

Draft

Grundlagen der Kartographie I

Geometrische Abbildungen

Frank Klinker

TU Dortmund, Fakultät für Mathematik, 44221 Dortmund
frank.klinker@math.tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlagen der Flächentheorie	1
2 Geometrische Abbildungen	6
3 Flächen- und winkeltreue Abbildungen zwischen Kegel und Zylinder	13
4 Lokale Isometrien zwischen Zylinder, Kegel und Ebene	16
5 Ebene und Zylinder als „Grenzfälle“ des Kegels	19
Literatur	25

1 Grundlagen der Flächentheorie

Wir nutzen die folgenden Notationen im Zusammenhang mit Flächen im \mathbb{R}^3 .

Definition 1.1. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Fläche*, wenn es für alle $p \in M$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ mit $p \in V$ und eine Abbildung $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, sodass

1. $\alpha(U) = M \cap V$,
2. $\alpha : U \rightarrow \alpha(U)$ ist ein Homöomorphismus,
3. $D_u\alpha$ hat für alle $u \in U$ vollen Rang zwei.

Im Zusammenhang mit dieser Definition nutzen folgenden Bezeichnungen:

Bezeichnung 1.2. • Die Abbildung $\alpha : U \rightarrow \alpha(U) = M \cap V \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Parametrisierung* von M um p .

- $u = (u^1, u^2) \in U$ heißen die *Koordinaten* des Punktes $p = \alpha(u)$.
- $\alpha^{-1} : \alpha(U) \rightarrow U$ mit $\alpha^{-1}(p) = (u^1(p), u^2(p))$ heißt *Koordinatensystem* oder *Karte* und die $u^i : \alpha(U) \rightarrow \mathbb{R}$ heißen *Koordinatenfunktionen*. $\alpha(U) = M \cap V$ heißt *Koordinatenumgebung*.
- Eine Menge $\{U_i, \alpha_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ von Parametrisierungen $\alpha_i : U_i \rightarrow M$ heißt *Atlas* von M , wenn sie ganz M überdecken, d.h.

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i(U_i) = M.$$

Der Atlas (und dann auch die Fläche) heißt *glatt*, wenn alle $\alpha_i : U_i \rightarrow \alpha_i(U_i)$ glatte Diffeomorphismen sind.

Definition 1.3. Eine Fläche, deren Atlas genau eine Karte enthält, nennen wir *parametrisiertes Flächenstück*.

Wir werden im Folgenden stets parametrisierte Flächenstücke betrachten. D.h. es ist stets $M = \alpha(U)$ für eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine Abbildung $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, die die Eigenschaften aus 1.(a),(b) und 2. aus Definition 1.1 erfüllt. Wir werden das nicht betonen, sondern sprechen allgemein von Fläche.

In Ausnahmefällen werden wir Bilder des Randes von U oder einen Teil davon ebenfalls als zur Fläche gehörig betrachten. Dabei nehmen wir gegebenenfalls in Kauf, dass α dann nicht mehr injektiv ist.

Die zunächst algebraische Definition des Tangentialraums $T_p M$ an einen Punkt p einer Fläche M lautet:

Definition/Satz 1.4 ([1, Definition/Satz 3.8]). *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in M$. Weiter sei $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche mit $p \in \alpha(U)$. Dann ist die Menge*

$$T_p M := \text{Im}(D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha) = \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(\alpha^{-1}(p)), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(\alpha^{-1}(p)) \right\}$$

unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Die Menge $T_p M$ heißt der Tangentialraum der Fläche M im Punkt p . Die Vektoren $v \in T_p M$ heißen Tangentialvektoren.

Etwas geometrischer wird das durch den folgenden Satz

Satz 1.5 ([1, Satz 3.24]). *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in M$. Sei weiter $c :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ eine Raumkurve mit $c(0) = p$. Dann ist einerseits $c'(0) \in T_p M$ und andererseits gibt es zu $v \in T_p M$ eine Raumkurve $c :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Das heißt also:*

$$T_p M = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \exists c :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M : c(0) = p, c'(0) = v\} .$$

Mit Hilfe des Tangentialraums haben wir das Differential einer Abbildung $F : M \rightarrow M'$ zwischen zwei Flächen definiert.

Definition 1.6 ([1, Definition 3.27]). Sei $F : M_1 \rightarrow M_2$ eine Abbildung zwischen zwei Flächen. Dann ist die Abbildung

$$d_p F : T_p M_1 \rightarrow T_{F(p)} M_2$$

definiert durch

$$d_p F(v) := (F \circ c)'(0) \in T_{F(p)} M_2 .$$

Dabei ist $c :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M_1$ eine Kurve, die $v \in T_p M_1$ repräsentiert, d.h. $c(0) = p$ und $c'(0) = v$.

Dieses Differential lässt sich in lokalen Parametrisierungen wie folgt darstellen.

Satz 1.7 ([1, Satz 3.28]). *Für $F : M_1 \rightarrow M_2$ ist $d_p F : T_p M_1 \rightarrow T_{F(p)} M_2$ unabhängig von der gewählten Kurve. Insbesondere ist die Matrixdarstellung*

von $d_p F$ bezüglich zweier Parametrisierungen $\alpha_1 : U_1 \rightarrow M_1$ um p bzw. $\alpha_2 : U_2 \rightarrow M_2$ um $F(p)$ gegeben durch

$$D_{\alpha^{-1}(p)}(\alpha_2^{-1} \circ F \circ \alpha_1).$$

Mit $f := \alpha_2^{-1} \circ F \circ \alpha_1 : U_1 \rightarrow U_2$ ist das

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{F} & M_2 \\ \alpha_1 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \alpha_2 \\ \mathbb{R}^2 \supset U_1 & \xrightarrow{f} & U_2 \subset \mathbb{R}^2 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc} T_p M_1 & \xrightarrow{d_p F} & T_{F(p)} M_2 \\ D_{\alpha_1^{-1}(p)} \alpha_1 \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow D_{\alpha_2^{-1}(F(p))} \alpha_2 \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{D_{\alpha_1^{-1}(p)} f} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Definition 1.8 ([1, Definition 4.1]). Es sei M eine Fläche. Die Einschränkung des Standardskalarproduktes des \mathbb{R}^3 auf die Tangentialräume liefert eine Abbildung I , die jedem $p \in M$ eine Bilinearform $I_p \in \text{Bil}(T_p M)$ zuordnet, d.h. für $v, w \in T_p M$ ist

$$I_p(v, w) := \langle v, w \rangle.$$

Diese Zuordnung, bzw. die Sammlung von bilinearen Abbildungen I_p , heißt *erste Fundamentalform* von M .

Bemerkung 1.9 ([1, Bemerkung 4.2]). 1. Die erste Fundamentalform liefert an jeder Stelle $p \in M$ ein Skalarprodukt I_p .

2. Es sei $\alpha : U \rightarrow M$ eine Parametrisierung von M . Dann ist die Matrixdarstellung von I_p bezüglich der Standardbasis $\{\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p)\}$ von $T_p M$ gegeben durch

$$\begin{aligned} I_p^{(\alpha)} &= (D_{\alpha^{-1}(p)} \alpha)^T D_{\alpha^{-1}(p)} \alpha \\ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p) \right\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{array}{ccc}
 & T_p M \times T_p M & \\
 & \uparrow & \searrow I_p \\
 D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha \times D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha & & \mathbb{R} \\
 & \uparrow & \nearrow I_p^{(\alpha)} \\
 & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &
 \end{array}$$

3. Wenn wir den Punkt p in $\alpha(U)$ variieren, lassen sich die Einträge der Matrix $I_p^{(\alpha)}$ als Abbildungen von U nach \mathbb{R} interpretieren. Wir erhalten also eine Abbildung $I^{(\alpha)} : U \rightarrow \text{Bil}(\mathbb{R}^2) \simeq M_2\mathbb{R}$ mit

$$u \mapsto I_u^{(\alpha)} := I_{\alpha(u)}^{(\alpha)}.$$

Wir benutzen, wie üblich in der Literatur, manchmal die Bezeichnung

$$I^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

mit $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 1.10. 1. Es sei $c : I \rightarrow M$ eine Kurve auf der Fläche M . Dann heißt

$$\mathcal{L}(c) := \int_I \sqrt{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt$$

die *Länge der Kurve* c .

