EIN EFFIZIENTES VERFAHREN ZUR BERECHNUNG EINER BASIS VON SUMME UND SCHNITT ZWEIER VEKTORRÄUME

FRANK KLINKER

Zusammenfassung. Wir stellen hier ein Verfahren vor, mit dem sich simultan eine Basis des Schnitts und eine Basis der Summe zweier Untervektorräume $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ des $\mathbb{K}^n$ berechnen lassen. Dabei seien jeweils ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ vorgegeben.

Es seien $\{v_1, \dots, v_r\} \subset \mathbb{K}^n$ und $\{w_1, \dots, w_s\} \subset \mathbb{K}^n$ endliche Teilmengen. Weiter seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ die von diesen Systemen aufgespannten Vektorräume, d.h. $\mathcal{V} := \mathit{span}\{v_1, \dots, v_r\}$ und $\mathcal{W} := \mathit{span}\{w_1, \dots, w_s\}$.

Wir definieren die Matrizen $V \in M_{r,n}(\mathbb{K})$ und $W \in M_{s,n}(\mathbb{K})$ indem wir die Erzeugendensysteme als Zeilen eintragen, also

$$V := \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_r^T \end{pmatrix}, \qquad W := \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_s^T \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir wissen nun aus der Vorlesung, dass wir nach Anwendung des Gaußverfahren auf $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} \in M_{r+s,n}(\mathbb{K})$ zu einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} \in M_{r+s,n}(\mathbb{K})$ gelangen, wobei in $B = \begin{pmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_k^T \end{pmatrix} \in M_{k,n}(\mathbb{K})$ die Zeilen linear unabhängig sind. Das Gaußverfahren ist nun so geartet, dass die Zeilen von B Linearkombinationen der Zeilen von $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ sind, so dass $\{b_1, \dots b_k\}$ eine Basis von $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ bilden.

Wir können das Gaußverfahren auch mit Hilfe von Matrizen beschreiben. Bei der Durchführung des Gaußverfahrens treten (höchstens) folgenden Manipulationen der Matrix $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ auf:

- Multiplikation der i-ten Zeile mit einer Zahl $a \neq 0$. Das entspricht einer Multiplikation von $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ von links mit

Datum: 1. Dezember 2008.
Adresse: Fakultät für Mathematik, TU Dortmund, 44221 Dortmund.
Email: frank.klinker@math.tu-dortmund.de.

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & a & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: S_i(a) \in M_{r+s,r+s}(\mathbb{K})\,. \tag{2}$$

- Addition des a-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile. Das entspricht einer Multiplikation von $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ von links mit

$$\begin{array}{r} \\ \\ i\text{-te Zeile} \to \\ \\ j\text{-te Zeile} \to \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & a & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: Q_i^j(a) \in M_{r+s,r+s}(\mathbb{K})\,. \tag{3}$$

- Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile. Das entspricht einer Multiplikation von $\begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix}$ von links mit

$$\begin{array}{r} \\ \\ \\ i\text{-te Zeile} \to \\ \\ \\ \\ j\text{-te Zeile} \to \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 0 & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & & 0 & & & \\ & & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} =: P_i^j \in M_{r+s,r+s}(\mathbb{K})\,. \tag{4}$$

Inbesondere entspricht jeder Schritt des Gaußverfahrens der Multiplikation von links mit einer Matrix $Z_\alpha \in M_{r+s,r+s}(\mathbb{K})$ von einem der obigen Typen. Wenn wir genau ℓ Schritte zum Durchführen des Verfahrens benötigen, so gilt mit $Z := Z_\ell \cdot Z_{\ell-1} \cdot \ldots \cdot Z_1$

$$Z \begin{pmatrix} V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}\,. \tag{5}$$

Bemerkung: Die Matrix Z erhalten wir explizit, wenn wir das Gaussverfahren statt nur auf die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} V \\ W \end{smallmatrix}\right)$ auf die um die Einheitsmatrix erweiterte Matrix $\left(\mathbb{1} \;\middle|\; \begin{smallmatrix} V \\ W \end{smallmatrix}\right)$ anwenden. Das Ergebnis ist dann gerade $\left(Z \;\middle|\; \begin{smallmatrix} B \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Wir zerlegen die Matrix $Z \in M_{r+s,r+s}(\mathbb{K})$ nun in kleiner Blöcke $Z_{11} \in M_{k,r}(\mathbb{K})$, $Z_{12} \in M_{k,s}(\mathbb{K})$, $Z_{21} \in M_{r+s-k,r}(\mathbb{K})$ $Z_{22} \in M_{r+s-k,r}(\mathbb{K})$ gemäß

