstdual ist. □

Mit Hilfe der obigen Charakterisierung der Prinzipalbündel hat man den

Satz 4.8. *Für ein $SU(2)$-Prinzipalbündel P über S^4 mit Instantonzahl k gilt für die Auswertung der ersten Pontrjaginklasse des komplexifizierten adjungierten Bündels von P*

$$\int_{S^4} p_1(AdP^{\mathbb{C}}) = 8k.$$

Beweis. Es ist

$$AdP = P \times_{Ad} su(2) \cong \mathfrak{su}(2) \subset End(E) \cong E \otimes E^*,$$

mit $E = P \times_{id} \mathbb{C}^2$ und den Bezeichnungen aus den vorigen Abschnitten. AdP ist ein reelles Vektorbündel vom Rang 3 mit Standardfaser

$$su(2) = span_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\}.$$

Das komplexifizierte Bündel $AdP^{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$ ist komplex dreidimensional und hat die Standardfaser $su(2) \otimes \mathbb{C} \subset gl_2\mathbb{C}$. Ein Element aus $su(2) \otimes \mathbb{C}$ hat die Form $\begin{pmatrix} iz_2 & z_1 + iz_3 \\ -z_1 + iz_3 & -iz_2 \end{pmatrix}$ mit $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, es gilt also $su(2) \otimes \mathbb{C} = sl_2\mathbb{C}$. Man sieht nun, dass ein triviales Bündel T – interpretiert als triviales Bündel mit Standardfaser $\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – $\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$ zu

$$\mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}} \oplus T = End(E).$$

ergänzt. Für die Pontrjaginklasse des komplexifizierten reellen Vektorbündels AdP gilt (vgl. Anhang)

$$p_1(AdP^{\mathbb{C}}) = -2c_2(AdP^{\mathbb{C}}).$$

Außerdem ist wegen der Eigenschaften der Chernklassen

$$c(AdP^{\mathbb{C}}) = c(AdP^{\mathbb{C}})c(T) = c(AdP^{\mathbb{C}} \oplus T) = c(End(E)) = c(E \otimes E^*).$$

Die Spaltungseigenschaft erlaubt es, das Bündel E formal als Summe zweier komplexer Geradenbündel L und K darzustellen. Mit $L^* = L^{-1}$ und $K^* = K^{-1}$ ist $E = L \oplus K$ und $E^* = L^{-1} \oplus K^{-1}$. Außerdem ist $c(L) = 1 + c_1(L)$ und $c_1(L^{-1}) = -c_1(L)$, analog für K, sowie $c_1(L \otimes K) = c_1(L) + c_1(K)$. Diese und weitere Regeln für den Umgang mit Chernklassen sind im Anhang aufgeführt. Damit und mit

$$\begin{aligned} c(E) &= c(L \oplus K) = c(L)c(K) = (1 + c_1(L))(1 + c_1(K)) \\ &= 1 + (c_1(K) + c_1(L)) + c_1(K)c_1(L) = 1 + c_1(E) + c_2(E) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} c(AdP^{\mathbb{C}}) &= c(E \otimes E^*) = c((L \oplus K) \otimes (L^{-1} \oplus K^{-1})) \\ &= c(T \oplus (K \otimes L^{-1}) \oplus (L \otimes K^{-1}) \oplus T) \\ &= c(T)c(K \otimes L^{-1})c(L \otimes K^{-1})c(T) = c(K \otimes L^{-1})c(L \otimes K^{-1}) \\ &= (1 + c_1(K) - c_1(L))(1 + c_1(L) - c_1(K)) \\ &= 1 - (c_1(L) - c(K))^2 = 1 - (c_1(L) + c_1(K))^2 + 4c_1(L)c_1(K) \\ &= 1 - (c_1(E))^2 + 4c_2(E). \end{aligned}$$

Schließlich gilt

$$c_2(AdP^{\mathbb{C}}) = c_2(E \otimes E^*) = -(c_1(E))^2 + 4c_2(E) = 4c_2(E),$$

da $c_1(E) = \frac{1}{2\pi} Spur(F) = 0$ für die Krümmung $F \in \Omega^2(\mathfrak{su}(2))$ eines $SU(2)$-Zusammenhangs auf E. Mit diesen Rechnungen gilt jetzt

$$\int_{S^4} p_1(AdP^{\mathbb{C}}) = -2 \int_{S^4} c_2(AdP^{\mathbb{C}}) = -8 \int_{S^4} c_2(E) = 8k,$$

wenn man die erste Pontrjaginklasse auswertet. Man beachte hierbei, dass für das Prinzipalbündel und das assoziierte Vektorbündel $c(P) = c(E)$ ist. □

Das liefert schließlich den

Satz 4.9. *Der Modulraum $\mathcal{M}_k$ der selbstdualen Zusammenhänge eines $SU(2)$-Prinzipalbündels über S^4 mit Instantonzahl $k > 0$ hat die Dimension*

$$dim \mathcal{M}_k = 8k - 3.$$

Beweis. Für die Eulercharakteristik χ und die Signatur σ der 4-Sphäre gilt

$$\chi(S^4) = 2 \quad \text{und} \quad \sigma(S^4) = 0.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_k &= \int_M p_1(AdP^{\mathbb{C}}) - \frac{1}{2} \dim SU(2) \left(\chi(S^4) - \sigma(S^4) \right) \\ &= 8k - \frac{1}{2} 3(2 - 0) = 8k - 3. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für den Fall $k = 1$ $\dim \mathcal{M}_1 = 5$. □

4.2 Die Parametrisierung der Instantons

Wie angekündigt befasst sich dieser Abschnitt mit der expliziten Berechnung der Instantons zur topologischen Ladung k, das sind die selbstdualen Zusammenhänge eines $SU(2)$-Prinzipalbündels über S^4, dessen zweite Chernklasse ausgewertet $-k$ ergibt. Das Ziel ist jedoch nicht die Berechnung aller Instantons, sondern die Bestimmung eines Repräsentanten einer Eichklasse, also eine Parametrisierung des Modulraums. Dabei wird man im Allgemeinen nicht erwarten können, dass der gesamte Modulraum parametrisiert wird, sondern das Ergebnis ist die Berechnung einer lokalen Karte von $\mathcal{M}_k$. Wie der vorige Abschnitt gezeigt hat, ist der Modulraum $(8k-3)$-dimensional, so daß eine entsprechende Zahl reeller Parameter in die Konstruktion einfliessen wird.

Zur Beschreibung wird der Schiefkörper $\mathbb{H}$ der Quaternionen herangezogen, da er es zuläßt, die Basismannigfaltigkeit (genauer ein Kartengebiet) wegen

$$\mathbb{R}^4 \ni (x^0, x^1, x^2, x^3) \leftrightarrows x^0 + x^1 I + x^2 J + x^3 K \in \mathbb{H}$$

und die Gruppe $SU(2)$ mit ihrer Liealgebra $su(2)$ wegen

$$SU(2) \subset \hat{\mathbb{H}} \text{ und } su(2) \subset \hat{\mathbb{H}} \text{ mit } \hat{\mathbb{H}} = \left\{ \begin{pmatrix} v & u \\ -\bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix}; u, v \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\hat{\mathbb{H}} \ni \begin{pmatrix} v & u \\ -\bar{u} & \bar{v} \end{pmatrix} \leftrightarrows \mathrm{Re}(v) + \mathrm{Re}(u) I + \mathrm{Im}(u) J + \mathrm{Im}(v) K \in \mathbb{H}$$

gleichzeitig zu beschreiben. Dabei gilt $SU(2) \leftrightarrows \{x \in \mathbb{H} \,|\, |x| = 1\} = Sp(1)$ und $su(2) \leftrightarrows \{x \in \mathbb{H} \| \mathrm{Re}(x) = 0\} = \mathrm{Im}\mathbb{H}$. Die Bezeichnungen

$$\sigma_0 = \mathbb{1}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ und } 1, I, J, K$$

werden simultan benutzt, also $x = x^0 + x^1 I + x^2 J + x^3 K = x^\mu \sigma_\mu$ (Zur Unterscheidung werden die Indizes, die sich auf die Zerlegung der Quaternionen beziehen, durch griechische Buchstaben gekennzeichnet).

Es gelten die bekannten Rechenregeln $-\sigma_0^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = -\mathbb{1}$, und $\sigma_\mu \sigma_\nu = \sigma_\kappa$ für $(\mu, \nu, \kappa) \in \{1, 2, 3\}^3$ zyklisch, sowie $\sigma_\mu^* = -\sigma_\mu$ für $\mu \in \{1, 2, 3\}$.

Für $x = x^0 + x^1 I + x^2 J + x^3 K$ ist $\bar{x} = x^0 - x^1 I - x^2 J - x^3 K$ und es gilt damit $\overline{xy} = \bar{y}\bar{x}$Außerdem sieht man $\bar{x} = (x_{\hat{\mathbb{H}}})^*$ und $\bar{x}x = \det(x_{\hat{\mathbb{H}}})$.

$\mathbb{H}^n$ ist als Vektorraum über $\mathbb{H}$ zu verstehen. Dabei ist $\mathbb{H}^n$ mit der komponentenweisen Addition und der skalaren Multiplikation

$$\mathbb{H} \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n \quad \text{mit} \quad (a, x) = (a, (x_1, ..., x_n)) \mapsto (x_1 a, ..., x_n a) = xa$$

versehen. Die Wirkung linearer Abbildungen ist durch

$$\mathbb{H}^{k \times n} \times \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^k \quad \text{mit} \quad (A, x) \mapsto Ax$$

erklärt. Für eine Matrix $A \in \mathbb{H}^{k\times n}$ ist $A^* \in \mathbb{H}^{n\times k}$ mit $(A^*)_{ij} = \bar{A}_{ji}$. Es gilt $A^*B^* = (BA)^*$, wohingegen wegen der fehlenden Kommutativität im Allgemeinen $A^\top B^\top$ und $(BA)^\top$ nicht gleich sind.

Hat man eine Zuordnung
$$\mathbb{H}^2 \ni (a,b) \mapsto f(a,b),$$
die nur von dem Quotienten von x und y abhängt, für $y \neq 0$ etwa $f(x,y) = g(xy^{-1})$, so ist für zwei Punkte (a,b) und (c,d) in $\mathbb{H}^2$, die dieselbe Klasse in $P_1\mathbb{H}$ repräsentieren, also $(c,d) = (a,b)t$ mit $t \in \mathbb{H}\setminus\{0\}$
$$f(c,d) = g(cd^{-1}) = g(at(bt)^{-1}) = g(ab^{-1}) = f(a,b).$$

Da S^4 und $P_1\mathbb{H}$ diffeomorph sind, kann man ein solches f als Zuordnung mit Definitionsbereich S^4 betrachten. Eine Karte von S^4 bekommt man etwa durch die homogenen Koordinaten auf $P_1\mathbb{H}$ mit $y = 1$, die andere mit $x = 1$.