2. Es sei M eine Fläche und $V \subset M$ so, dass $V = \alpha(U)$, für eine Parametrisierung $\alpha : U_0 \rightarrow M$ mit $U \subset U_0$. Dann heißt

$$\mathcal{A}(V) := \iint_U \sqrt{\det(I_u^{(\alpha)})} d^2(u_1, u_2)$$

der *Flächeninhalt* von V .

Bemerkung 1.11. 1. Ist in Definition 1.10.1 die Kurve c in einer Parametrisierung $\alpha : U \rightarrow M$ gegeben durch $c(t) = \alpha \circ \beta(t)$ mit $\beta : I \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$, so ist

$$\mathcal{L}(c) = \int_I \sqrt{\beta'(t)^T I_{\beta(t)}^{(\alpha)} \beta'(t)} dt.$$

2. Definition 1.10.2 ist wegen der Transformationsformel für mehrdimensionale Integral unabhängig von der Wahl der Parametrisierung, siehe [2, Satz 17.20].
3. Die Definition des Flächeninhalts lässt sich auf Teilmengen erweitern, die nicht ganz in einer Parametrisierung enthalten sind. Dazu überdecken wir diese mit Teilmengen mit der Eigenschaft aus Definition 1.10.2 und addieren die Teilintegrale.

2 Geometrische Abbildungen

2.1 Längenerhaltung

Definition 2.1 ([1, Definition 4.7]). Es seien $M, \hat{M} \subset \mathbb{R}^3$ Flächen mit ersten Fundamentalformen I, \hat{I} .

1. Es sei $V \subset M$ eine offene Teilmenge von M und $F : V \rightarrow \hat{M}$ eine glatte Abbildung. F heißt *lokale Isometrie*, wenn für $p \in V$ und $v, w \in T_p M$

$$I_p(v, w) = \hat{I}_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(w)).$$

Gibt es für jeden Punkt $p \in M$ eine offene Menge $V \subset M$, die p enthält, und eine Abbildung gemäß 1, dann nennt man M und \hat{M} *lokal isometrisch*.

2. Ist $F : M \rightarrow \hat{M}$ ein Diffeomorphismus der die Eigenschaft aus 1 erfüllt, dann heißt F eine *Isometrie* und M und \hat{M} heißen *isometrisch*.

Bemerkung 2.2 ([1, Bemerkung 4.8]). 1. Die Gültigkeit der Identität aus Definition 2.1.1 lässt sich wie folgt überprüfen:

Wir wählen Parametrisierungen $\alpha : U \rightarrow M$ und $\hat{\alpha} : \hat{U} \rightarrow \hat{M}$, und testen statt dessen für $f := \hat{\alpha}^{-1} \circ F \circ \alpha : U \rightarrow \hat{U}$ die Gültigkeit von

$$I_u^{(\alpha)} = (D_u f)^T \cdot \hat{I}_{f(u)}^{(\hat{\alpha})} \cdot D_u f.$$

2. Gibt es Parametrisierungen $\alpha : U \rightarrow M$ und $\hat{\alpha} : U \rightarrow \hat{M}$ auf der selben Grundmenge, so dass für die jeweiligen lokalen Darstellungsmatrizen $I_{\alpha(u)}^{(\alpha)} = \hat{I}_{\hat{\alpha}(u)}^{(\hat{\alpha})}$ gilt, dann ist die Abbildung $\hat{\alpha} \circ \alpha^{-1} : \alpha(U) \rightarrow \hat{M}$ eine lokale Isometrie.

3. Ist $F : M \rightarrow \hat{M}$ eine Isometrie und ist $\alpha : U \rightarrow M$ eine Parametrisierung, dann ist $\hat{\alpha} = F \circ \alpha : U \rightarrow \hat{M}$ eine Parametrisierung von \hat{M} . Für diese beiden Parametrisierungen ist $f = \text{id}|_U$ und es gilt Punkt 2.

Definition 2.3. Es seien $M, \hat{M} \subset \mathbb{R}^3$ Flächen. Ein Diffeomorphismus $F : M \rightarrow \hat{M}$ heißt *geometrisch längenerhaltend*, wenn für alle Kurven $c : I \rightarrow M$ die entsprechende Bildkurve $F \circ c : I \rightarrow \hat{M}$ die gleiche Länge hat, d.h.

$$\mathcal{L}(c) = \mathcal{L}(F \circ c).$$

Die beiden Begriffe sind isometrisch und geometrisch längenerhalten sind eng verwandt:

Satz 2.4. *Ein Diffeomorphismus $F : M \rightarrow \hat{M}$ ist genau dann eine Isometrie, wenn er geometrisch längenerhaltend ist.*

Beweisskizze. „ \implies “:

Diese Richtung zeigen wir direkt durch Einsetzen der Eigenschaft. Es sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine beliebige Kurve. Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F \circ c) &= \int_a^b \sqrt{\hat{I}_{F(c(t))}((F \circ c)'(t), (F \circ c)'(t))} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\hat{I}_{F(c(t))}(d_{c(t)}F(c'(t)), d_{c(t)}F(c'(t)))} dt \\ &\stackrel{\text{Def. 2.1}}{=} \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt \\ &= \mathcal{L}(c). \end{aligned}$$

„ \impliedby “:

Es sei $c : J \rightarrow M$ eine beliebige Kurve. Dann folgt aus Definition 2.3

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c) &= \mathcal{L}(F \circ c) \\ \implies \int_J \sqrt{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt &= \int_J \sqrt{\hat{I}_{F(c(t))}((F \circ c)'(t), (F \circ c)'(t))} dt \\ \implies \sqrt{I_{c(s_1)}(c'(s_1), c'(s_1))} \int_J dt &= \sqrt{\hat{I}_{F(c(s_2))}((F \circ c)'(s_2), (F \circ c)'(s_2))} \int_J dt \\ \implies \sqrt{I_{c(s_1)}(c'(s_1), c'(s_1))} &= \sqrt{\hat{I}_{F(c(s_2))}((F \circ c)'(s_2), (F \circ c)'(s_2))} \end{aligned}$$

für zwei Punkte $s_1, s_2 \in J$. Die vorletzte Folgerung ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung, siehe z.B [2, Satz 9.36].

Wir wählen nun eine beliebige Verfeinerung $J \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$ des Intervalls J , deren Länge gegen Null konvergiert, und wir schreiben $t_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Betrachten wir nun die obige Rechnung für die Kurven $c_n := c|_{J_n}$, so gibt es jeweils Punkte $s_{1,n}, s_{2,n} \in J_n$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} s_{1,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2,n} = t_0$, die die obige Gleichung erfüllen. Somit gilt im Grenzwert

$$I_{c(t_0)}(c'(t_0), c'(t_0)) = \hat{I}_{F(c(t_0))}((F \circ c)'(t_0), (F \circ c)'(t_0)).$$

Wir können diese Rechnung nun ausgehend von einem beliebigen Punkt $p \in M$ und einem beliebigen Vektor $v \in T_p M$ starten, indem wir eine Kurve $c : J \rightarrow M$ mit $c(t_0) = p$ und $c'(t_0) = v$ wählen und erhalten mit $(F \circ c)'(t_0) = d_{c(t_0)}F(c'(t_0)) = d_p F(v)$

$$I_p(v, v) = \hat{I}_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(v))$$

für alle $p \in M$ und $v \in T_p M$.