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Wenn wir das benutzen, so läßt sich (5) zu

$$Z_{11}V + Z_{12}W = B \tag{7}$$

$$Z_{21}V + Z_{22}W = 0 \tag{8}$$

umschreiben. Setzen wir $(Z_{21})_{ij} = -a_{ij}$ für $1 \leq i \leq r+s-k$, $1 \leq j \leq r$ und $(Z_{22})_{ij} = b_{ij}$ für $1 \leq i \leq r+s-k$, $1 \leq j \leq s$ so läßt sich (8) auch in Termen der ErzeugendensystemE von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ schreiben:

$$\sum_{j=1}^{s} b_{ij} w_j = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} v_j, \quad \text{für } 1 \leq j \leq r+s-k\,. \tag{9}$$

Alle diese $r+s-k$ Vektoren $z_j := \sum_{j=1}^{s} b_{ij} w_j$ liegen somit im Schnitt $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$. Die folgende Überlegung zeigt sogar, dass sie ein Erzeugendensystem für den Schnitt bilden.

Wir betrachten die Vektorräume $\widehat{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V} \oplus \{0\} \oplus \mathcal{V}$ und $\widehat{\mathcal{W}} \subset \mathcal{W} \oplus \mathcal{W} \oplus \{0\}$ mit den Erzeugendensystemen $\left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} v_r \\ 0 \\ v_r \end{pmatrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} w_s \\ w_s \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$. Es gelten die folgenden Isomorphismen:

$$\widehat{V} \simeq V, \qquad \widehat{W} \simeq W \tag{10}$$

$$\widehat{V} + \widehat{W} \simeq V \oplus W\,. \tag{11}$$

Die ersten zwei Isomorphismen (10) sieht man sofort, und die letzte (11) ist eine Folgerung aus den ersten beiden und der Dimensionsformel zusammen mit der Tatsache, dass $\widehat{V} \cap \widehat{W} = \{0\}$.

Schreiben wir nun die Basen von $\widehat{\mathcal{V}}$ und $\widehat{\mathcal{W}}$ ebenfalls als Matrizen in der Form

$$\begin{pmatrix} V & 0 & V \\ W & W & 0 \end{pmatrix} \in M_{r+s,3n}(\mathbb{K}) \tag{12}$$

so hat diese Matrix wegen (11) den Rang $\dim(\mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W})$. Dieser ändert sich nicht, wenn wir die Matrix Z darauf wirken lassen. Diese Wirkung liefert

$$Z \begin{pmatrix} V & 0 & V \\ W & W & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & Z_{12}W & Z_{11}V \\ 0 & Z_{22}W & Z_{21}V \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$=: \begin{pmatrix} B & Z_{12}W & Z_{11}V \\ 0 & \tilde{C} & -\tilde{C} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Da Z ein Isomorphismus ist, ändert sich der Rang der Matrix nicht. Da nun die ersten k Zeilen linear unabhängig sind (dies gilt schon für B!) sind noch genau $\dim(\mathcal{V}) + \dim(\mathcal{W}) - k$ Zeilen der letzten $r + s - k$ Stück linear unabhängig, was gerade der Dimension von $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ entspricht. Also bilden die Zeilen von $Z_{21}V = -Z_{22}W = -\tilde{C}$ ein Erzeugendensystem für $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$.

Eine Basis dieses Schnitts erhalten wir nun, indem wir das Gaußverfahren auf die unteren $r + s - k$ Zeilen der Matrix (14) anwenden. Das hat keinen Effekt auf die ersten n Spalten und wir bekommen schließlich

$$\begin{pmatrix} B & Z_{12}W & Z_{11}V \\ 0 & C & -C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

wobei nun die Zeilen von B und auch die Zeilen von C linear unabhängig sind.

Anwendung: Wir wenden das Gaussverfahren entweder auf $\begin{pmatrix} V & V \\ W & 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} V & 0 \\ W & W \end{pmatrix}$ an. In beiden Fällen erhalten wir $\begin{pmatrix} B & \star \\ 0 & \pm C \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei die Zeilen von B die Basis von $\mathcal{V} + \mathcal{W}$ und die Zeilen von C eine Basis von $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ bilden.