Betrachtet wird die Abbildung
$$\mathbb{H}^2 \ni (x,y) \mapsto By - Cx = M(x,y) \in \mathbb{H}^{(k+1)\times k}$$
mit zwei Matrizen $B, C \in \mathbb{H}^{(k+1)\times k}$ derart, dass gilt:

(1) $M(x,y)^*M(x,y)$ ist für alle Paare $(x,y) \neq (0,0)$ eine invertierbare $k\times k$-Matrix

Insbesondere haben dann M und damit auch B und C den vollen Rang k. Die Zuordnung
$$\mathbb{H}^2 \ni (x,y) \mapsto \operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{\text{Spalten von } M(x,y)\} \subset \mathbb{H}^{k+1}$$
ist wegen $M(x,y) = M(xy^{-1},1)y = M(1,yx^{-1})x$ nur von dem Quotienten von x und y, also von der Klasse $[x,y]$ in $P_1\mathbb{H}$ abhängig. Man erhält somit eine Abbildung
$$S^4 \ni [x,y] \mapsto E_{[x,y]} = \operatorname{span}_{\mathbb{H}}\{\text{Spalten von } M(x,y)\} \subset \mathbb{H}^{k+1}.$$

Das liefert dann ein Vektorbündel E über S^4 vom Rang k als Unterbündel von $S^4 \times \mathbb{H}^{k+1}$. Die Faser von E über $z = [x,y]$ ist dann E_z. Trivialisierungen sind durch die homogenen Koordinaten gegeben, etwa
$$\mathbb{H}\times\mathbb{H}^k \to E \quad \text{mit} \quad (x, a_1, ..., a_k) \mapsto ([x,1], \sum_{i=1}^{k} M_i(x,1)a_i).$$

Dabei ist M_i die i-te Spalte der Matrix M. Das triviale Bündel $S^4 \times \mathbb{H}^{k+1}$ läßt sich mittels der natürlichen Bilinearform
$$h : \mathbb{H}^{k+1}\times\mathbb{H}^{k+1} \to \mathbb{H} \quad \text{mit} \quad h(v,w) = v^*w$$

in die direkte Summe von E und seinem orthogonalen Komplement bezüglich h zerlegen. Mit $L = E^{\perp}$ gilt somit $S^4 \times \mathbb{H}^{k+1} = E \oplus L$. Die Faser L_z von L über $z \in S^4$ ist dann gegeben durch

$$L_z = \left\{ v \in \mathbb{H}^{k+1} \,\middle|\, v^* w = 0 \text{ für alle } w \in E_z \right\}.$$

Auf dem Bündel $S^4 \times \mathbb{H}^{k+1}$ gibt es den trivialen Zusammenhang d mit $d(s_1, ..., s_{k+1}) = (ds_1, ..., ds_{k+1})$ für einen Schnitt $(s_1, ..., s_{k+1})$. Das Bündel L erhält durch d und durch die faserweise Orthogonalprojektion P von $S^4 \times \mathbb{H}^{k+1}$ auf L einen Zusammenhang D. Dieser ist mit $Y \in \Gamma(TS^4)$ und $s \in \Gamma(L)$ definiert durch

$$D = P \circ d \quad \text{bzw.} \quad D_Y s = P \circ d_Y s.$$

Die lokale Darstellung dieses Zusammenhangs D (etwa in der Karte $y = 1$) ergibt sich aus einer lokalen Rahmung $N : \mathbb{H} \to L$. Für diese Rahmung gilt mit $M(x) = M(x, 1)$ und nach Normierung von N für alle $x \in \mathbb{H}$:

(2) $\quad N(x)^* M(x) = 0$

(3) $\quad N(x)^* N(x) = 1$

Für die Projektion P gilt in dieser Basis $P = NN^*$ und für einen Schnitt $s \in \Gamma(L)$ schreibt man $s = Na$ mit einer Abbildung $a : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} Ds &= NN^* d(Na) = NN^*(dN)a + NN^* N da \\ &= N(N^* dN + d)a. \end{aligned}$$

Die lokale Darstellung von D in dieser Rahmung ist also $D = d + N^* dN$.

Man kann die topologische Ladung des Bündels L berechnen. Der Begriff macht hier Sinn, da man die lokalen Rahmungen von L normieren kann, und die Strukturgruppe von L sich somit auf $Sp(1) = SU(2)$ reduziert. Die totale Chernklasse von L ist $c(L) = 1 + c_2(L)$, da $c_1(L)$ wegen der Strukturgruppe verschwindet, und die höheren Chernklassen wegen des komplexen Rangs 2 von L gar nicht vorkommen. Das Bündel $T = E \oplus L$ ist trivial und deshalb gilt

$$1 = c(T) = c(E)c(L).$$

E ist per Konstruktion die Summe aus quaternionischen Geradenbündeln $E_1, ..., E_k$, deren Fasern über $z = [x, y] \in S^4$ gerade $E_{i,z} = \mathrm{span}\{M_i(x, y)\}$ sind. Wie für L gilt auch für diese Bündel $c(E_i) = 1 + c_2(E_i)$, wobei sich diese berechnen lassen. Das Bündel E_i ist über die Abbildung $M_i(x, y) \mapsto (x, y)$ kanonisch isomorph zu dem Standardgeradenbündel über $P_1\mathbb{H}$. Dessen Faser über $[x, y]$ besteht aus all den Paaren $(a, b) \in \mathbb{H}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, für die $[a, b] = [x, y]$ gilt. In diesem Sinne ist die Faser gerade $[x, y]$. Gemäß [MS] ist die zweite Chernklasse dieses Bündels ein Erzeuger von $H^4(S^4, \mathbb{Z})$, so dass sich nach Auswertung über S^4 der Wert 1 ergibt.

Das nutzt man aus und berechnet zunächst $1 = (1 + c_2(L)) \prod_{i=1}^{k}(1 + c_2(E_i)) = 1 + (c_2(L) + \sum_{i=1}^{k} c_2(E_i))$, also $c_2(L) = -\sum_{i=1}^{k} c_2(E_i)$ (Die höheren Terme in dem Produkt entfallen, da die Grundmannigfaltigkeit vierdimensional ist). Wertet man das aus, so ergibt sich für L eine topologische Ladung von

$$-\int c_2(L) = \sum_{i=1}^{k} \int c_2(E_i) = k.$$

Im Laufe dieses Abschnitts wird noch gezeigt, dass D ein selbstdualer $SU(2)$-Zusammenhang auf L ist (vgl Satz 4.11). Man hat also mit Hilfe der Matrix $M(x, y)$ ein k-Instanton konstruiert.

Ändert man die Matrix M, so bekommt man in der Regel andere Bündel E und L und somit einen anderen Instanton. Allerdings liefern nicht alle Matrizen verschiedene Instantons, sondern vielmehr liefert eine ganze Klasse von Matrizen der angegebenen speziellen Art eine ganze Eichklasse, also ein Element aus $\mathcal{M}_k$. Bei den Operationen, die zur Veränderung von M herangezogen werden, muss insbesondere darauf geachtet werden, dass die lineare Struktur und die Eigenschaft (1) erhalten bleiben. Alle Transformationen, die diese Eigenschaft haben, sind vom Typ SMT mit $T \in GL_k\mathbb{R}$ und $S \in GL_{k+1}\mathbb{H}$. Dabei garantiert die Beschränkung auf konstante Matrizen die lineare Struktur der Konstruktion, die Beschränkung auf reelle Matrizen T das Vertauschen mit den in der Konstruktion vorkommenden Quaternionen x und y, und die Invertierbarkeit von T und S die Rangbedingung an M. Natürlich muss bei bei der Wahl der Transformation die Eigenschaft (1) gewahrt bleiben.

Zuerst bemerkt man, dass die Wirkung von $GL_k\mathbb{R}$ keinen Einfluss auf die Konstruktion von D hat. Ist nämlich $T \in GL_k\mathbb{R}$, so ist für alle $[x, y] = z \in S^4$ $E_z = \text{span}\{\text{Spalten von } M(x, y)\} = \text{span}\{\text{Spalten von } M(x, y)T\}$, da T nur eine Änderung der Basis von E_z bewirkt. Das Bündel E bleibt somit unbeeinflusst. Anders verhält es sich mit der Wirkung von $GL_{k+1}\mathbb{H}$. Eine Matrix $S \in GL_{k+1}\mathbb{H}$ liefert einen Bündelisomorphismus f zwischen den Bündeln E zu M und E' zu SM, der faserweise gerade S ist. Dieser wiederum induziert einen Isomorphismus $\tilde{f}$ zwischen $L = E^{\perp}$ und $L' = E'^{\perp}$. Dieser ist faserweise gegeben durch

$$L_z \ni v \mapsto \tilde{f}(v) = (S^{-1})^* v \in L'_z,$$

denn die Abbildung ist natürlich ein Isomorphismus und für $w = \sum SM_i w_i \in E'_z$ gilt $h((S^{-1})^* v, w) = \sum v^* S^{-1} SM_i w_i = \sum v^* M_i w_i = 0$.

Bemerkung. Um die Zusammenhänge auf L und L' vergleichen zu können, erweitert man den Begriff der Eichäquivalenz auf naheliegende Weise:
Man nennt zwei G-Zusammenhänge D und D' auf zwei G-Bündeln L und L' eichäquivalent, wenn die Bündel isomorph sind und wenn der mit Hilfe eines Isomorphismus g zurückgeholte Zusammenhang $g \circ D' \circ g^{-1}$ auf L eichäquivalent zu D ist. Wählt man den Isomorphismus geeignet, so sind die Zusammenhänge gleich

(vgl. Beispiel 4 in Abschnitt 1.2.3). Insbesondere muss der Isomorphismus g die G-Struktur erhalten.

In dem obigen speziellen Fall bedeutet das $\tilde{f} \in Sp(1)$, denn die Struktur wird durch h vermittelt, und für $v, w \in L_z$ gilt $h(v,w) = h(\tilde{f}(v), \tilde{f}(w)) \Leftrightarrow \tilde{f} \in Sp(1)$. Für die Matrix S bedeutet das

$$\begin{aligned} h(v,w) = v^*w \ &= \ h(\tilde{f}(v), \tilde{f}(w)) \\ &= h((S^{-1})^*v, (S^{-1})^*w) \\ &= ((S^{-1})^*v)^*(S^{-1})^*w = v^*S^{-1}(S^{-1})^*w \\ &= v^*(S^*S)^{-1}w. \end{aligned}$$

Da h nicht entartet ist, folgt $S \in Sp(k+1) = \{A \in GL_{k+1}\mathbb{H} \mid A^*A = \mathbb{1}\}$. Damit die Zusammenhänge auf L und L' eichäquivalent sind, muss S aus $Sp(k+1)$ gewählt werden. Andererseits gilt auch die Umkehrung: Wählt man S aus $Sp(k+1)$, so sind die Zusammenhänge auf L und L' eichäquivalent, denn $\tilde{f}$ ist schon der geeignete $Sp(1)$-Isomorphismus, der D mit D' vergleicht. Es gilt nämlich

$$\tilde{f}^{-1} \circ D' \circ \tilde{f} = S^* \circ P' \circ d \circ S = S^* \circ P' \circ S \circ d = P \circ d = D,$$

wobei die Gleichheit $S^* \circ P' \circ S = P$ für $v + w \in E_z \oplus L_z$ also $Sv + Sw \in E'_z \oplus L'_z$ aus $S^* \circ P' \circ S(v+w) = S^*P'(Sv + Sw) = S^*Sw = w = P(v+w)$ folgt.

Man zeigt, dass hierdurch der Modulraum $\mathcal{M}_k$ schon fast vollständig charakterisiert ist. Eine kleine Korrektur ergibt sich nur daraus, dass die Wirkung von $(-\mathbb{1}, -\mathbb{1})$ und $(\mathbb{1}, \mathbb{1})$ aus $Sp(k+1) \times GL_k\mathbb{R}$ auf eine Matrix M die Gleiche ist. Man hat damit den folgenden Satz, den man in [DV], Exposé 7, findet.

Satz 4.10. *(1) Für $k > 0$ ist*

$$\tilde{\Theta} = \Big\{(B,C) \in \big(\mathbb{H}^{(k+1)\times k}\big)^2 \;\Big|\; (By - Cx)^*(By - Cx) \in GL_k\mathbb{R} \ \forall (x,y) \in \mathbb{H}^2 \backslash \{0\}\Big\}$$

eine nichtleere Untermannigfaltigkeit von $(\mathbb{H}^{(k+1)\times k})^2$ und die Gruppe

$$G = Sp(k+1) \times GL_k\mathbb{R} \diagup \{(\mathbb{1}, \mathbb{1}), (-\mathbb{1}, -\mathbb{1})\}$$

operiert über $((g,h),(B,C)) \mapsto (gBh^{-1}, gCh^{-1})$ eigentlich und frei auf $\tilde{\Theta}$. Der Quotient $\Theta = \tilde{\Theta} \diagup G$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $8k - 3$.