Nutzen wir die Polarisierungsformel für symmetrische Bilinearformen

$$I_p(v, w) = \frac{1}{2}(I_p(v + w, v + w) - I_p(v, v) - I_p(w, w))$$

und analog für $\hat{I}_{F(p)}$, so folgt aus unserem obigen Resultat für alle $v, w \in T_p M$ schließlich

$$I_p(v, w) = \hat{I}_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(w)). \quad \square$$

2.2 Flächenerhaltung

Definition 2.5. Es seien $M, \hat{M} \subset \mathbb{R}^3$ Flächen mit ersten Fundamentalformen I, \hat{I} .

1. Es sei $V \subset M$ eine offene Teilmenge von M und $F : V \rightarrow \hat{M}$ eine glatte Abbildung. F heißt *lokal flächenerhaltend*, wenn für $p \in V$

$$\det(I_p) = \det(\hat{I}_{F(p)} \circ (d_p F \times d_p F)).$$

2. Ist $f : M \rightarrow \hat{M}$ ein Diffeomorphismus der die Eigenschaft aus 1. erfüllt, dann heißt f *flächenerhaltend*.

Bemerkung 2.6. 1. Die Gültigkeit der Identität aus Definition 2.5.1 lässt sich wie folgt überprüfen:

Wir wählen Parametrisierungen $\alpha : U \rightarrow M$ um $p \in M$ und $\hat{\alpha} : \hat{U} \rightarrow \hat{M}$ um $F(p) \in \hat{M}$, und testen mit $f := \hat{\alpha}^{-1} \circ F \circ \alpha : U \rightarrow \hat{U}$ die Gültigkeit von

$$\det(I_u^{(\alpha)}) = \det((D_u f)^T \cdot \hat{I}_{f(u)}^{(\hat{\alpha})} \cdot D_u f)$$

in $u \in U$ mit $\alpha(u) = p$.

Definition 2.7. Es seien $M, \hat{M} \subset \mathbb{R}^3$ Flächen. Ein Diffeomorphismus $F : M \rightarrow \hat{M}$ heißt *geometrisch flächenerhaltend*, wenn für alle Mengen $V \subset M$ die entsprechende Bildmenge $F(V) \subset \hat{M}$ den gleichen Flächeninhalt hat wie V , d.h.

$$\mathcal{A}(V) = \mathcal{A}(F(V)).$$

Die beiden Begriffe flächenerhaltend und geometrisch flächenerhaltend sind eng verwandt:

Satz 2.8. *Ein Diffeomorphismus $F : M \rightarrow \hat{M}$ ist genau dann flächenerhaltend, wenn er geometrisch flächenerhaltend ist.*

Beweisskizze. „ \implies “:

Diese Richtung zeigen wir direkt durch Einsetzen der Eigenschaft. Es sei $V = \alpha(U)$ für eine Parametrisierung $\alpha : U \rightarrow M$ von M . Dann ist $\hat{\alpha} = F \circ \alpha : U \rightarrow \hat{M}$ eine Parametrisierung von \hat{M} mit $\hat{\alpha}(U) = F(V)$. Für diese zwei Parametrisierungen ist $F = \hat{\alpha} \circ \alpha^{-1}$, also $f = \text{id}|_U$. Die Flächenhaltung lautet somit

$$\det(I_u^{(\alpha)}) = \det((D_u f)^T I_{f(u)}^{(\hat{\alpha})} D_u f) = \det(I_u^{(\hat{\alpha})}).$$

Das liefert sofort

$$\mathcal{A}(F(V)) = \int_U \sqrt{\det(I_u^{(\hat{\alpha})})} d^2 u = \int_U \sqrt{\det(I_u^{(\alpha)})} d^2 u = \mathcal{A}(V).$$

Ist V nicht in einer Parametrisierung enthalten, so zerlegen wir V in kleine Teile, die diese Eigenschaft haben, und argumentieren dann für jede Teilfläche wie oben.

„ \Leftarrow “:

Es sei $p \in M$ und $V = \alpha(U) \subset M$ mit $p \in U$ eine Parametrisierung von M um p . Weiter sei nun $\hat{\alpha}$ die Parametrisierung von \hat{M} um $F(p)$ wie oben. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(V) &= \mathcal{A}(F(V)) \\ \implies \int_U \sqrt{\det(I_u^{(\hat{\alpha})})} d^2u &= \int_U \sqrt{\det(I_u^{(\alpha)})} d^2u \\ \implies \sqrt{\det(I_{x_1}^{(\alpha)})} \int_U d^2u &= \sqrt{\det(\hat{I}_{x_2}^{(\hat{\alpha})})} \int_U d^2u \\ \implies \det(I_{x_1}^{(\alpha)}) &= \det(\hat{I}_{x_2}^{(\hat{\alpha})}) \end{aligned}$$

für zwei Punkte $x_1, x_2 \in J$. Die vorletzte Folgerung ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung, siehe z.B. [2, Folgerung 17.14].

Wir wählen nun zu $u_0 = \alpha^{-1}(p) \in U$ einen Ball $B_{R_1}(u_0) \subset U$ und eine Verfeinerung $U \supset B_{R_1}(u_0) \supset B_{R_2}(u_0) \supset \dots$ von U , sodass $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$ und damit $u_0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{R_n}(u_0)$.

Betrachten wir nun die obige Rechnung für die Flächen $V_n := \alpha(B_{R_n}(u_0))$, so gibt es jeweils Punkte $x_{1,n}, x_{2,n} \in B_{R_n}(u_0)$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{1,n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2,n} = u_0$, die die obige Gleichung erfüllen. Im Grenzwert liefert das

$$\det(I_{u_0}^{(\alpha)}) = \det(\hat{I}_{u_0}^{(\hat{\alpha})}).$$

Da p zu Anfang beliebig gewählt wurde, ist die Aussage gezeigt. \square

2.3 Winkelerhaltung

Definition 2.9. Es seien $M, \hat{M} \subset \mathbb{R}^3$ Flächen mit ersten Fundamentalformen I, \hat{I} .

1. Es sei $V \subset M$ eine offene Teilmenge von M und $F : V \rightarrow \hat{M}$ eine glatte Abbildung. F heißt *lokal winkelerhaltend*, wenn für alle $p \in V$

und $v, w \in T_p M$

$$\frac{I_p(v, w)}{\sqrt{I_p(v, v)}\sqrt{I_p(w, w)}} = \frac{\hat{I}_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(w))}{\sqrt{\hat{I}_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(v))}\sqrt{\hat{I}_{F(p)}(d_p F(w), d_p F(w))}}.$$

2. Ist $F : M \rightarrow \hat{M}$ ein Diffeomorphismus, der die Eigenschaft aus 1. erfüllt, dann heißt f *winkelerhaltend*.

Definition 2.10. Es seien $M, \hat{M} \subset \mathbb{R}^3$ Flächen. Ein Diffeomorphismus $F : M \rightarrow \hat{M}$ heißt *konforme Abbildung*, wenn es eine Funktion $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ gibt, sodass für alle $p \in M$

$$\rho(p)I_p = \hat{I}_{F(p)} \cdot (d_p F \times d_p F).$$

Die beiden Begriffe winkelerhaltend und konform sind eng verwandt:

Satz 2.11. *Ein Diffeomorphismus $f : M \rightarrow \hat{M}$ ist genau dann konform, wenn er winkelerhaltend ist.*

Beweisskizze. „ \implies “:

Auch hier erhalten wir diese Richtung durch nachrechnen. Es sei $p \in M$ und $v, w \in T_p M$ und ρ wie in Definition 2.10 Dann ist, wie behauptet,

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{I}_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(w))}{\sqrt{\hat{I}_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(v))}\sqrt{\hat{I}_{F(p)}(d_p F(w), d_p F(w))}} \\ &= \frac{\rho(p)I_p(v, w)}{\sqrt{\rho(p)I_p(v, v)}\sqrt{\rho(p)I_p(w, w)}} = \frac{I_p(v, w)}{\sqrt{I_p(v, v)}\sqrt{I_p(w, w)}}. \end{aligned}$$

„ \impliedby “:

Es seien $v_1, v_2 \in T_p M$ mit $I_p(v_1, v_1) = I_p(v_2, v_2) = 1$ und $I_p(v_1, v_2) = 0$. Weiter schreiben wir $V_1 = d_p F(v_1), V_2 = d_p F(v_2) \in T_{F(p)} \hat{M}$. Wegen der Winkelerhaltung ist ebenfalls $\hat{I}_{F(p)}(V_1, V_2) = 0$. Wir zeigen weiter

- Es gilt $\hat{I}_{F(p)}(V_1, V_1) = \hat{I}_{F(p)}(V_2, V_2)$ und diesen Wert nennen wir $\rho_0 > 0$.

- Für alle Vektoren $v \in T_p M$ mit $I_p(v, v) = 1$ gilt $\hat{I}_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(v)) = \rho_0$.

Einerseits ist

$$\begin{aligned} & \frac{I_p(v_1 + v_2, v_1)}{\sqrt{I_p(v_1 + v_2, v_1 + v_2)} \sqrt{I_p(v_1, v_1)}} \\ &= \frac{I_p(v_1, v_1)}{\sqrt{I_p(v_1, v_1) + I_p(v_2, v_2)} \sqrt{I_p(v_1, v_1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} & \frac{\hat{I}_{F(p)}(V_1 + V_2, V_1)}{\sqrt{\hat{I}_{F(p)}(V_1 + V_2, V_1 + V_2)} \sqrt{\hat{I}_{F(p)}(V_1, V_1)}} \\ &= \frac{\hat{I}_{F(p)}(V_1, V_1)}{\sqrt{\hat{I}_{F(p)}(V_1, V_1) + \hat{I}_{F(p)}(V_2, V_2)} \sqrt{\hat{I}_{F(p)}(V_1, V_1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\hat{I}_{F(p)}(V_2, V_2)}{\hat{I}_{F(p)}(V_1, V_1)}}}. \end{aligned}$$

Wegen der Winkelerhaltung stimmen beide Resultate überein. Daher gilt tatsächlich

$$\frac{\hat{I}_{F(p)}(V_2, V_2)}{\hat{I}_{F(p)}(V_1, V_1)} = 1.$$

Für jeden Vektor $v \in T_p M$ mit $I_p(v, v) = 1$ gibt es eine reelle Zahl t , sodass

$$v = \cos t v_1 + \sin t v_2.$$

Damit ist $d_p F(v) = \cos t V_1 + \sin t V_2$ und

$$\begin{aligned} \hat{I}_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(v)) &= \hat{I}_{F(p)}(\cos t V_1 + \sin t V_2, \cos t V_1 + \sin t V_2) \\ &= \cos^2 t \rho_0 + \sin^2 t \rho_0 = \rho_0 \end{aligned}$$

Weiter sei $v \in T_p M$ ein beliebiger Vektor. Dann gilt für $v_0 = \frac{1}{\sqrt{I_p(v, v)}} v$ nun

$I_p(v_0, v_0) = 1$ und daher $\hat{I}_{F(p)}(d_p F(v_0), d_p F(v_0)) = \rho_0$. Insgesamt haben wir damit für alle $v \in T_p M$

$$I_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(v)) = I_p(v, v) I_{F(p)}(d_p F(v_0), d_p F(v_0)) = \rho_0 I_p(v, v).$$

Durch Polarisierung, siehe Beweis zu Satz 2.4, erhalten wir hier schließlich

$$I_{F(p)}(d_p F(v), d_p F(w)) = \rho_0 I_p(v, w).$$

Diese Zahl $\rho_0 > 0$ gibt es nun für jeden Punkt $p \in M$ und das liefert eine Funktion $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$. Diese ist differenzierbar, denn in zwei lokalen Parametrisierung $\alpha : U \rightarrow M, \hat{\alpha} : \hat{U} \rightarrow \hat{M}$ gilt für $\rho^{(\alpha)} = \rho \circ \alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^{>0}$

$$\rho^{(\alpha)}(u) = \sqrt{\frac{\det((D_u f)^T \hat{I}_u^{(\hat{\alpha})} D_u f)}{\det(I^{(\alpha)})}}. \quad \square$$

2.4 Abschlussbemerkung

Die Diskussion der geometrischen Abbildungen liefert abschließend den folgenden Satz:

Satz 2.12. *Es sei $F : M \rightarrow \hat{M}$ ein Diffeomorphismus zwischen den Flächen M und \hat{M} . F ist genau dann eine Isometrie, wenn F flächen- und winkelerhaltend ist.*

3 Flächen- und winkeltreue Abbildungen zwischen Kegel und Zylinder

Als Beispiel konstruieren wir in diesem Abschnitt spezielle Abbildungen zwischen Kegel und Zylinder.

Wir betrachten den auf der xy -Ebene stehenden und zur z -Achse symmetrischen Zylinder Z mit Radius R und einen Kegel K , der nach oben geöffnet und ebenfalls zur z -Achse symmetrische ist und dessen Spitze im Ursprung liegt. Als Parametrisierung wählen wir Zylinderkoordinaten und erhalten

$$\alpha_Z :]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow Z \subset \mathbb{R}^3, \quad \alpha_Z(\phi, s) = \begin{pmatrix} R \cos \phi \\ R \sin \phi \\ s \end{pmatrix},$$

$$\alpha_K :]0, 2\pi[\times \mathbb{R}^{>0} \rightarrow K \subset \mathbb{R}^3, \quad \alpha_K(\psi, t) = \begin{pmatrix} at \cos \psi \\ at \sin \psi \\ t \end{pmatrix},$$

wobei der halbe Öffnungswinkel η des Kegels durch $\tan \eta = a$ gegeben ist.

Die ersten Fundamentalformen I^Z und I^K berechnen sich zu

$$\begin{aligned} I_{(\phi,s)}^Z &= (D_{(\phi,s)}\alpha^Z)^T D_{(\phi,s)}\alpha^Z \\ &= \begin{pmatrix} -R \sin \phi & R \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R \sin \phi & 0 \\ R \cos \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I_{(\psi,t)}^K &= (D_{(\psi,t)}\alpha^K)^T D_{(\psi,t)}\alpha^K \\ &= \begin{pmatrix} -at \sin \psi & at \cos \psi & 0 \\ a \cos \psi & a \sin \psi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -at \sin \psi & a \cos \psi \\ at \cos \psi & a \sin \psi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 t^2 & 0 \\ 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir wollen uns nun Abbildungen anschauen, die die Rotationsymmetrie bezüglich der z -Achse erhalten. Das heißt, wir betrachten Abbildungen $F : K \rightarrow Z$ der Form

$$F : K \ni (x, y, z) \mapsto \left(\frac{Rx}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{Ry}{\sqrt{x^2 + y^2}}, h(z) \right) \in Z.$$

In Termen der eingangs gewählten Parametrisierungen liefert das die Abbildung

$$f = \alpha_Z^{-1} \circ F \circ \alpha_K :]0, 2\pi[\times \mathbb{R}^{>0} \rightarrow]0, 2\pi[\times \mathbb{R}, \quad f(\psi, t) = (\psi, h(t))$$

mit $h : \mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}$.