(2) Es gibt eine kanonische Bijektion zwischen Θ und $\mathcal{M}_k$.

Das Hauptaugenmerk liegt in diesem Abschnitt wie gesagt auf der Konstruktion der Instantons, so dass die entscheidenden Teile dieses Satzes hier die Anzahl der freien

Parameter in der Menge Θ und die Injektivität in (2) sind. Die Beweise für diese Teile werden durch die Konstruktion erbracht.

Zur weiteren Untersuchung beschränkt man sich auf eine Karte von S^4, etwa $y = 1$. Das heißt man betrachtet die Matrizen der Form

$$M(x) = B - Cx \quad \text{mit } x \in \mathbb{H} \text{ und } C, B \in \mathbb{H}^{(k+1)\times k}$$

und eine Karte N von L der oben angegebenen Form. Dabei haben B und C den Rang k, die Matrix M besitzt die Eigenschaft (1) und N ist eine Abbildung von $\mathbb{H}$ nach $\mathbb{H}^{k+1}$ mit den Eigenschaften (2) und (3).

$$(1)\ M^*M \in GL_k\mathbb{R} \quad (2)\ N^*M = 0 \quad (3)\ N^*N = 1.$$

Wie oben berechnet wurde, hat der Zusammenhang D auf L, der den Instanton liefert, die lokale Darstellung

$$A = N^*dN.$$

Es gilt $A = A_\mu dx^\mu = N^*\partial_\mu N dx^\mu$ und wegen $\partial_\mu(N^*N) = 0$ schließlich

$$A_\mu^* = (N^*\partial_\mu N)^* = (\partial_\mu(N^*N) - (\partial_\mu N^*)N)^* = -N^*\partial_\mu N = -A_\mu.$$

A ist also eine 1-Form mit Werten in $su(2)$. Außerdem gilt der folgende

Satz 4.11. *Die Krümmung F zum Zusammenhang A hat die lokale Darstellung $F = F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ mit*

$$F_{\mu\nu} = -\sum_{k=1}^{3} 2N^*C(M^*M)^{-1}\eta^k_{\mu\nu}\sigma_k C^*N$$

und es gilt $*F = F$.

Dabei sind $\eta^k_{\mu\nu}$ und $\bar{\eta}^k_{\mu\nu}$ ähnlich den η-Symbolen, die von G. t´Hooft in [tHo] eingeführt wurden. Ein Unterschied zu den Symbolen dort, resultiert aus einer anderen Nummerierung der Quaternionen. Für $k = 1, 2, 3$ sind sie hier durch die folgenden Eigenschaften definiert:

$$\eta^k_{\mu\nu} = -\eta^k_{\nu\mu} = \begin{cases} \varepsilon_{k\mu\nu} & \text{falls } \mu,\nu = 1,2,3 \\ \delta_{k\nu} & \text{falls } \mu = 0 \end{cases}$$

$$\bar{\eta}^k_{\mu\nu} = (-1)^{\delta_{0\mu}+\delta_{0\nu}}\eta^k_{\mu\nu} = \begin{cases} \varepsilon_{k\mu\nu} & \text{falls } \mu,\nu = 1,2,3 \\ -\delta_{k\nu} & \text{falls } \mu = 0 \end{cases}$$

Beweis. Wegen $F = dA + A \wedge A$ ist $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$, also

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu(N^*\partial_\nu N) - \partial_\nu(N^*\partial_\mu N) + [N^*\partial_\mu N, N^*\partial_\nu N] \\ &= (\partial_\mu N^*)(\partial_\nu N) - (\partial_\nu N^*)(\partial_\mu N) + N^*(\partial_\mu N)N^*(\partial_\nu N)] - N^*(\partial_\nu N)N^*(\partial_\mu N) \\ &= (\partial_\mu N^*)(\partial_\nu N) - (\partial_\nu N^*)(\partial_\mu N) - (\partial_\mu N^*)NN^*(\partial_\nu N) + (\partial_\nu N^*)NN^*(\partial_\mu N) \\ &= (\partial_\mu N^*)(\mathbb{1} - NN^*)(\partial_\nu N) - (\partial_\nu N^*)(\mathbb{1} - NN^*)(\partial_\mu N). \end{aligned}$$

$\mathbb{1} - NN^*$ ist die Orthogonalprojektion von $\mathbb{H}^{k+1}$ auf $U = \operatorname{span}\{\text{Spalten von } M\} = \operatorname{span}\{N\}^\perp$ und es gilt

$$\mathbb{1} - NN^* = M(M^*M)^{-1}M^*.$$

Zum Beweis sei $v = Nb + w \in N\mathbb{H} \oplus U$. Dann ist

$$(\mathbb{1} - NN^*)(v) = v - NN^*Nb - NN^*w = v - Nb = w$$

und

$$M(M^*M)^{-1}M^*v = M(M^*M)^{-1}M^*Nb + M(M^*M)^{-1}M^*w = w.$$

Dabei folgt die letzte Gleichheit aus der Identität

$$M^*M(M^*M)^{-1}M^*w = M^*w,$$

weil M^* eingeschränkt auf U bijektiv ist.

Aus der Eigenschaft (2) folgt $(\partial_\mu N^*)M = -N^*(\partial_\mu M)$ und ausserdem gilt $\partial_\mu M = \partial_\mu(B - Cx) = -C\sigma_\mu$. Beachtet man noch, dass wegen (1) $(M^*M)^{-1}$ mit den σ_μ kommutiert, so rechnet man weiter

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= (\partial_\mu N^*)(\mathbb{1} - NN^*)(\partial_\nu N) - (\partial_\nu N^*)(\mathbb{1} - NN^*)(\partial_\mu N) \\
&= (\partial_\mu N^*)M(M^*M)^{-1}M^*(\partial_\nu N) - (\partial_\nu N^*)M(M^*M)^{-1}M^*(\partial_\mu N) \\
&= N^*(\partial_\mu M)(M^*M)^{-1}(\partial_\nu M^*)N - N^*(\partial_\nu M)(M^*M)^{-1}(\partial_\mu M^*)N \\
&= N^*C\sigma_\mu(M^*M)^{-1}\sigma_\nu^*C^*N - N^*C\sigma_\nu(M^*M)^{-1}\sigma_\mu^*C^*N \\
&= N^*C(M^*M)^{-1}(\sigma_\mu\sigma_\nu^* - \sigma_\nu\sigma_\mu^*)C^*N.
\end{aligned}$$

Für $\mu = 0 \neq \nu$ ist

$$\sigma_\mu\sigma_\nu^* - \sigma_\nu\sigma_\mu^* = -2\sigma_\nu = -2\sum_{k=1}^{3}\delta_{\nu k}\sigma_k = -2\sum_{k=1}^{3}\eta_{0\nu}^k\sigma_k\,,$$

für $\mu, \nu = 1, 2, 3,\ \mu \neq \nu$ ist

$$\sigma_\mu\sigma_\nu^* - \sigma_\nu\sigma_\mu^* = -\sigma_\mu\sigma_\nu + \sigma_\nu\sigma_\mu = -2\sigma_\mu\sigma_\nu = -2\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{k\mu\nu}\sigma_k = -2\sum_{k=1}^{3}\eta_{\mu\nu}^k\sigma_k$$

und für $\mu = \nu$ ist $\sigma_\mu\sigma_\nu^* - \sigma_\nu\sigma_\mu^* = 0$. Es gilt also schließlich

$$F_{\mu\nu} = -2\sum_{k=1}^{3}N^*C(M^*M)^{-1}\eta_{\mu\nu}^k\sigma_kC^*N.$$

Die Koeffizienten von $*F$ rechnet man mit Hilfe der Eigenschaften der σ-Matrizen oder der η-Symbole direkt nach. Exemplarisch gilt etwa

$$\begin{aligned}
(*F)_{\mu\mu} &= \frac{1}{2}\sum_{\kappa\nu}\varepsilon_{\mu\mu\nu\kappa}F_{\nu\kappa} = 0 = F_{\mu\mu}, \\
(*F)_{02} &= \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu}\varepsilon_{02\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(-F_{13} + F_{31}) = F_{31} = F_{02},
\end{aligned}$$

denn $\sigma_3\sigma_1^* - \sigma_1\sigma_3^* = -2\sigma_3\sigma_1 = -2\sigma_2 = \sigma_0\sigma_2^* - \sigma_2\sigma_0^*$ und

$$(*F)_{23} = \frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \varepsilon_{23\mu\nu}F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(F_{01} - F_{10}) = F_{01} = F_{23}.$$

Also gilt tatsächlich $*F = F$. □

Durch diesen Satz ist gezeigt, dass der Zusammenhang A selbstdual ist.

Gesucht sind also im Folgenden Änderungen an M, die den Zusammenhang, bzw. die entsprechende Klasse, nicht ändern. Diese Änderungen werden eine kanonische Form für M liefern, also einen ausgezeichneten Zusammenhang.

Die Forderung (1) an die Matrix M ist, abgesehen von der Invertierbarkeit, gleichbedeutend mit den Bedingungen

(1a) C^*C ist eine reelle Matrix

(1b) B^*B ist eine reelle Matrix

(1c) $B^*C = (B^*C)^\top$

Es gilt

$$M^*M = B^*B + \bar{x}C^*Cx - (\bar{x}C^*B + B^*Cx),$$

und da dies für alle $x \in \mathbb{H}$ reell sein soll, folgt mit $x = 0$ sofort (1b).

Für relle $x = \bar{x}$ ist

$$M^*M = B^*B + x^2C^*C - x(C^*B + B^*C),$$

woraus $\mathrm{Im}(C^*C) = \mathrm{Im}(C^*B + B^*C) = 0$ folgt, also insbesondere (1a).

Fasst man das Bisherige zusammen, so liefert das ($\bar{x}$ vertauscht mit der reellen Matrix C^*C)

$$M^*M = B^*B + |x|^2C^*C - (\bar{x}C^*B + B^*Cx).$$

Damit dieser Ausdruck reell ist, muss $\bar{x}C^*B + B^*Cx = \overline{\bar{x}C^*B + B^*Cx}$ für alle x gelten. Eine kurze Rechnung zeigt

$$\begin{aligned}
&\bar{x}C^*B + B^*Cx = \overline{\bar{x}C^*B + B^*Cx}\\
\Leftrightarrow\ &\bar{x}(B^*C)^* + B^*Cx = (B^*C)^\top x + \bar{x}\overline{B^*C}\\
\Leftrightarrow\ &\bar{x}(\overline{(B^*C)^\top - B^*C}) = ((B^*C)^\top - B^*C)x\\
\Leftrightarrow\ &\overline{((B^*C)^\top - B^*C)x} = ((B^*C)^\top - B^*C)x,
\end{aligned}$$

wobei der letzte Ausdruck nur dann für beliebige x erfüllt ist, wenn der Koeffizient vor x verschwindet, also (1c) gilt (man setze nacheinander die Werte $1, I, J$ und K ein)

Es gibt eine Matrix $G \in Sp(k+1)$ mit

$$C' = GC = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{C}' \end{pmatrix},$$

wobei $\hat{C}'$ wegen des vollen Rangs von C invertierbar ist. Dieses G findet man, da an die $(k+1)^2$ Einträge von G durch die Forderung der Nullzeile $\sum_l G_{1l}C_{lj} = 0$ für $j = 1, ..., k$ und durch die Forderung $\sum_l \bar{G}_{li}G_{lj} = \delta_{ij}$ für $i \leq j; i, j = 1, ..., k+1$ gerade $k + \frac{1}{2}(k+1)(k+2) = \frac{1}{2}(k^2 + 5k + 2) \leq (k+1)^2$ Bedingungen gestellt sind. Für das so erhaltene C' gilt wegen (1a)

$$(C')^*C' = (\hat{C}')^*\hat{C}' = (GC)^*GC = C^*G^*GC = C^*C = R \in GL_k\mathbb{R}$$

Da R symmetrisch und positiv definit ist, gibt es eine Matrix $T \in GL_k\mathbb{R}$ mit $T^\top RT = \mathbb{1}$. Setzt man

$$C'' = C'T = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{C}'' \end{pmatrix},$$

so gilt damit

$$(C'')^*C'' = (\hat{C}'')^*\hat{C}'' = (C'T)^*C'T = T^\top(C')^*C'T = T^\top RT = \mathbb{1}.$$

Schließlich definiert man noch $S \in Sp(k+1)$ durch $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\hat{C}'')^* \end{pmatrix}$ und bekommt schließlich die kanonische Form für C durch

$$C_{kan} = SC'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\hat{C}'')^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{C}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Definition 4.12. *Zu $M(x) = B - Cx$ heißt die durch das obige Verfahren erhaltene Matrix $M_{kan} = SGM(x)T$ mit*

$$M_{kan}(x) = B_{kan} - \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1}x \end{pmatrix}$$

die kanonische Form von M.