Um über eine Art der Erhaltung zu sprechen brauchen wir noch das Produkt

$$\begin{aligned} (D_{(\psi,t)}f)^T I_{f(\psi,t)}^Z D_{(\psi,t)}f &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h'(t) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h'(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & h'(t)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

das wir mit $I_{(\psi,t)}^K = \begin{pmatrix} a^2 t^2 & 0 \\ 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix}$ vergleichen müssen.

1. F ist flächenerhaltend, wenn

$$\det \begin{pmatrix} a^2 t^2 & 0 \\ 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix} = a^2(a^2 + 1)t^2$$

und

$$\det \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & h'(t)^2 \end{pmatrix} = R^2 h'(t)^2$$

den gleichen Wert liefern. Daraus folgt

$$h'(t) = \frac{a\sqrt{a^2 + 1}}{R} t$$

oder

$$h(t) = \frac{a\sqrt{a^2 + 1}}{2R} t^2.$$

2. F ist winkelerhaltend, wenn es eine Abbildung $\rho :]0, 2\pi[\times \mathbb{R}^{>0} \rightarrow \mathbb{R}^+$ gibt mit

$$\rho(\psi, t) \begin{pmatrix} a^2 t^2 & 0 \\ 0 & a^2 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & h'(t)^2 \end{pmatrix}$$

oder

$$\rho(\psi, t) a^2 t^2 = R^2 \quad \text{und} \quad \rho(\psi, t)(a^2 + 1) = h'(t)^2.$$

Dividiert man beide Gleichungen, so erhält man

$$h'(t) = \frac{R\sqrt{a^2 + 1}}{at}$$

oder

$$h(y) = \frac{R\sqrt{a^2 + 1}}{a} \ln(t).$$

Insbesondere ist der *Konformitätsfaktor*

$$\rho(\psi, t) = \frac{R^2}{a^2 t^2}.$$

In beiden Fällen liefert eine andere Wahl der Integrationskonstanten eine Verschiebung des Bildes im Zylinder in Richtung der z -Achse.

Bemerkung 3.1. • Man sieht insbesondere, dass mit unserer Wahl von Abbildung F eine lokale Isometrie zwischen Z und K nicht realisiert werden kann.

- Da beide Flächen Z und K verschwindende Gaußkrümmungen haben, wissen wir, dass sie lokal isometrisch sind. Außerdem ist die Ebene lokal isometrisch zu Z und K . Diese lokalen Isometrien werden durch das „Aufwickeln der Ebene“ beschrieben.

4 Lokale Isometrien zwischen Zylinder, Kegel und Ebene

Im Folgenden geben wir die in Bemerkung 3.1 beschriebenen Isometrien explizit an.

Dazu betrachten die Ebene E als xy -Ebene des \mathbb{R}^3 mit der Einbettung $\iota : (x, y) \mapsto (x, y, 0)$ als einzige Parametrisierung. Dann ist $I_{(x,y)}^E = \mathbb{1}$.

4.1 Lokale Isometrie zwischen Z und E

Wir betrachten – als Abwandlung der Parametrisierung α_Z von oben – die Parametrisierung

$$\hat{\alpha}_Z :] - \pi R, \pi R[\times \mathbb{R} \longrightarrow Z, \quad \hat{\alpha}_Z(\phi, s) = \begin{pmatrix} R \cos \frac{\phi}{R} \\ R \sin \frac{\phi}{R} \\ s \end{pmatrix}.$$

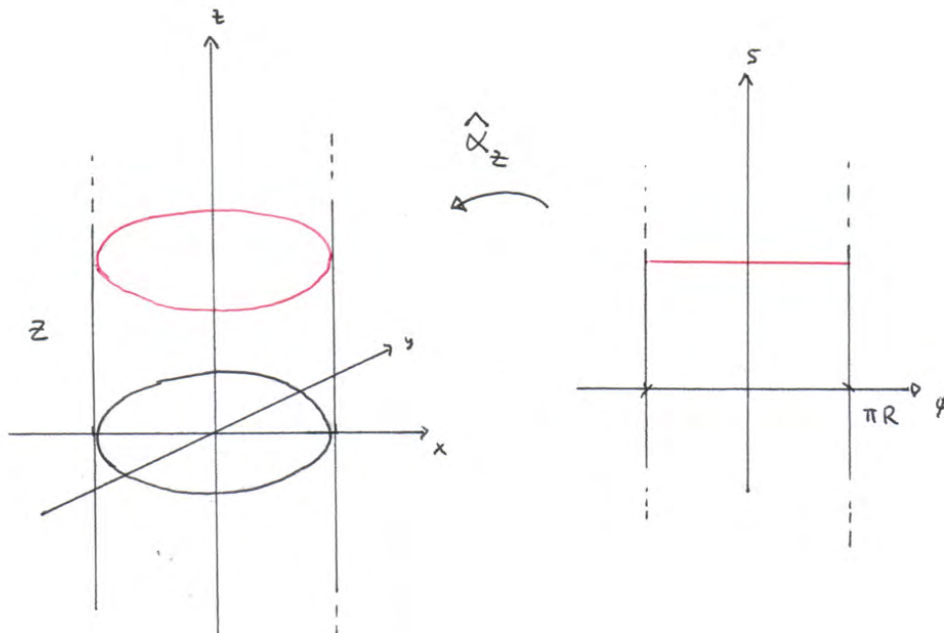
Sie unterscheidet sich von α_Z lediglich durch die Umskalierung und Verschiebung des Polarwinkels, die Höhe wird als Koordinate beibehalten.

Die Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform hat in dieser Parametrisierung die Form

$$\hat{I}_{(\phi,s)}^Z = (D_{(\phi,s)} \hat{\alpha}_Z)^T D_{(\phi,s)} \hat{\alpha}_Z = \mathbb{1}.$$

Wegen Bemerkung 2.2.2 ist die Abbildung $\iota \circ \hat{\alpha}_Z^{-1}$ somit eine Isometrie zwischen den Bildern

$$\hat{\alpha}_Z(] - \pi R, \pi R[\times \mathbb{R}) \subset Z \quad \text{und} \quad \iota(U) =] - \pi R, \pi R[\times \mathbb{R} \times \{0\} \subset E.$$



4.2 Lokale Isometrie zwischen K und E

Wir betrachten wieder den obigen Kegel mit halben Öffnungswinkel η und dazu zwei Abbildungen.

Zunächst die Polarkoordinaten Φ der Ebene mit

$$\Phi :]-\pi, \pi[\times \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(\psi, t) = (t \sin \psi, t \cos \psi)$$

und des Weiteren die folgende Parametrisierung des Kegels

$$\tilde{\alpha}_K :]-\pi \sin \eta, \pi \sin \eta[\times \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow K, \quad \tilde{\alpha}_K(\psi, t) = \begin{pmatrix} t \sin \eta \cos \frac{\psi}{\sin \eta} \\ t \sin \eta \sin \frac{\psi}{\sin \eta} \\ t \cos \eta \end{pmatrix}.$$

Im Gegensatz zur Parametrisierung α_K von oben werden beide Koordinaten – Höhe und Polarwinkel – umskaliert und/oder verschoben; man betrachtet als neue Koordinaten die Schenkellänge und einen umskalierten und verschobenen Polarwinkel. Das sieht man ganz gut, wenn man $a = \tan \eta$ und $t \sin \eta = a(t \cos \eta)$ in $\tilde{\alpha}_K$ einsetzt und das Ergebnis mit α_K vergleicht.

In der Parametrisierung $\tilde{\alpha}_K$ hat die erste Fundamentalform die Matrixdarstellung

$$\tilde{I}_{(\psi,t)}^K = (D_{(\psi,t)}\beta_K)^T D_{(\psi,t)}\beta_K = \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Betrachten wir nun als Parametrisierung die Kombination

$$\hat{\alpha}_K : \Phi([\!-\pi \sin \eta, \pi \sin \eta[\times \mathbb{R}^{>0}) \longrightarrow K, \quad \hat{\alpha}_K(x, y) = \tilde{\alpha} \circ \Phi^{-1}(x, y),$$

so hat die erste Fundamentalform in dieser Parametrisierung die Matrixdarstellung

$$\begin{aligned} \hat{I}_{(x,y)}^K &= (D_{(x,y)}(\Phi^{-1}))^T \tilde{I}_{\Phi^{-1}(x,y)}^K D_{(x,y)}(\Phi^{-1}) \\ &= ((D_{\Phi^{-1}(x,y)}\Phi)^{-1})^T \tilde{I}_{\Phi^{-1}(x,y)}^K (D_{\Phi^{-1}(x,y)}\Phi)^{-1}. \end{aligned}$$

Schreiben wir noch $(x, y) = \Phi(\psi, t)$ und nutzen $D_{(\psi,t)}\Phi = \begin{pmatrix} t \cos \psi & \sin \psi \\ -t \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$, also

$$(D_{(\psi,t)}\Phi)^{-1} = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ t \sin \psi & t \cos \psi \end{pmatrix},$$

so erhalten wir

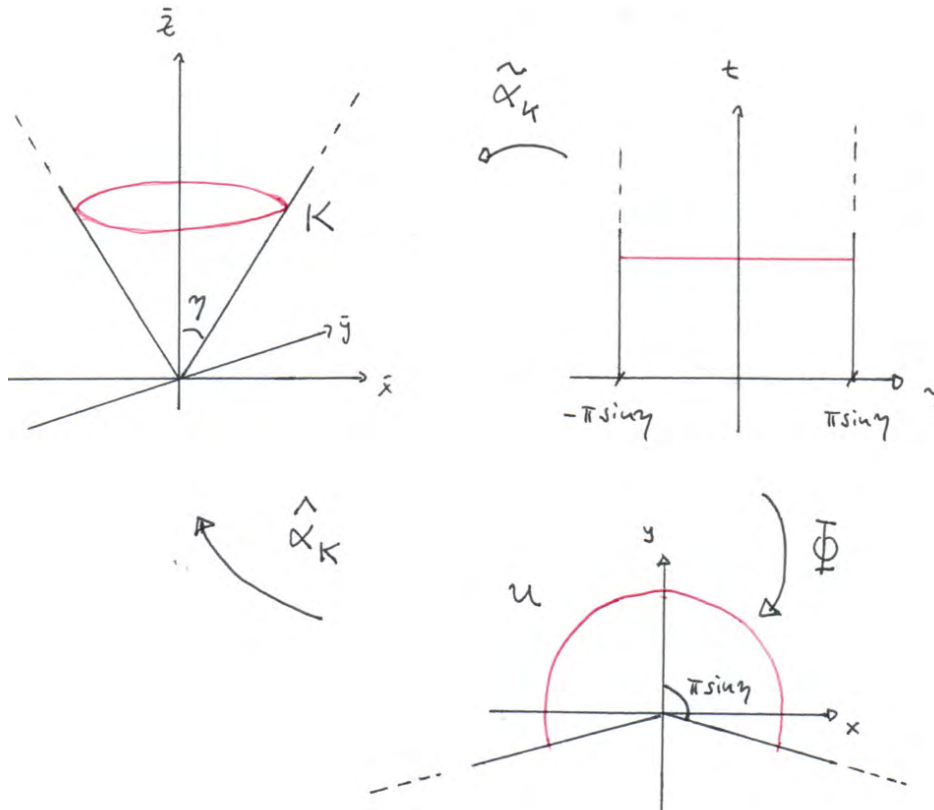
$$\begin{aligned} \hat{I}_{\Phi(\psi,t)}^K &= \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} \cos \psi & t \sin \psi \\ -\sin \psi & t \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ t \sin \psi & t \cos \psi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{t^2} \begin{pmatrix} t^2 & 0 \\ 0 & t^2 \end{pmatrix} = \mathbb{1}. \end{aligned}$$

Wegen Bemerkung 2.2.2 ist die Abbildung $\iota \circ \hat{\alpha}_K^{-1}$ somit eine Isometrie zwischen den Bildern

$$\hat{\alpha}_K(\Phi([\!-\pi \sin \eta, \pi \sin \eta[\times \mathbb{R}^{>0})) \subset K$$

und

$$\iota(U) = \Phi([\!-\pi \sin \eta, \pi \sin \eta[\times \mathbb{R}^{>0}) \times \{0\} \subset E.$$



5 Ebene und Zylinder als „Grenzfälle“ des Kegels

5.1 Die Ebene als Grenzfall $\eta \rightarrow \frac{\pi}{2}$

Im Grenzfall $\eta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ entartet der Kegel zur xy -Ebene.

Tatsächlich können wir $\eta = \frac{\pi}{2}$ in $\tilde{\alpha}_K$ einsetzen und erhalten eine Einbettung der Polarkoordinaten in den \mathbb{R}^3 , also $\tilde{\alpha}_K(\psi, t) = (\Phi(\psi, t), 0)$.

Damit ist $\hat{\alpha}_K$ die übliche Einbettung, also $\hat{\alpha}(x, y) = (x, y, 0)$.

5.2 Der Zylinder als Grenzfall $\eta \rightarrow 0$

Um diesen Grenzfall betrachten zu können, ändern wir zunächst $\hat{\alpha}_K : U \rightarrow U$ ein wenig ab:

- Wir verschieben K um einen vom Öffnungswinkel η abhängigen Wert nach unten:

$$K \xrightarrow{\sigma_1} K_\eta, \quad (x, y, z) \mapsto (x, y, z + z_\eta) \quad \text{mit} \quad z_\eta = -\frac{R}{\sin \eta}.$$

Dies ist eine Isometrie, und wir erreichen dadurch neben der Tatsache, dass die Spitze von K_η in $(0, 0, z_\eta)$ liegt, ebenfalls, dass der Kegel die Kugel vom Radius R im Breitenkreis zum Höhenwinkel $-\eta$ berührt. K_η schneidet außerdem die xy -Ebene in einem Kreis mit Radius $\frac{R}{\cos \eta}$. Als Translation ist die Abbildung $K \rightarrow K_\eta$ eine Isometrie.

- Wir verschieben U um z_η in y -Richtung:

$$U \xrightarrow{\sigma_2} U_\eta, \quad (x, y) \mapsto (x, y + z_\eta).$$

Als Translation ist dies ebenfalls eine Isometrie.

Die Abbildung

$$\alpha_{K,\eta} : U_\eta \xrightarrow{\sigma_2^{-1}} U \xrightarrow{\hat{\alpha}_K} K \xrightarrow{\sigma_1} K_\eta$$

ist damit eine Parametrisierung von K_η . Als Verknüpfung von Isometrien liefert das – wie vorher – eine Isometrie zwischen $\iota(U_\eta) \subset E$ und $\alpha_{K,\eta}(U_\eta) \subset K_\eta$. Insbesondere ist die erste Fundamentalform in der Parametrisierung $\alpha_{K,\eta}$ ebenfalls durch $\mathbb{1}$ gegeben.