Wegen

$$B_{kan}^* B_{kan} = T^\top B^*BT$$

und

$$B_{kan}^* C_{kan} - (B_{kan}^* C_{kan})^\top = T^\top B^*CT - (T^\top B^*CT)^\top = T^\top(B^*C - (B^*C)^\top)T$$

übertragen sich die Bedingungen (1b) und (1c) direkt auf die kanonische Form und liefern noch weitere Einschränkungen in der Wahl der Einträge der Matrix B_{kan}. Setzt man $(B_{kan})_{ij} = b_{ij}$ und $(C_{kan})_{ij} = c_{ij} = \delta_{i,j+1}$, so ist (1c) gleichbedeutend mit $(B_{kan}^* C_{kan})_{ij} = (B_{kan}^* C_{kan})_{ji}$ oder $\sum\limits_l \bar{b}_{li}c_{lj} = \sum\limits_l \bar{b}_{lj}c_{li}$ oder schließlich $b_{j+1,i} = b_{i+1,j}$ für alle $i, j = 1, ..., k$.

Für B_{kan} bedeutet das $B_{kan} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \hat{B} \end{pmatrix}$ mit $\hat{B} = \hat{B}^\top \in \mathbb{H}^{k\times k}$ und $\lambda \in \mathbb{H}^{1\times k}$. Insgesamt hat man für die kanonische Form M_{kan} die Darstellung

$$M_{kan} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \hat{B} - \mathbb{1}x \end{pmatrix}$$

mit $\hat{B}$ und λ wie oben. Die Anzahl reeller Parameter ist gesunken auf $4k$ (aus λ) zuzüglich $4\frac{1}{2}k(k+1)$ (aus $\hat{B}$), also auf $2k^2 + 6k$. Die Realitätsbedingung (1b) als Gleichung formuliert lautet $B^*B = \overline{B^*B}$ oder mit $\hat{B}_{ij} = b_{ij}$ dann $(\lambda^*\lambda)_{ij} + (\hat{B}^*\hat{B})_{ij} = (\overline{\lambda^*\lambda})_{ij} + (\overline{\hat{B}^*\hat{B}})_{ij}$ bzw. $\bar{\lambda}_i\lambda_j + \sum_l \bar{b}_{li}b_{lj} = \bar{\lambda}_j\lambda_i + \sum_l \bar{b}_{lj}b_{li}$ für alle $i, j = 1, ..., k$.

Die Anzahl der daraus resultierenden reellen Gleichungen ermittelt man recht einfach, wenn man die Matrixelemente in Komponenten zerlegt. Zuerst bemerkt man jedoch, dass die Gleichung für $i = j$ keine Bedingung liefert, und dass sich beim Tausch von i und j die Gleichung nicht ändert. Mit $\lambda_i = \lambda_i^\mu \sigma_\mu$ und $b_{ij} = b_{ij}^\mu \sigma_\mu$ hat man also

$$B^*B = \overline{B^*B} \Leftrightarrow (\lambda_i^\mu \lambda_j^\nu + \sum_l b_{li}^\mu b_{lj}^\nu - \lambda_j^\mu \lambda_i^\nu + \sum_l b_{lj}^\mu b_{li}^\nu)\sigma_\mu^*\sigma_\nu = 0 \quad \text{für } i > j. \qquad (\#)$$

Sortiert man nach $\mathbb{1}, \sigma_1, \sigma_2$ und σ_3, so sieht man, dass der Koeffizient vor $\mathbb{1}$ (das sind alle Summanden mit $\mu = \nu$) verschwindet, und nur die drei anderen Koeffizienten Gleichungen liefern. Insgesamt sind das $\frac{3}{2}k(k-1)$, so dass die Zahl effektiver Parameter in der Konstruktion der Zusammenhänge auf

$$2k^2 + 6k - \frac{3}{2}k(k-1) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{15}{2}k$$

gesunken ist. Weiter reduziert wird diese Zahl durch den folgenden

Satz 4.13. *Die Transformationen, die einen eichäquivalenten Zusammenhang liefern und gleichzeitig die kanonische Form von M repräsentieren, sind genau die der Form*

$$M \mapsto \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & T^\top \end{pmatrix} MT$$

mit $q \in Sp(1)$ und $T \in O(k)$.

Beweis. Das diese angegebenen Transformationen eichäquivalente Zusammenhänge liefern, ist klar, da $\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & T^\top \end{pmatrix} \in Sp(k+1)$ und $T \in GL_k\mathbb{R}$.

Damit aber auch die kanonische Form bei einer Transformation von M zu SMT erhalten bleibt, muss $S\begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} T^{-1}$ gelten. Mit $S = (s_{ij}) = \begin{pmatrix} s_{11} & * \\ * & \tilde{S} \end{pmatrix}$ heißt das $\begin{pmatrix} s_{12}, ..., s_{1,k+1} \\ \tilde{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ T^{-1} \end{pmatrix}$, also $\tilde{S} = T^{-1}$ und $s_{1j} = 0$ für $j \geq 2$. Nun gilt aber zusätzlich noch $S^*S = 1$, also

$$\begin{pmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{21}, ..., \bar{s}_{k+1,1} \\ 0 & (T^{-1})^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ s_{21} & \\ \vdots & T^{-1} \\ s_{k+1,1} & \end{pmatrix} = \mathbb{1}.$$

Daraus ergibt sich $(T^{-1})^\top T^{-1} = \mathbb{1}$, $(T^{-1})^\top (s_{21}, ..., s_{k+1,1})^\top = 0$ und $|s_{11}|^2 + \sum_{j=2}^{k+1} |s_{j1}|^2 = 1$, insbesondere $T \in O(k)$, $(s_{21}, ..., s_{k+1,1})^\top = 0$ und somit $s_{11} = q \in Sp(1)$. Insgesamt hat man also die in dem Satz behauptete Form der Transformation erhalten. $\square$

Die Operation der Gruppe $H = O(k) \times Sp(1) \diagup \{(1, \mathbb{1}), (-1, -\mathbb{1})\}$ auf der Untermannigfaltigkeit

$$\Delta = \left\{ (\lambda, \hat{B}) \in \mathbb{H}^{k(k+1)} \,\middle|\, \hat{B} = \hat{B}^\top \text{ und } \begin{pmatrix} \lambda \\ \hat{B} - \mathbb{1}x \end{pmatrix} \text{ erfüllt } (\# \,) \right\}$$

von $\mathbb{H}^{k(k+1)}$ gemäß Satz 4.13 ist frei, und der Quotient ist wegen des Satzes 1 des Anhangs eine Mannigfaltigkeit der Dimension $\dim\Delta - \dim H$. Da die Gruppen $O(k)$ und $Sp(1)$ die Dimension $\frac{1}{2}k(k-1)$ bzw. 3 haben, reduziert sich, wie angekündigt, die Zahl der freien Parameter in Δ nochmal um diese Werte, so dass man schließlich zu einer Parameterzahl von

$$\frac{1}{2}k^2 + \frac{15}{2}k - \frac{1}{2}k(k-1) - 3 = 8k - 3$$

gelangt.

Durch diese Rechnungen hat man ein Verfahren bekommen, die Instantons explizit zu berechnen. In der Praxis tauchen allerdings Probleme auf. So zum Beispiel in der Bestimmung aller Matrizen B, die die gewünschten nichtlinearen Gleichungen resultierend aus $B^*B = \overline{B^*B}$ erfüllen. Eine Matrix B, bzw. M, kann man allerdings sofort angeben:

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_k \\ b_1 - x & & \\ & \ddots & \\ & & b_k - x \end{pmatrix}$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{R}$ und $b_i \in \mathbb{H}$. Auch das entsprechende N läßt sich in diesem Fall leicht berechnen. Dazu bestimmt man die Koeffizienten $N_2, ..., N_{k+1}$ in Abhängigkeit von N_1 aus der Gleichung $N^*M = 0$, bzw.

$$\lambda_{i-1}\bar{N}_1 + \bar{N}_i(b_{i-1} - x) = 0 \quad \text{für } i = 2, ..., k+1.$$

Setzt man $N_1 = \frac{1}{\rho}u$ mit einer Funktion $u : \mathbb{H} \to Sp(1)$ und einem Normierungsfaktor ρ, so ist

$$N_1 = \frac{1}{\rho}u \quad \text{und} \quad N_i = -\frac{1}{\rho}\frac{\lambda_{i-1}(b_{i-1} - x)}{|b_{i-1} - x|^2}u \quad \text{für } i \geq 2$$

mit $\rho^2 = 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i^2}{|b_i - x|^2}$. Daraus kann man das Potential gemäß $A = N^* dN$ berechnen. Im Fall $u = 1$ bekommt man die so genannten t´Hooft k-Instantons (vgl. z.B. [Ac], [BCW], [CWS]). Man gelangt auf diese Weise im Fall $k > 1$ allerdings nicht zu allen Instantons, was man schon daran erkennt, dass es hier nur $5k < 8k - 3$ freie Parameter gibt. Wählt man allerdings die λ_i nicht reell, so benötigt man zur Wahrung der Gleichung $B^*B = \overline{B^*B}$ Nebendiagonalelemente in $\hat{B}$. Im Fall $|\hat{B}_{ii} - \hat{B}_{jj}| \gg |\lambda_k|$ für alle i, j, k kann man die entsprechenden Potentiale durch t´Hooft-Lösungen approximieren (vgl. [CWS]).

Wendet man sich dem Fall $k = 1$ zu, so liefert der Ansatz

$$M = \begin{pmatrix} \lambda \\ b - x \end{pmatrix}$$

die richtige Zahl Parameter und alle Instantons. Dabei ist $\lambda > 0$ reell und b ein Quaternion. $\lambda > 0$ reicht hier aus, da man im Fall $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ zur Matrix $\begin{pmatrix} \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ b - x \end{pmatrix}$ übergehen kann.