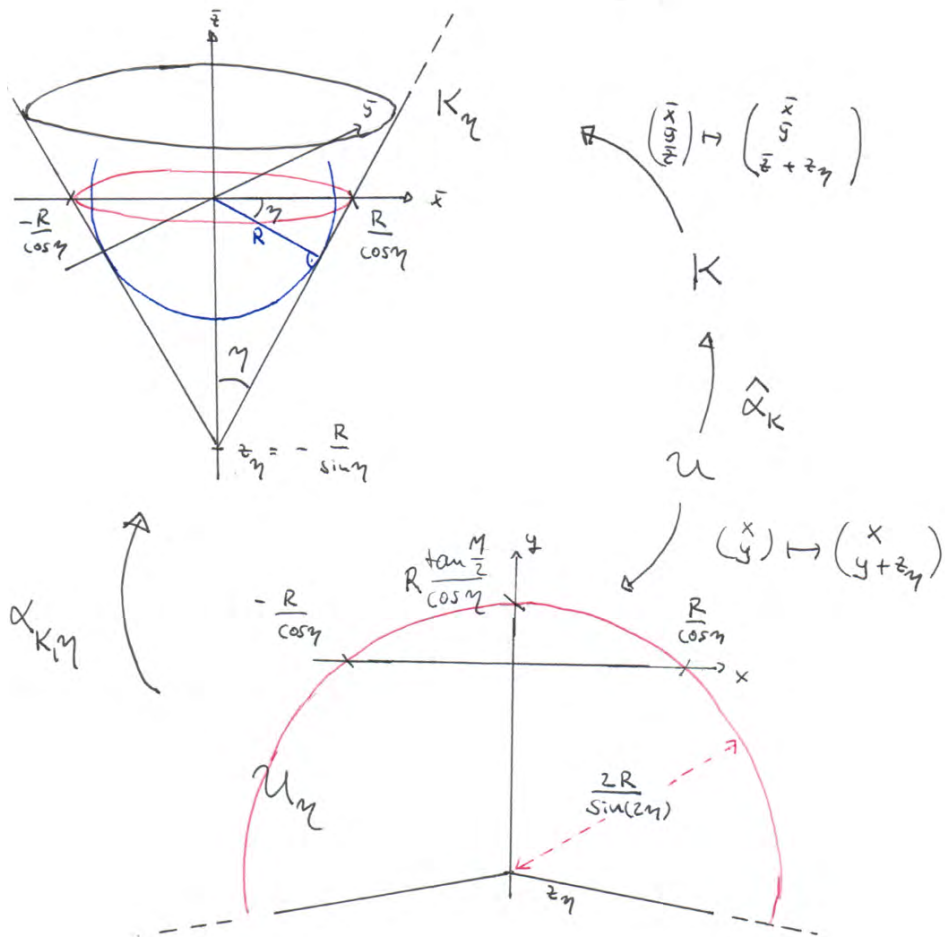
Das Urbild des Schnittkreises von K_η mit der xy -Ebene ist der Schnitt von U_η mit einem Kreis mit Mittelpunkt $(z_\eta, 0)$ und Radius $\frac{R}{\sin \eta \cos \eta}$. Dieser schneidet die Achsen in den Punkten $(a_\eta, 0)$, $(0, \pm b_\eta)$ mit

$$a_\eta = -\frac{R}{\sin \eta} + \frac{R}{\cos \eta \sin \eta} = R \frac{1 - \cos \eta}{\cos \eta \sin \eta} = R \frac{\tan \frac{\eta}{2}}{\cos \eta},$$

$$b_\eta = \pm \sqrt{\frac{R^2}{\sin^2 \eta \cos^2 \eta} - \frac{R^2}{\sin^2 \eta}} = \pm R \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \eta}{\cos^2 \eta \sin^2 \eta}} = \pm \frac{R}{\cos \eta}.$$

Wir zeigen nun, dass $] -\pi R, \pi R[\times \mathbb{R}^{>y_\eta}$ für ein geeignetes $y_\eta < 0$ stets eine Teilmenge von U_η ist.

Fall 1: $\pi \sin \eta \leq \frac{\pi}{2}$ oder $\eta < \frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ$.



In diesem Fall schneiden die zwei Strahlen, die von $(z_\eta, 0)$ ausgehenden und U_η begrenzen, die x -Achse nicht, sodass die Aussage stimmt für $y_{eta} = z_\eta$.

Fall 2: $\pi \sin \eta > \frac{\pi}{2}$ oder $\eta > \frac{\pi}{6} \hat{=} 30^\circ$.

In diesem Fall schneiden die Strahlen die x -Achse in den Punkten $(\pm x_\eta, 0)$ mit

$$x_\eta = -z_\eta \tan(\pi \sin \eta) = R \cdot \frac{\tan(\pi \sin \eta)}{\sin \eta} = \pi R \cdot \frac{1}{\cos(\pi \sin \eta)} \cdot \frac{\sin(\pi \sin \eta)}{\pi \sin \eta}.$$

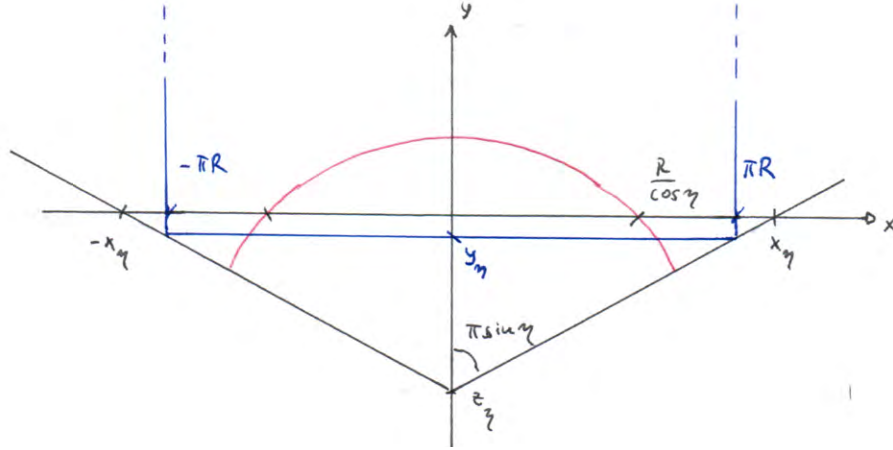
Nun ist $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(\pi \sin \eta)} = \frac{\cos 0}{\cos(\pi \sin 0)} = 1$ und $\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \sin \eta)}{\pi \sin \eta} = \lim_{\bar{\eta} \rightarrow 0} \frac{\sin(\bar{\eta})}{\bar{\eta}} = 1$, so dass

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} x_\eta = \pi R.$$

Weiter sei $y_\eta = z_\eta + \pi R \tan(\pi \sin \eta)$. Dann ist

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (y_\eta - z_\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \pi R \tan(\pi \sin \eta) = 0,$$

so dass y_η wie z_η für $\eta \rightarrow 0$ unter jede Schranke fällt und der Abstand der beiden Werte beliebig klein wird.



Das zusammen liefert, dass der Streifen $] -\pi R, \pi R[\times \mathbb{R}^{>y_\eta}$ stets in U_η enthalten ist. Wir erhalten so eine isometrische Einbettung dieses Teils des Definitionsbereiches von $\widehat{\alpha}_Z$ in U_η .

$$] -\pi R, \pi R[\times \mathbb{R}^{>y_\eta} \hookrightarrow U_\eta.$$

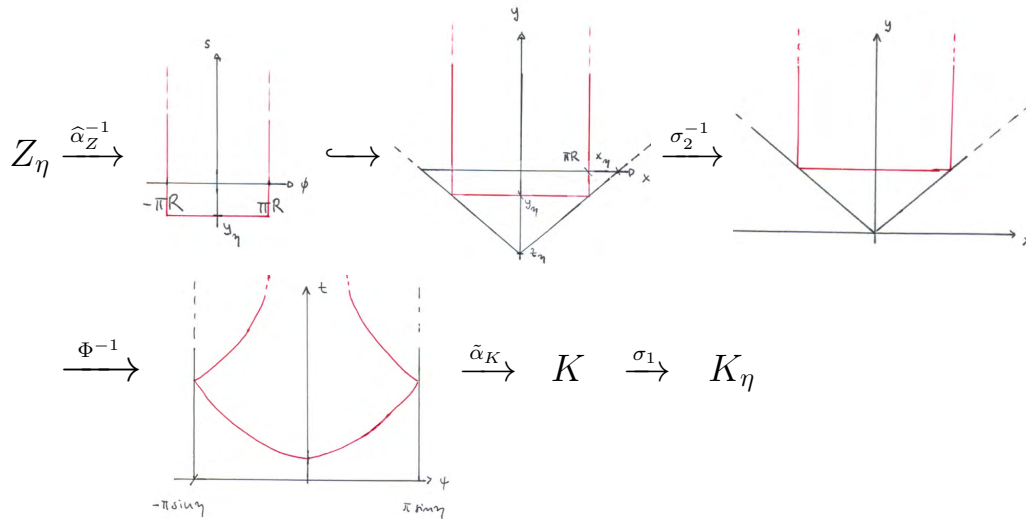
Verbinden wir das noch mit den Parametrisierungen $\widehat{\alpha}_Z$ und $\alpha_{K,\eta}$, so erhalten wir eine Isometrie zwischen den Mengen

$$\widehat{\alpha}_Z(] -\pi R, \pi R[\times \mathbb{R}^{>y_\eta}) := Z_\eta \subset Z \quad \text{und} \quad \alpha_{K,\eta}(] -\pi R, \pi R[\times \mathbb{R}^{>y_\eta}) \subset K_\eta.$$

Um zu zeigen, dass der Zylinder als Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ dieser Kegelfamilie aufgefasst werden kann, schauen wir uns diese Isometrie genauer an:

$$\Omega_\eta := \alpha_{K,\eta} \circ \widehat{\alpha}_Z^{-1} = \sigma_1 \circ \tilde{\alpha}_K \circ \Phi^{-1} \circ \sigma_2^{-1} \circ \alpha_Z^{-1} : Z_\eta \rightarrow K_\eta.$$

Wir nutzen also



Wir zeigen nun, dass $\lim_{\eta \rightarrow 0} \Omega_\eta = \text{id}$, bzw.

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\Omega_\eta \left(R \cos \frac{\phi}{R}, R \sin \frac{\phi}{R}, z \right) \right) = \left(R \cos \frac{\phi}{R}, R \sin \frac{\phi}{R}, z \right)$$

für alle $(\phi, z) \in] - \pi R, \pi R[\times \mathbb{R}^{>y_\eta}$. Es ist

$$\begin{aligned} \Omega_\eta : \begin{pmatrix} R \cos \frac{\phi}{R} \\ R \sin \frac{\phi}{R} \\ z \end{pmatrix} &\xrightarrow{\alpha_Z^{-1}} \begin{pmatrix} \phi \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{\sigma_2^{-1}} \begin{pmatrix} \phi \\ z - z_\eta \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\Phi^{-1}} (\psi_\eta, t_\eta) \xrightarrow{\sigma_1 \circ \alpha_K} \begin{pmatrix} t_\eta \sin \eta \cos \frac{\psi_\eta}{\sin \eta} \\ t_\eta \sin \eta \sin \frac{\psi_\eta}{\sin \eta} \\ t_\eta \cos \eta - \frac{R}{\sin \eta} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei (ψ_η, t_η) durch

$$t_\eta^2 = \left(z + \frac{R}{\sin \eta} \right)^2 + \phi^2, \quad \tan \psi_\eta = \frac{\phi}{z + \frac{R}{\sin \eta}}$$

gegeben ist. Wir zeigen nun

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (t_\eta \sin \eta) = R, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(t_\eta \cos \eta - \frac{R}{\sin \eta} \right) = z, \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{\psi_\eta}{\sin \eta} \right) = \frac{\phi}{R}.$$

Die erste Identität folgt direkt durch Einsetzen von $\eta = 0$:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} (t_\eta \sin \eta) = \sqrt{(z \sin \eta + R)^2 + \phi^2 \sin^2 \eta} \Big|_{\eta=0} = R.$$

Für die zweite Identität nutzen wir die Tatsache, dass für differenzierbare Funktionen $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = f'(u)$ ist, falls $f(0) = 0$. Es ist

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(t_\eta \cos \eta - \frac{R}{\sin \eta} \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\left(\sqrt{\left(z + \frac{R}{\sin \eta} \right)^2 + \phi^2} - \frac{R}{\sin \eta \cos \eta} \right) \cos \eta \right) \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(z \sin \eta + R)^2 + \phi^2 \sin^2 \eta} - \frac{R}{\cos \eta}}{\sin \eta} \cdot \cos \eta \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(z \sin \eta + R)^2 + \phi^2 \sin^2 \eta} - \frac{R}{\cos \eta}}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\sin \eta} \cdot \cos \eta \\ &= \frac{d}{d\eta} \left(\sqrt{(z \sin \eta + R)^2 + \phi^2 \sin^2 \eta} - \frac{R}{\cos \eta} \right) \Big|_{\eta=0} \cdot 1 \cdot 1 \\ &= \left(\frac{(z \sin \eta + R) z \cos \eta + \phi^2 \sin \eta \cos \eta}{\sqrt{(z \sin \eta + \frac{R}{\cos \eta})^2 + \phi^2 \sin^2 \eta}} + R \frac{\sin \eta}{\cos^2 \eta} \right) \Big|_{\eta=0} \\ &= z, \end{aligned}$$

wobei wir wieder $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = 1$ genutzt haben.

Für die dritte Identität schreiben wir

$$\tan \psi_\eta = \frac{\phi \sin \eta}{z \sin \eta + R}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} & \tan \psi_\eta \Big|_{\eta=0} = 0, \\ & \frac{d}{d\eta} (\tan \psi_\eta) \Big|_{\eta=0} = \frac{\phi \cos \eta (z \sin \eta + R) + z \phi \sin \eta \cos \eta}{(z \sin \eta + R)^2} \Big|_{\eta=0} = \frac{\phi}{R}. \end{aligned}$$

Damit haben wir schließlich

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{\psi_\eta}{\sin \eta} \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \left(\frac{\psi_\eta}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\sin \eta} \right) = \frac{d}{d\eta} (\psi_\eta) \Big|_{\eta=0} \cdot 1$$

$$\begin{aligned} &= \frac{d}{d\eta} (\arctan(\tan \psi_\eta)) \Big|_{\eta=0} \\ &= \frac{1}{1 + \tan^2 \psi_\eta} \Big|_{\eta=0} \cdot \frac{d}{d\eta} (\tan \psi_\eta) \Big|_{\eta=0} = \frac{\phi}{R}. \end{aligned}$$

Da y_η für $\eta \rightarrow 0$ nach unten unter jede Schranke fällt, ist $Z_{\eta \rightarrow 0} = Z$, und die Rechnungen liefern das folgende wichtige Resultat:

Der Zylinder Z mit Radius R stimmt als Fläche mit $K_{\eta \rightarrow 0}$ überein.

Literaturverzeichnis

- [1] Frank Klinker: *Differentialgeometrie I: Kurven und Flächen*. Lecture notes, 2014
- [2] Frank Klinker: *Analysis: Ein dreisemestriger Kurs*. Lecture notes, 2016