Eine Lösung von $N^* M = 0$ ist dann $(u = 1)$:

$$N(x) = \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\lambda(b-x)}{|b-x|^2} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \rho^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{|b-x|^2}.$$

Das dazu gehörige Potential A berechnet sich zu

$$\begin{aligned}
A_\mu &= \bar{N}_1 \partial_\mu N_1 + \bar{N}_2 \partial_\mu N_2 \\
&= \frac{1}{\rho}\partial_\mu(\frac{1}{\rho}) + \frac{1}{\rho}\frac{\lambda^2(\overline{b-x})}{|b-x|^2}(\partial_\mu(\frac{1}{\rho})\frac{(b-x)}{|b-x|^2} + \frac{1}{\rho}\partial_\mu\frac{(b-x)}{|b-x|^2}) \\
&= \frac{1}{\rho}\partial_\mu(\frac{1}{\rho}) + \frac{1}{\rho}\partial_\mu(\frac{1}{\rho})\frac{\lambda^2}{|b-x|^2} + \frac{\lambda^2}{\rho^2}\frac{(\overline{b-x})}{|b-x|^2}\partial_\mu\frac{(b-x)}{|b-x|^2} \\
&= \frac{1}{\rho}\partial_\mu(\frac{1}{\rho})(1 + \frac{\lambda^2}{|b-x|^2}) + \frac{\lambda^2}{\rho^2}\left(\partial_\mu\frac{1}{|b-x|^2} + \frac{(\overline{b-x})\partial_\mu(b-x)}{|b-x|^4}\right) \\
&= \rho\partial_\mu(\frac{1}{\rho}) + \frac{\lambda^2}{\rho^2}\left(\frac{2(b^\mu - x^\mu)}{|b-x|^4} + \frac{(\overline{b-x})\partial_\mu(b-x)}{|b-x|^4}\right) \\
&= -\frac{\partial_\mu(\rho^2)}{2\rho^2} + \frac{\lambda^2}{\rho^2}\left(\frac{2(b^\mu - x^\mu)}{|b-x|^4} + \frac{(\overline{b-x})\partial_\mu(b-x)}{|b-x|^4}\right) \\
&= -\frac{\lambda^2}{\rho^2}\frac{(b^\mu - x^\mu)}{|b-x|^4} + \frac{\lambda^2}{\rho^2}\left(\frac{2(b^\mu - x^\mu)}{|b-x|^4} + \frac{(\overline{b-x})\partial_\mu(b-x)}{|b-x|^4}\right) \\
&= \frac{\lambda^2}{\rho^2|b-x|^4}\left((b^\mu - x^\mu) + (\overline{b-x})\partial_\mu(b-x)\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + |b-x|^2)|b-x|^2} \sum_{k=1}^{3} \bar{\eta}^k_{\mu\nu} \sigma_k (b^\nu - x^\nu)\,.$$

Die Gültigkeit der letzten Gleichung rechnet man direkt nach. Für $\mu = 0$ und $\mu = 1$ gilt exemplarisch:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \bar{\eta}^k_{1\nu} \sigma_k (b^\nu - x^\nu) &= \sum_{k=1}^{3} \sum_{\nu=1}^{3} \varepsilon_{k1\nu} \sigma_k (b^\nu - x^\nu) + \sum_{k=1}^{3} \delta_{1k} \sigma_k (b^0 - x^0) \\
&= \varepsilon_{213}(b^3 - x^3)\sigma_2 + \varepsilon_{312}(b^2 - x^2)\sigma_3 + (b^0 - x^0)\sigma_1 \\
&= (b^0 - x^0)\sigma_1 - (b^3 - x^3)\sigma_2 + (b^2 - x^2)\sigma_3 \\
&= -\big((b^0 - x^0) + (b^3 - x^3)\sigma_2\sigma_1 - (b^2 - x^2)\sigma_3\sigma_1\big)\,(-\sigma_1) \\
&\quad - (b^1 - x^1) + (b^1 - x^1)\sigma_1(-\sigma_1) \\
&= \big((b^0 - x^0) - (b^3 - x^3)\sigma_3 - (b^2 - x^2)\sigma_2 - (b^1 - x^1)\sigma_1\big)\,\sigma_1 \\
&\quad + (b^1 - x^1) \\
&= -\Big((b^1 - x^1) + \overline{(b-x)}\partial_1(b-x)\Big)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \bar{\eta}^k_{0\nu} \sigma_k (b^\nu - x^\nu) &= \sum_{k=1}^{3} (-\delta_{\nu k}) \sigma_k (b^\nu - x^\nu) = -\sum_{\nu=1}^{3} \sigma_\nu (b^\nu - x^\nu) \\
&= -\mathrm{Im}(b-x) \\
&= -((b^0 - x^0) - (b^0 - x^0) -\ \mathrm{Im}(\overline{b-x})) \\
&= -((b^0 - x^0) + (\overline{b-x})(-\sigma_0)) \\
&= -((b^0 - x^0) + (\overline{b-x})\partial_0(b-x))
\end{aligned}$$

Was in dieser Darstellung des Instantons sofort auffällt, ist die Singularität von A in $x = b$. Diese kann allerdings mit Hilfe einer geeigneten Eichtransformation beseitigt werden. Die entsprechende Transformation lautet

$$g(x) = \frac{b-x}{|b-x|}.$$

Für die Ableitungen dieser Abbildung gilt

$$\begin{aligned}
g^{-1}\partial_\mu g = \frac{\overline{b-x}}{|b-x|} \partial_\mu \frac{b-x}{|b-x|} &= \frac{\overline{b-x}}{|b-x|^2} \partial_\mu (b-x) + |b-x| \partial_\mu \frac{1}{|b-x|} \\
&= \frac{1}{|b-x|^2} (\overline{b-x}\partial_\mu (b-x) - \frac{1}{2}\partial_\mu |b-x|^2) \\
&= \frac{1}{|b-x|^2} (\overline{b-x}\partial_\mu (b-x) + (b^\mu - x^\mu))
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{k=1}^{3} \bar{\eta}^k_{\mu\nu} \frac{b^\nu - x^\nu}{|b-x|^2}$$

sowie analog

$$g\partial_\mu g^{-1} = -\sum_{k=1}^{3} \eta^k_{\mu\nu} \frac{b^\nu - x^\nu}{|b-x|^2}.$$

Man berechnet für das eichtransformierte Potential dann

$$\begin{aligned}
A^g_\mu &= gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \\
&= g\frac{-\lambda^2}{(\lambda^2 + |b-x|^2)|b-x|^2} \sum_{k=1}^{3} \bar{\eta}^k_{\mu\nu}\sigma_k(b^\nu - x^\nu)g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \\
&= \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + |b-x|^2} gg^{-1}(\partial_\mu g)g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \\
&= (\frac{-\lambda^2}{\lambda^2 + |b-x|^2} + 1)g\partial_\mu g^{-1} \\
&= \frac{|b-x|^2}{\lambda^2 + |b-x|^2} g\partial_\mu g^{-1} \\
&= \frac{-1}{\lambda^2 + |b-x|^2} \sum_{k=1}^{3} \eta^k_{\mu\nu}\sigma_k(b^\nu - x^\nu).
\end{aligned}$$

Insbesondere sieht man, dass das so transformierte Potential im Limes $|x| \to \infty$ einer reinen Eichung entspricht. Das heißt $A \propto gdg^{-1}$ mit einer $SU(2)$-wertigen Funktion g. Von dieser Situation ausgehend zeigt man, dass man das so gewonnene Potential als lokale Darstellung eines $SU(2)$-Zusammenhangs auf einem Bündels über S^4 interpretieren kann, dessen Übergangsfunktion g ist. Man berechnet per Integration die Instantonzahl dieses Bündels, etwa mit der lokalen Darstellung des Yang-Mills-Funktionals. Man erhält – z.B. mit Satz 4.11 –

$$F_{\mu\nu} = \frac{-2\lambda^2 \sum_{k=1}^{3} \eta^k_{\mu\nu}\sigma_k}{(\lambda^2 + |b-x|^2)^2}$$

und

$$-\frac{1}{2}\sum_{\mu\nu} \mathrm{Spur}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})d^4x = \frac{48\lambda^4}{(\lambda^2 + |b-x|^2)^4} d^4x\,.$$

Übereinstimmend mit den geometrischen Überlegungen zu Beginn dieses Abschnitts, ergibt sich der Wert

$$48\lambda^4 \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4x}{(\lambda^2 + |b-x|^2)^4} = 8\pi^2$$

(vgl. [Na], [GS]).

4.3 Ausblick

Dass der lokale ADHM-Ansatz wirklich Zusammenhänge gibt, die sich auf S^4 erweitern lassen, liefert – unabhängig von der einführenden geometrischen Betrachtung – der folgende Satz von Uhlenbeck (vgl. [WW]).

Satz 4.14. *Sei A eine Lösung der Yang-Mills-Gleichung auf $\mathbb{R}^4$ mit endlicher Wirkung $\int_{\mathbb{R}^4} |F_A|^2$. Dann gibt es ein Bündel E über S^4 mit Zusammenhang D, der (über die stereographische Projektion) die lokale Darstellung $d + A$ hat.*

Das Ergebnis des in diesem Kapitel ausgearbeiteten Ansatzes ist, wie der Satz 4.10 zeigt, die Berechnung aller Instantons. Zum Beweis des angegebenenn Satzes sind jedoch Hilfsmittel notwendig, die den Rahmen dieser Arbeit sprengen würden. Die Idee ist das Penrose-Twistor-Programm. Hier wird das Problem des Lösens der Feldgleichungen in eine Problem der algebraischen Geometrie übersetzt. Das Resultat fasst man in dem folgenden Satz zusammen (vgl. – insbesondere zu den Bezeichnungen in (2) – [At], [DV], [WW], [AHS] oder [AW]).

Satz 4.15. *Es gibt eine natürliche Bijektion zwischen*

1. *der Menge aller selbstdualen $SU(2)$-Zusammenhänge über S^4 (modulo Eichtransformationen) und*
2. *der Menge aller holomorphen Vektorbündel E vom Rang 2 über $P_3\mathbb{C}$ (modulo Isomorphie) mit:*
   - *E besitzt eine symplektische Struktur.*
   - *Die Einschränkung von E zu den reellen Geraden in $P_3\mathbb{C}$ ist trivial.*

Desweiteren liefert, wie in der Einleitung kurz angerissen, die Geometrie des Modulraums interessante Ergebnisse unter anderem in der Untersuchung der Topologie glatter vierdimensionaler Mannigfaltigkeiten (zusammengefasst ist das in [Do]). So zeigt man, dass der Modulraum $\mathcal{M}_1$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^5$ ist. Genauer zeigen die Autoren in [AHS], dass die Gruppe $SO(5,1)$ der konformen Diffeomorphismen von S^4 transitiv auf $\mathcal{M}_1$ operiert, mit Isotropiegruppe $SO(5)$. Das liefert einen Diffeomorphismus zwischen $\mathcal{M}_1$ und dem fünfdimensionalen hyperbolischen Raum $SO(5,1)\diagup SO(5)$. Weitere direkte Rechnungen liefern auf $\mathcal{M}_1$ eine Metrik g und einen Koordinatendiffeomorphismus Φ mit $(\Phi^* g)_{ij} = \psi(|x|)\delta_{ij}$, wobei ψ eine Funktion ist, die nur von der Norm von $x \in \mathbb{R}^5$ abhängt. Damit lassen sich für $(\mathcal{M}_1, g)$ folgende Aussagen nachweisen (vgl. [GP]).

Satz 4.16. *(a) $(\mathcal{M}_1, g)$ ist konform flach.*

(b) $(\mathcal{M}_1, g)$ ist radial-symmetrisch, d.h. die Operation von $SO(5)$ auf S^4 induziert eine Isometrie auf $\mathcal{M}_1$, deren Pullback die normale $SO(5)$-Operation auf $\mathbb{R}^5$ ist.

(c) $(\mathcal{M}_1, g)$ *hat einen endlichen Radius und ein endliches Volumen und der Rand von* $\overline{\mathcal{M}_1}$ *ist dann gerade* S^4

Anhang

Der Anhang enthält eine Übersicht verschiedener Begriffe aus der Differentialgeometrie und der Topologie, die im vorliegenden Text Verwendung finden. Er dient nicht der ausführlichen Behandlung dieser Thematik, sondern ist eher als Erläuterung der Notation gedacht. Darüberhinaus werden einige Ergebnisse aus den oben genannten Gebieten aufgeführt, auf die im Text direkt Bezug genommen wird. Dabei handelt es sich insbesondere um Sätze zur Konstruktion von Bündeln und zu den Eigenschaften charakteristischer Klassen.

Grundlagen der Differentialgeometrie

Dieser Abschnitt behandelt insbesondere die Begriffe Liegruppe und Liealgebra mit ihren Darstellungen, sowie den Begriff des Faserbündels. Verzichtet wird hier auf die Definition der grundlegenden Begriffe wie Mannigfaltigkeit, Tangentialvektor, Cotangentialvektor, (r, s)-Tensor, k-Form und deren Zusammenfassung zu Bündeln. Diese werden für eine Mannigfaltigkeit M üblicherweise mit Tangentialbündel, TM, Cotangentialbündel, T^*M, (r, s)-Tensorbündel, $T^r_s M$, und Bündel der k-Formen, $\Lambda^k T^*M$, bezeichnet. Die letzten beiden lassen sich zur Algebra $\mathcal{T}(M) = \bigoplus_{r,s} T^r_s M$ mit dem Tensorprodukt $\otimes$ und zur graduierten Algebra $\Lambda T^*M = \bigoplus_k \Lambda^k T^*M$ mit dem Dachprodukt $\wedge$ zusammenfassen. Näheres dazu findet man z.B. in [KN], [GHV] Vol.1, [Na], [SW] oder [DFN] Part II.

Wie in der Einleitung schon vereinbart, sind die im Text vorkommenden Mannigfaltigkeiten und Bündel jeweils als C^∞-Mannigfaltigkeiten und C^∞-Bündel zu verstehen. Ebenso sind alle Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten als C^∞-Abbildungen, also als glatt, vorausgesetzt. Ausnahmen von diesen Vereinbarungen, sofern sie auftreten, werden ausdrücklich angegeben.

Da die Begriffe Darstellung von Liegruppen und ihrer Algebren und die Konstruktion von Bündeln in dem gesamten Text eine fundamentale Rolle spielen, folgt nun eine kurze Einführung der Begriffe und eine Diskussion der Konstruktionsmöglichkeiten. Grundlegende Literatur hierzu ist u.a. [GHV] Vol.2 oder [BtD].

Eine Liegruppe ist eine Mannigfaltigkeit G, mit einer Gruppenstruktur, derart dass die Abbildungen

$$(g,h) \mapsto gh = l_g(h) = r_h(g) \qquad \text{und} \qquad g \mapsto g^{-1} = inv(g)$$

glatt sind.
Die Liealgebra zur Liegruppe G ist definiert als die Menge aller linksinvarianten Vektorfelder auf G. Das Produkt zweier Elemente $A, B \in \mathfrak{g}$ ist dann für Funktionen f auf G gegeben durch

$$[A,B]f = A(Bf) - B(Af).$$

Dabei heißt ein Vektorfeld X auf G linksinvariant, wenn das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{(l_g)_*} & TG \\ {\scriptstyle X}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle X} \\ G & \xrightarrow{l_g} & G \end{array}$$

Die Liealgebra $\mathfrak{g}$ zur Liegruppe G ist als Vektorraum isomorph zu T_eG. Man kann also $\mathfrak{g}$ mit T_eG identifizieren, wenn man das obige Produkt mit Hilfe des Isomorphismus auf T_eG überträgt.

Ein Liegruppenhomomorphismus bzw. ein Liealgebrenhomomorphismus, ist ein glatter Gruppen- bzw. Algebrenhomomorphismus zwischen Liegruppen bzw. Liealgebren.

Unter einer Darstellung der Liegruppe G auf der Mannigfaltigkeit M versteht man eine Abbildung ρ von G in die Diffeomorphismen von M, mit

$$\rho(gh) = \rho(g) \circ \rho(h) \qquad \text{und} \qquad \rho(e) = id.$$

Man sagt dann G operiert von links auf M. ρ ist ein Liegruppenhomomorhismus, und man nennt die Darstellung ρ, bzw. die Operation von G auf M, frei, wenn nur $\rho(e)$ Fixpunkte hat, transitiv, wenn es für alle $x, y \in M$ stets ein $g \in G$ gibt, so dass $\rho(g)x = y$ und effektiv, wenn ρ injektiv ist. Die Operation heißt eigentlich, wenn sie die folgende Eigenschaft aufweist:

> Die Abbildung $\theta : G \times M \to M \times M$ mit $\theta(g,x) = (x, \rho(g)x)$ ist eigentlich.
> Das heißt, die Urbilder kompakter Mengen sind kompakt

Ist G (lokal) kompakt, so ist das äquivalent zu der Bedingung

> Für $x, y \in M$ gibt es Umgebungen U_x und U_y, so dass die Menge
> $\{g \in G \,|\, gU_x \cap U_y \neq \emptyset\}$ (relativ) kompakt in G ist.

Im Zusammenhang damit gilt der folgende Satz.

Satz 1. *Operiert die Liegruppe G eigentlich und frei auf der Mannigfaltigkeit M, dann besitzt der Quotient M/G eine Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass die Projektion $\pi : M \to M/G$ eine glatte Submersion ist.*

Ist die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit ein Vektorraum V, so nennt man ρ eine lineare Darstellung, falls das Bild von ρ eine Untergruppe von $GL(V)$ ist.

Eine lineare Darstellung der Liealgebra $\mathfrak{g}$ ist ein Liealgebrenhomomorphismus $\sigma : \mathfrak{g} \to gl(V)$. Insbesondere gilt also $\sigma([A,B]) = [\sigma(A), \sigma(B)]$, wobei die rechte Seite der gewöhnliche Kommutator linearer Abbildungen ist.

Die lineare Darstellung $\rho : G \to GL(V)$ induziert eine lineare Darstellung $\rho_* : \mathfrak{g} \to gl(V)$. Diese ist durch das Differential von ρ gegeben und heißt die zu ρ adjungierte Darstellung.

Beispiele.

1. Für $g \in G$ wird der Automorphismus $h \mapsto ghg^{-1} = aut_g(h)$ durch die Darstellung $aut : G \to Diff(G)$ von G auf sich selbst, mit $g \mapsto aut_g$, vermittelt. Ebenso entsprechen die Links- und Rechtrtranslationen l_g und r_g den Darstellungen l und r von G auf sich.
2. aut liefert eine lineare Darstellung Ad von G auf $\mathfrak{g}$. Diese ist definiert durch $Ad : G \to GL(\mathfrak{g})$ mit $Ad_g A = (aut_g)_* A$ für $A \in \mathfrak{g}$.
3. Ad liefert weiter eine lineare Darstellung ad von $\mathfrak{g}$ auf sich selbst. Es gilt $ad : \mathfrak{g} \to gl(\mathfrak{g})$ mit $ad_A B = Ad_* A(B) = [A,B]$ für $B \in \mathfrak{g}$.

Im Falle der Matrixgruppen gilt $aut_g h = ghg^{-1}$, $Ad_g A = gAg^{-1}$ und $ad_A B = AB - BA$. Ad bzw. ad nennt man die adjungierten Darstellungen von G bzw. $\mathfrak{g}$.

Sind ρ und σ Darstellungen von G auf den Vektorräumen V und W, so induzieren diese weitere Darstellungen auf aus V und W konstruierten Vektorräumen. Dabei seien $\rho(g)$ und $\sigma(g)$ die Matrizen bezüglich Basen $\{v_1, ..., v_n\}$ und $\{w_1, ..., w_m\}$ von V und W.

4. $\rho^* : G \to GL(V^*)$ mit $\rho^*(g) = (\rho(g)^\top)^{-1}$. Diese ist über $(\rho^*(g)\varphi)(\rho(g)v) = \varphi(v)$ für alle $g \in G$, $v \in V$ und $\varphi \in V^*$ definiert. Ist $\{\varphi_i\}$ die zu $\{v_i\}$ duale Basis von V^*, so heißt das nämlich $(\rho^*(g)\varphi_i)(\rho(g)v_j) = \delta_{ij}$ oder $\delta_{ij} = \sum_{kl} \rho^*(g)_{ki}\varphi_k \rho(g)_{lj} v_l = \sum_l \rho^*(g)_{li}\rho(g)_{lj} = (\rho^*(g)^\top \rho(g))_{ij}$ also $\rho^*(g) = (\rho(g)^\top)^{-1}$ für alle $g \in G$. Die zu ρ^* adjungierte Darstellung ergibt sich dann zu $\rho^*_*(A) = -\rho_*(A)^\top$ für $A \in \mathfrak{g}$.

Auf analoge Weise bekommt man weiter:

5. $\rho^\oplus : G \to GL(V \oplus W)$ mit $\rho^\oplus(g)(v + w) = \rho(g)v + \sigma(g)w$. Die adjungierte Darstellung zu $\rho^\oplus$ ist durch $\rho^\oplus_*(A)(v + w) = \rho_*(A)v + \sigma_*(A)w$ gegeben.

6. $\rho^{\otimes} : G \to GL(V \otimes W)$ mit $\rho^{\otimes}(g)(v \otimes w) = \rho(g)v \otimes \sigma(g)w$. Die zu $\rho^{\otimes}$ adjungierten Darstellung ist $\rho^{\otimes}_*(A)(v \otimes w) = \rho_*(A)v \otimes w + v \otimes \sigma_*(A)w$.

Durch den Isomorphismus $V \otimes V^* \cong End(V) = gl(V)$ ist mit Hilfe von 4. und 6. eine Darstellung von G auf $End(V)$ gegeben durch:

7. $\tilde{\rho} : G \to GL(End(V))$ mit $\tilde{\rho}(g)\Phi = \rho(g)\Phi\rho(g)^{-1} = Ad_{\rho(g)}\Phi$. Die zu $\tilde{\rho}$ adjungierte Darstellung berechnet sich zu $\tilde{\rho}_*(A)\Phi = [\rho_*(A), \Phi] = ad_{\rho_*(A)}\Phi$.

Anwendung finden diese Darstellungen in der Konstruktion von Faserbündeln. Dabei ist ein Faserbündel E ein Tupel $E(M, \pi, F)$, bestehend aus einer Mannigfaltigkeit F, der Standardfaser, einer Mannigfaltigkeit M, der Basis, einer Mannigfaltigkeit E, dem Totalraum, und einer surjektiven Abbildung $\pi : E \to M$. Zusätzlich gibt es noch eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$ und eine Familie von Diffeomorphismen $\{\varphi_\alpha\}$ mit

$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F \quad \text{und} \quad \pi \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, v) = x.$$

Man schreibt auch $\varphi_{\alpha,x} : \pi^{-1}(x) \to F$ mit $\varphi_{\alpha,x}^{-1}(v) = \varphi_\alpha^{-1}(x, v)$. Die Übergangsfunktionen

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to Diff(F) \quad \text{mit} \quad g_{\alpha\beta}(x)v = \varphi_{\alpha,x} \circ \varphi_{\beta,x}^{-1}(v)$$

verkleben zwei Karten U_α und U_β. $E_x = \pi^{-1}(x)$ nennt man die Faser über $x \in M$. Ein Faserbündel mit Strukturgruppe G ist ein Faserbündel, dessen Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to G$ die Werte in der Liegruppe G annehmen, und über eine Darstellung ρ auf F wirken. Es gilt also $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, v) = (x, \rho \circ g_{\alpha\beta}(x)v)$.

Zwei spezielle Typen von Bündeln, die zu den Grundbegriffen des vorliegenden Textes gehören, sind die Folgenden. Ein Vektorbündel ist ein Faserbündel $E(M, \pi, V)$, dessen Standardfaser V ein Vektorraum ist, und es gilt:

> Die Faser $E_x = \pi^{-1}(x)$ ist für jedes $x \in M$ ein Vektorraum und der Diffeomorphismus $\varphi_{\alpha,x} : \pi^{-1}(x) \to V$ ist ein linearer Isomorphismus

Die Übergangsfunktionen nehmen dann die Werte in $GL(V)$ an. Analog zu oben definiert man ein G-Vektorbündel mit Hilfe einer einer linearen Darstellung von G auf V.

Ein Prinzipalbündel $P(M, \pi, G)$ ist ein Faserbündel, dessen Standardfaser eine Liegruppe G ist, und dessen Übergangsfunktionen ihre Werte in G annehmen. Die Darstellung von G auf G ist dabei die Linkstranslation. Es gilt also $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, h)$ $= (x, g_{\alpha\beta}(x)h)$ für $x \in M$ und $h \in G$. Außerdem gibt es auf P eine Rechtsoperation von G, die mit den Karten verträglich ist. Das heißt, es gibt eine Abbildung $R : P \times G \to P$ mit $R_{gh}p = R_h \circ R_g p$ für alle $p \in P$, $g, h \in G$. Man schreibt dabei $R(p, g) = R_g p$ und es gilt

$$\varphi_{\alpha,x}^{-1}(hg) = R_g \varphi_{\alpha,x}^{-1}(h) \quad \text{für alle } x \in M \text{ und } g, h \in G.$$

Zur Konstruktion von Bündeln sind die folgenden Sätze hilfreich, deren Beweise man z.B. in [GHV] findet.

Satz 2. *M und F seien Mannigfaltigkeiten und E sei eine Menge. Es gebe eine surjektive Abbildung $\pi : E \to M$, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind.*

(a) Es gibt eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M und eine Familie von bijektiven Abbildungen
$$\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F.$$

(b) Für alle $x \in U_\alpha$ und $y \in F$ ist $\pi \circ \varphi_\alpha^{-1}(x,y) = x$.

(c) Die Abbildungen $\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \times F \to U_\alpha \cap U_\beta \times F$ mit $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ sind Diffeomorphismen.

Dann gibt es auf E genau eine Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass $E(M,\pi,F)$ ein Faserbündel mit Bündelkarten $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$ ist.

Speziell auf die Konstruktion von Vektorbündeln bezieht sich der folgende

Satz 3. *M sei eine Mannigfaltigkeit und V ein Vektorraum. Zu jedem $x \in M$ gebe es einen Vektorraum E_x. $E = \bigcup_{x\in M} E_x$ sei die disjunkte Vereinigung dieser Vektorräume und $\pi : E \to M$ die natürliche Projektion. Außerdem gebe es eine offene Überdeckung $\{U_\alpha\}$ von M zusammen mit linearen Isomorphismen $\psi_{\alpha,x} : E_x \to V$ derart, dass die Abbildungen*
$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to GL(V) \quad \textit{mit} \quad g_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha,x} \circ \psi_{\beta,x}^{-1}$$
glatt sind. Dann gibt es auf E eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur, so dass $E(M,\pi,V)$ ein Vektorbündel mit Bündelkarten $\{(U_\alpha,\psi_\alpha)\}$ ist.

Aus zwei Vektorbündeln $E(M,\pi,V)$ und $F(M,\pi',W)$ mit Übergangsfunktionen $g_{\alpha\beta}$ bzw. $h_{\alpha\beta}$ kann man mit Hilfe der obigen Sätze in naheliegender Weise neue Bündel konstruieren. So etwa das zu E duale Bündel E^*, die Whitneysumme $E \oplus F$, das Tensorbündel $E \otimes F$, das äußere Produkt $E \wedge F$ und das Homomorphismenbündel $Hom(E,F)$ mit dem Spezialfall $End(E)$. Die Standardfasern und auch die Fasern der jeweiligen Bündel entsprechen den Fasern der an der Konstruktion beteiligten Bündel nach Anwendung der angedeuteten Operationen. So ist z.B. $(E^*)_x = (E_x)^*$ und $End(E)_x = End(E_x)$ und die Standardfaser von $E \otimes F$ ist $V \otimes W$.

Als Übergangsfunktionen der Bündel ergeben sich die Übergangsfunktionen von E und F in der entsprechenden assoziierten Darstellung, das heißt für das Endomorphismenbündel z.B. $(x,\Phi) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)\Phi g_{\alpha\beta}(x)^{-1})$ mit $(x,\Phi) \in U_\alpha \cap U_\beta \times End(V)$ und für das duale Bündel $(x,v) \mapsto (x, (g_{\alpha\beta}(x)^\top)^{-1} v)$ mit $(x,v) \in U_\alpha \cap U_\beta \times V^*$.

Grundlagen der Topologie

Dieser zweite Teil des Anhangs behandelt einige topologische Begriffe. Insbesondere der Begriff der charakteristischen Klassen in Verbindung mit der Charakterisierung der Isomorphieklassen von Vektorbündeln wird hier kurz erläutert. Für eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit M ist $\Omega^k = \Gamma(\Lambda^k T^* M)$. Betrachtet man den DeRham-Komplex

$$\ldots \xrightarrow{d} \Omega^{k-1} \xrightarrow{d} \Omega^k \xrightarrow{d} \Omega^{k+1} \xrightarrow{d} \ldots,$$

so nennt man die Elemente aus $Z^k = \left\{\omega \in \Omega^k;\ d\omega = 0\right\}$ die k-Cozykel und die Elemente aus $B^k = \left\{\omega \in \Omega^k;\ \exists \tau \in \Omega^{k-1} : d\tau = \omega\right\}$ die k-Coränder. Man sieht, dass wegen $d^2 = 0$ stets $B^k \subset Z^k$ ist. Die k-te deRham-Cohomologieklasse von M ist definiert als der Quotient von Z^k und B^k und man schreibt

$$H^k(M, \mathbb{R}) = Z^k \big/ B^k.$$

$H^k(M, \mathbb{R}$ ist ein reeller Vektorraum. Die Summe $H^*(M, \mathbb{R}) = \bigoplus_k H^k(M, \mathbb{R})$ wird durch das folgende Produkt zu einem Ring:

$$H^k(M, \mathbb{R}) \times H^l(M, \mathbb{R}) \ni ([\omega], [\vartheta]) \mapsto [\omega][\vartheta] = [\omega \wedge \vartheta] \in H^{k+l}(M, \mathbb{R}).$$

Man nennt

$$b^k = \dim_{\mathbb{R}} H^k(M, \mathbb{R})$$

die k-te Bettizahl von M. Falls alle Bettizahlen endlich sind, definiert man die Eulercharakteristik von M durch

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i b^i.$$

Beispiel: Für die n-Sphäre S^n ist $H^k(S^n, \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = 0, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Ist M eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit, so gibt es ein Produkt $\langle\,.\,,.\,\rangle : H^k(M, \mathbb{R}) \times H^{n-k}(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit

$$\langle [\omega], [\vartheta] \rangle = \int_M \omega \wedge \vartheta.$$

Dieses Produkt ist bilinear und nicht entartet. Somit sind $H^k(M, \mathbb{R})$ und $H^{n-k}(M, \mathbb{R})$ isomorph, und man spricht von der Poincaré-Dualität.

Beschränkt man sich auf Mannigfaltigkeiten der Dimension $n = 2m$, so liefert die Poincaré-Dualität eine nichtentartete Bilinearform τ auf $H^m(M, \mathbb{R})$ mit $\tau([\omega], [\vartheta]) = \int_M \omega \wedge \vartheta$. Ist die Dimension von M teilbar durch 4, so ist τ symmetrisch. Man bezeichnet dann mit b^+ bzw. b^- die Anzahl der positiven bzw. negativen Eigenwerte einer τ beschreibenden Matrix und

$$\sigma(M) = b^+ - b^-$$

nennt man die Signatur von M. Eine explizite Formel zur Berechnung von σ ergibt sich im Zusammenhang mit den charakteristischen Klassen.

Bemerkung. In den obigen Konstruktionen der deRham- Cohomologie kann man den Körper $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzen. Man erhält dann die $\mathbb{C}$-Vektorräume $H^k(M,\mathbb{C}) = H^k(M,\mathbb{R}\otimes\mathbb{C})$. Es gilt auch hier $b^k = b^{n-k}$ mit $b^k = \dim_{\mathbb{C}} H^k(M,\mathbb{C})$ für kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten M

Im Folgenden sei $E(M,\pi,\mathbb{C}^r, GL_r\mathbb{C})$ ein komplexes Vektorbündel vom Rang r über der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M. Die totale Chernklasse von E ist ein Element

$$c(E) \in H^*(M,\mathbb{R}).$$

Explizit ist es mit Hilfe eines Zusammenhangs D auf E und der zugehörigen lokalen Krümmungsform F durch

$$c(E,D) = \det(1 + \frac{i}{2\pi}F)$$

gegeben. $c(E,D)$ ist eine formale Summe aus lokalen Formen auf M mit Werten in $\mathbb{C}$. Da $c(E,D)$ unabhängig von der gewählten Karte ist, $\det(1+\frac{i}{2\pi}F) = \det(1+\frac{i}{2\pi}gFg^{-1})$ für $g \in G$, liefert das ein Element aus $\Omega^*(M,\mathbb{C}) = \oplus_k(\Omega^k\otimes\mathbb{C})$. Man zeigt, dass die zu $c(E,D)$ gehörige Cohomologieklasse unabhängig von der Wahl des Zusammenhangs auf E ist. Wählt man speziell einen $U(r)$-Zusammenhang, so ist $F^* = -F$ und es gilt $c(E,D) = \overline{c(E,D)}$. Somit ist also

$$c(E) = [c(E,D)] \in H^*(M,\mathbb{R}).$$

Man schreibt $c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \dots$ mit $c_i(E) \in H^{2i}(M,\mathbb{R})$. Es gilt z.B. $c_1(E) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Spur}(F)$, $c_2(E) = \frac{1}{8\pi^2}(\mathrm{Spur}(F\wedge F) - \mathrm{Spur}(F)\wedge\mathrm{Spur}(F))$ und $c_r = \left(\frac{i}{2\pi}\right)^r \det(F)$.

Dabei ist die Gleichheit im Sinne eines lokalen Repräsentanten zu verstehen. Man sieht sofort, dass $c_j(E) = 0$ falls $j > r$ oder $2j > n$.

Die Chernklassen haben die folgenden Eigenschaften:

1. $c(E) = \sum_i c_i(E)$ mit $c_0(E) = 1$ und $c_i(E) \in H^{2i}(M,\mathbb{Z})$ für $i > 1$.
2. Ist N eine weitere Mannigfaltigkeit und F eine Abbildung von N nach M, so gilt für das zurückgeholte Bündel $c(f^*E) = f^*c(E)$.
3. Für zwei Bündel E_1 und E_2 über M gilt $c(E_1 \oplus E_2) = c(E_1)c(E_2)$.
4. Für das kanonische Geradenbündel L über $P_1\mathbb{C}$ ist $c(L) = 1 + a$ mit einem Erzeuger a von $H^2(P_1\mathbb{C},\mathbb{Z})$
5. $c(T) = 1$ für das triviale Bündel T.
6. Für das zu E duale Bündel E^* gilt $c_j(E^*) = (-1)^j c_j(E)$.

7. Für zwei isomorphe Bündel E_1 und E_2 ist $c(E_1) = c(E_2)$.

8. Sind L_1 und L_2 komplexe Geradenbündel über M, so ist $c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2)$.

Bemerkung. Die Eigenschaften 1. bis 4. dienen zur axiomatischen Einführung der Chernklassen (vgl. z.B. [Hi], [BT] oder [GH]).

Es gilt darüberhinaus noch das Spaltungsprinzip: Um eine Polynom-Identität in den Chernklassen zu beweisen, reicht es aus, dies unter der Annahme zu tun, die beteiligten Bündel seien Summen von Geradenbündeln.

Im Zusammenhang mit den Chernklassen gilt der folgende Satz (vgl. [St] oder [DFN] Part II).

Satz 4. *Zwei $SU(2)$-Bündel über S^4 sind genau dann isomorph, wenn ihre zweiten Chernklassen übereinstimmen.*

Für die Chernklasse eines Bündels E des im Satz angegebenen Typs, also eines $SU(2)$-Bündels über S^4, gilt wegen $c_1(E) = \mathrm{Spur}(F) = 0$ für die $su(2)$-wertige 2-Form F

$$c(E) = 1 + c_2(E).$$

In Verbindung mit reellen Vektorbündeln $\tilde{E}(M, \pi, \mathbb{R}, GL_r\mathbb{R})$ gibt es ebenfalls charakteristische Klassen. Sie heißen Pontrijaginklassen, und sind lokal über die Krümmung F eines Zusammenhangs D auf $\tilde{E}$ definiert durch

$$p(\tilde{E}, D) = \det(1 + \frac{1}{2\pi} F).$$

Diese Definition ist wieder unabhängig von der Wahl der Trivialisierung, und die Cohomologieklasse $p(E) = [p(E, D)]$ ist unabhängig vom gewählten Zusammenhang. Für einen $O(r)$-Zusammenhang ist $F = -F^\top$ und $\det(1 + \frac{1}{2\pi}F) = \det(1 - \frac{1}{2\pi}F)$. Deshalb ist p ein gerades Polynom in F, und man schreibt

$$p(\tilde{E}) = 1 + p_1(\tilde{E}) + p_2(\tilde{E}) + \dots$$

mit $p_j(\tilde{E}) \in H^{4j}(M, \mathbb{R})$. Es gilt z.B. $p_1(\tilde{E}) = -\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Spur}(F \wedge F)$ und $p_{\frac{r}{2}}(\tilde{E}) = (\frac{1}{2\pi})^r \det(F)$ falls r gerade ist. Auch hier sieht man sofort $p_j(\tilde{E}) = 0$ für $2j > r$ oder $4j > n$. Die Pontrijaginklassen haben ähnliche Eigenschaften wie die Chernklassen. Interessant ist die Beziehung zwischen Chern- und Pontrijaginklassen. Dazu sei $\tilde{E}^{\mathbb{C}}$ das komplexifizierte Bündel zu $\tilde{E}$. $\tilde{E}^{\mathbb{C}}$ ist ein komplexes Vektorbündel vom Rang r. Dann gilt

$$p_j(\tilde{E}) = (-1)^j c_{2j}(\tilde{E}^{\mathbb{C}}).$$

Umgekehrt sei E ein komplexes Vektorbündel vom Rang r und $E_{\mathbb{R}}$ sei E interpretiert als reelles Vektorbündel vom Rang $2r$. Dann gilt $E_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}} \cong E \oplus \bar{E} \cong E \oplus E^*$ und man setzt $p_j(E) = p_j(E_{\mathbb{R}}) = (-1)^j c_{2j}(E_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}})$. Damit ist wegen $c(E_{\mathbb{R}}^{\mathbb{C}}) = c(E)c(E^*)$ schließlich

$$p_j(E) = \sum_{k+l=2j} (-1)^l c_k(E) c_l(E) \quad \text{z.B.} \quad p_1(E) = c_1(E)^2 - 2c_2(E).$$

Als Pontrijaginklasse einer Mannigfaltigkeit M bezeichnet man diejenige des Tangentialsbündel, also $p(M) = p(TM)$. Sei M eine orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $2m$, mit Tangentialbündel TM mit Strukturgruppe $SO(2m)$. Dann ist die Eulerklasse $e(M)$ von M definiert als die formale Quadratwurzel aus $p_m(M)$:

$$e(M)e(M) = p_m(M).$$

Das Vorzeichen ist entsprechend der Orientierung zu wählen. So definiert ist $e(M)$ eine $2m$-Form auf M und es gilt der Satz von Gauß-Bonnet-Chern.

Satz 5. *Ist M eine kompakte, orientierte Mannigfaltigkeit, so gilt für die Eulercharakteristik von M:*

$$\chi(M) = \int_M e(M).$$

Im Falle ungerader Dimension verschwinden beide Seiten dieser Gleichung.

Außerdem gilt ebenfalls die folgende Identität (vgl [BT] , [Hi] oder [Fr]):

Satz 6. *Ist M eine kompakte, orientierte, Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension 4, so gilt für die Signatur von M*

$$\sigma(M) = \frac{1}{3}\int_M p_1(M) = \frac{1}{24\pi^2}\int_M Spur(F \wedge F) = \frac{1}{24\pi^2}\int_M (|W_+|^2 - |W_-|^2).$$

Dabei sind die Bezeichnungen aus Kapitel 4.1 für den Weyltensor übernommen worden.

Beispiel: Im Fall der 4-Sphäre gilt $\sigma(S^4) = 0$, denn es gilt $W = 0$ (vgl. Kapitel 4.1).

Bibliography

[Ac] Alfred Actor, *Classical solutions of SU(2) Yang-Mills theories.* Rev. Mod. Phys. 51 (1979) S.461-526

[AHS] M. F. Atiyah, N. J. Hitchin, I. M. Singer, *Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry.* Proc. R. Soc. Lond. A. 162 (1978) S.425-461

[At] M. F. Atiyah, *Geometry of Yang-Mills Field.* Lezioni Fermiane, Acadamia Nazionale dei Lincei & Scuola Normale Superiore, Pisa 1979

[AW] M. F. Atiyah, R. S. Ward, *Instantons and Algebraic Geometry.* Commun. Math. Phys. 55 (1977) S.117-124

[BA] D. Bohm, Y. Aharonov, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory.* Phys. Rev. 115.3 (1959) S.485-491

[BCW] Claude W. Bernard, Norman H. Christ, Alan H. Guth, Erick J. Weinberg, *Pseudoparticle parameters for arbitrary gauge groups.* Phys. Rev. D16 (1977) S.2967-2977

[BL] Jean Pierre Bourguignon, H. Blaine Lawson, *Yang-Mills Theory: its physical origins and differential geometric aspects* in: *Seminar on Differential Geometry.* Princeton University Press 1982 S.395-421

[Bo] Jean Pierre Bourguignon, *Yang-Mills Theory: The differential geometric side* in: *Differential Geometry, Proceedings, Lyngby.* LNM 1263 Springer-Verlag 1985

[BT] Raoul Bott, Loring W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology.* GTM 82 Springer-Verlag1982

[BtD] Theodor Bröcker, Tammo tom Dieck, *Representations of compact Lie Groups.* GTM 98 Springer-Verlag 1985

[CWS] Norman H. Christ, Erick J. Weinberg, Nancy K. Stanton, *General self-dual Yang-Mills solutions.* Phys. Rev. D 18.6 (1978) S.136-148

[DFN] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry - Methods and Applications Part I - III.* GTM 93, 104, 124 Springer-Verlag 1984, 1985, 1990

[Do] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds.* Clarendon Press, Oxford 1997

[DM] V. G. Drinfeld, Yu. I. Manin, *A Discription of Instantons.* Commun. Math. Phys. 63 (1978) S.177-192

[DV] A. Douady, J.-L. Verdier (Eds.), *Les Equations de Yang-Mills.* Société Mathematique de France, astérique 71-72, 1980

[Er] Herman Erlichson, *Aharonov-Bohm Effekt - Quantum Effects on Charged Particles in Field-Free Regions.* Am. Jour. Phys. 38-2 (1970) S.162-173

[Fr] Thomas Friedrich (Ed.), *Self-dual Riemannian Geometry and Instanton.* Teubner-Verlag 1981

[FU] Daniel S. Freed, Karen K. Uhlenbeck, *Instantons and Four-Manifolds.* Springer-Verlag 1984

[GH] Phillip Griffiths, Joseph Harris, *Principles of Algebraic Geometry.* John Wiley & Sons 1978

[GHL] Sylvestre Gallot, Dominique Hulin, Jacques Lafontaine, *Riemannian Geometry.* Springer-Verlag 1990

[GHV] Werner Greub, Stephen Halperin, Ray Vanstone, *Connections, Curvature and Cohomology Vol 1 - 3.* Academic Press 1972, 1973, 1976

[GP] David Groisser, Thomas H. Parker, *The Riemannian Geometry of the Yang-Mills Moduli Space.* Commun. Math. Phys. 112 (1987) S.663-689

[GS] M. Göckeler, T. Schücker, *Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity.* Cambridge University Press,1987

[Hi] Friedrich Hirzebruch, *Topological Methods in Algebraic Topology.* Springer-Verlag 1978

[Hu] Dale Husemoller, *Fibre Bundles, 2nd Edition.* Springer-Verlag 1966

[JR] R. Jackiw, C. Rebbi, *Conformal properties of a Yang-Mills pseudoparticle.* Phys. Rev. D14 (1976) S.517-523

[KN] Shoshichi Kobayashi, Katsumi Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Volume I.* Wiley Classics Library 1996

[La] H. Blaine Lawson, T*he Theory of Gauge Fields in Four Dimensions.* Regional Conference Series in Mathematics No. 58, 1985

[Mo] K. Moriyasu, *An Elementary Primer for Gauge Theory.* World Scientific Publishing Co. 1983

[MS] John W. Milnor, James D. Stasheff, *Characteristic Classes.* Princeton University Press 1974

[Na] Mikio Nakahara, *Geometry, Topology and Physics.* Adam Hilger 1990

[Nas] Charles Nash, *Differential Topology and Quantum Field Theory.* Academic Press 1991

[Ra] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons.* North Holland Publishing Company 1982

[Re] Hans Jörg Reiffen, *Differentialgeometrie.* Unveröffentlichtes Vorlesungsskript, Universität Osnabrück 1996

[Si] I. M. Singer, *The Geometry of the Orbit Space for Non-Abelian Gauge Theories.* Phys. Scripta 24 (1981) S.817-820

[So] Gerhard Soff, *Allgemeine Relativitätstheorie.* Vorlesungsskript, Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main 1989

[Sp] Heinz Spindler, *Differentialgeometrie.* Unveröffentlichtes Vorlesungsskript, Universität Osnabrück 1997

[St] Norman Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles.* Princeton University Press 1951

[SW] R. Sulanke, P. Wintgen, *Differentialgeometrie und Faserbündel.* Birkhäuser Verlag Basel 1972

[Ta] Clifford Henry Taubes, *Physical and Mathematical Applications of Gauge Theories.* AMS Not. 33 (1986) S.707-715

[tHo] Gerard t´Hooft, *Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle.* Phys. Rev. D14 (1976) S.3432-3450

[Wa] Rolf Walter, *Differentialgeometrie.* B.I.-Wissenschaftsverlag 1989

[We1] Hermann Weyl, *Reine Infinitesimalgeometrie.* Math. Z. 2 (1918) S.384-411

[We2] Hermann Weyl, *Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie.* Annalen der Physik IV.59 (1919) S.101-133

[We3] Hermann Weyl, *Raum - Zeit - Materie, achte Auflage.* Springer-Verlag 1993

[WW] R. S. Ward, Raymond O. Wells, *Twistor Geometry and Field Theory.* Cambridge University Press 1990

[YM] C. N. Yang, R. L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin an Isotopic Gauge Invariance.* Phys. Rev. 96.1 (1954) S.191-195