SPURFREIE MATRIZEN ALS KOMMUTATOREN

FRANK KLINKER

Zusammenfassung. Wir geben hier verschiedene Begründungen für die Aussage, dass sich jede Matrix mit verschwindender Spur als Kommutator zweier Matrizen darstellen lässt.

Inhaltsverzeichnis

Wir liefern hier verschiedene Beweise für die Aussage in Satz 1. Insbesondere sind alle Beweise anwendbar, wenn der zugrundeliegende Körper die Charakteristik Null hat, zum Beispiel $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

Satz 1. *Jede Matrix über einem Körper* $\mathbb{K}$*, deren Spur verschwindet, lässt sich als Kommutator zweier Matrizen schreiben.*

Bemerkung 2. Wir werden im Laufe der Beweise oft durch Basiswechsel die Ausgangsmatrix ändern. Dass das aber keinen Einfluss auf die Aussage in Satz 1 hat, sieht man wie folgt: Sei A eine Matrix, die sich als Kommutator schreiben lässt, etwa $A = [R, S]$, und $\hat{A} := U^{-1}AU$ die transformierte Matrix. Dann gilt für diese Matrix $\hat{A} = [\hat{R}, \hat{S}]$ mit $\hat{R} = U^{-1}RU$ und $\hat{S} = U^{-1}SU$.

1. Ein konstruktiver Beweis (mit Einschränkung)

Die hier vorgestellte Begründung ist konstruktiv und klappt über allen Körpern $\mathbb{K}$ mit Ausnahme von Körpern mit Charakteristik 2, z.B. $\mathbb{Z}_2$. Für

Datum: 28. Juni 2011.
Adresse: Fakultät für Mathematik, TU Dortmund, 44221 Dortmund.
Email: frank.klinker@math.tu-dortmund.de.

die letzteren klappt die Konstruktion nur in Spezialfällen. Für die Konstruktion benötigen wir die Jordan-Normalform für Matrizen über dem Körper $\mathbb{K}$, wobei wir uns hier bei der Beschreibung der Normalform auf den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ beschränken. Die Verallgemeinerung wirkt sich jedoch lediglich auf die Gestalt der Jordankästchen aus und nicht auf die Eigenschaften (1), siehe etwa [3]. Ebenfalls kann man statt der Jordan-Normalform die Frobenius-Normalform der Matrix A heranziehen, siehe etwa [2].

Es sei $A \in M_n\mathbb{R}$ mit $\mathrm{tr}(A) = \sum_i a_{ii} = 0$ und sei J die Jordan-Normalform von A. Dann verschwindet insbesondere auch die Spur von J und wir können J als

$$J = \mathrm{diag}(J_1, \ldots, J_N)$$

schreiben. Dabei ist $J_k = J_k(\lambda)$ entweder ein Jordankästchen zum reellen Eigenwert λ oder $J_k = J_k(a, b)$ ein Jordankästchen zum irreduziblen Teiler $x^2 - ax - b$ des charakteristischen Polynoms, d.h.

$$J_k = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

oder

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ b & a & 1 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & b & a & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & b & a & 1 & \\ & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & b & a \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erfüllt J damit

$$\sum_i J_{ii} = 0 \quad \text{und} \quad J_{i,i+1} \in \{0, 1\} \quad \text{und} \quad J_{ij} = 0 \text{ für } j \geqslant i + 2\,. \qquad (1)$$

Sei nun $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ eine $\mathbb{K}\backslash\{0\}$-wertige Diagonalmatrix, dann hat $\tilde{J} := DJD^{-1}$ die Einträge

$$\tilde{J}_{ij} = \frac{d_i}{d_j} J_{ij}$$

und somit immer noch die Struktur (1) bis auf die Tatsache, dass nun $\tilde{J}_{i,i+1} \in \mathbb{K}$.

Wir stellen hier zwei Wahlen für D vor, die helfen, Satz 1 (mit Einschränkungen) zu beweisen.

- Die erste Wahl ist – abhängig von der Ausgangsmatrix A – nicht in jedem Körper möglich: wir müssen eine von A abhängige natürliche Zahl invertieren.
- Die zweite Wahl klappt für jede Matrix, jedoch sind Körper der Charakteristik 2 auszunehmen.

Erste Wahl:

Sei $\ell := \#\{J_{i,i+1} \neq 0\}$ und weiter sei $i_0 := \max\{i \mid J_{i,i+1} \neq 0\}$, falls $\ell > 0$. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- Ist nun $\ell = 0$ so wähle $D = \mathbb{1}$.
- Ist $\ell \geqslant 2$ so wähle in D die Diagonalelemente gemäß
$$d_i = \begin{cases} -(\ell-1)^{-1} & \text{für } i = i_0+1 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Zweite Wahl :

Auch hier unterscheiden wir zwei Fälle:

- $\#\{J_{i,i+1} \neq 0\}$ ist gerade:
  Ist die Anzahl $= 0$ so setze $D = \mathbb{1}$. Ist die Anzahl $\geqslant 2$ dann setze $d_1 = d_2 = 1$ und wähle die $d_i \in \{-1, 1\}$ für $i = 3, \ldots, n$ derart, dass die nicht-verschwindenden Elemente der Nebendiagonale von $\tilde{J}$ alternierende Vorzeichen haben das erste dieser jedoch positiv ist. Insbesondere ist $\tilde{J}_{i,i+1} \in \{-1, 0, 1\}$
  Ist zum Beispiel n ungerade und alle Nebendiagonalelemente von J verschwinden nicht, so tut die Matrix D mit $d_{4j+1} = d_{4j+2} = 1$ und $d_{4j+3} = d_{4j+4} = -1$ für $j \geqslant 0$ das Gewünschte.
- $\#\{J_{i,i+1} \neq 0\} = 2\ell + 1$ ist ungerade und $\geqslant 3$:
  Setze wieder $d_1 = d_2 = 1$. Ist die Anzahl $2\ell + 1 \leqslant n - 1$, so wähle die d_j entsprechend dem ersten Fall derart, dass die ersten $2\ell - 1$ nicht-verschwindenden Nebendiagonalelemente von $\tilde{J}$ wieder alternierend ihre Werte in $\{-1, 1\}$ annehmen, wobei der erste wieder positiv sein soll. Nun sind noch zwei nicht-verschwindende Elemente der Nebendiagonale von J übrig, und es seien etwa $J_{j_1,j_1+1}, J_{j_2,j_2+1}$ und J_{j_3,j_3+1} mit $j_1 < j_2 < j_3$ die letzten drei dieser Elemente, so dass $\tilde{J}_{j_1,j_1+1} = 1$. Wähle nun weiter $d_{j_2+1}, \ldots, d_{j_3} \in \{-2, 2\}$ und $d_{j_3+1}, \ldots, d_n \in \{-4, 4\}$ derart, dass $\tilde{J}_{j_2,j_2+1} = \tilde{J}_{j_3,j_3+1} = -\frac{1}{2}$. Insbesondere ist $\tilde{J}_{i,i+1} \in \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
  Ist zum Beispiel n gerade und alle Nebendiagonalelemente von J verschwinden nicht, so kann man D wie folgt wählen: Die ersten $n - 2$ Elemente von D haben die Form $d_{4j+1} = d_{4j+2} = 1$ und

$d_{4j+3} = d_{4j+4} = -1$ für $j \geqslant 0$, und die beiden letzten erfüllen $d_{n-1} = -2\,\mathrm{sign}(d_{n-2})$ und $d_n = 4\,\mathrm{sign}(d_{n-2})$.

Wir stellen nun fest, dass wir in den oben diskutieren Fällen erreichen, dass neben der Spur selbst auch die Spur der Nebendiagonalen von $\tilde{J}$ verschwindet, d. h. $\sum_i \tilde{J}_{i,i+1} = 0$. Zu A kann man auf die obige Weise immer solch ein $\tilde{J}$ wählen, mit Ausnahme der Fälle, in denen die Jordan-Normalform lediglich eine Eins auf der Nebendiagonalen hat, also der Fall b) in dem nun bewiesenen Satz 3.

Satz 3. *Es sei A eine Matrix mit verschwindender Spur über einem Körper der Charakteristik ungleich 2. Dann tritt einer der folgenden zwei Fälle auf:*

a) *A ist ähnlich zu einer Matrix $\tilde{J}$ mit den Eigenschaften*

$$\sum_i \tilde{J}_{ii} = 0 \quad \textit{und} \quad \sum_i \tilde{J}_{i,i+1} = 0 \quad \textit{und} \quad \tilde{J}_{ij} = 0 \textit{ für } j \geqslant i+2 \tag{2}$$

b) *A ist ähnlich zu*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \Delta \end{pmatrix} \qquad \textit{oder} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ b & a & \\ & & \Delta \end{pmatrix} \tag{3}$$

wobei Δ eine Diagonalmatrix ist.

Ausgehend von dieser speziellen Gestalt einer spurfreien Matrix konstruieren wir nun den Kommutator.

Konstruktion 4. Es sei $R = (R_{ij})$ das transponierte der Begleitmatrix zum Polynom $p(x) = x^n$, also

$$R = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und $S = (S_{ij})$ eine weitere Matrix, dann gilt

$$(RS)_{ij} = S_{i-1,j}\,, \quad (SR)_{ij} = S_{i,j+1}\,, \quad [R,S]_{ij} = S_{i-1,j} - S_{i,j+1}\,.$$

Schreiben wir

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & \dots & s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

wobei die $s_i \in \mathbb{K}^{n\times 1}$ die Spalten und die $z_i \in \mathbb{K}^{1\times n}$ die Zeilen von S bezeichnen, so gilt

$$RS = \begin{pmatrix} 0 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}, \quad SR = \begin{pmatrix} s_2 & \dots & s_n & 0 \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation mit R von links bzw. rechts verschiebt die Zeilen bzw. die Spalten von S um eins nach unten bzw. rechts.

Wählen wir nun S als Matrix in der alle oberen Nebendiagonalen ab der dritten verschwinden, dann sind RS, SR und $[R, S]$ Matrizen, in denen alle oberen Nebendiagonalen ab der zweiten verschwinden.

Sei nun $B \in M_n\mathbb{R}$ eine Matrix mit den Eigenschaften (2) und es seien R und S wie oben gegeben. Dann ist die Gleichung $B = [R, S]$ sinnvoll und es ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
B_{1j} &= -S_{1,j+1} && \text{für } j = 1, 2 && (4.\text{a})\\
B_{2j} &= S_{1,j} - S_{2,j+1} && \text{für } j = 1, 2, 3 && (4.\text{b})\\
&\vdots\\
B_{kj} &= S_{k-1,j} - S_{k,j+1} && \text{für } j = 1, \dots, k+1 && (4.\text{c})\\
&\vdots\\
B_{n-1,j} &= S_{n-2,j} - S_{n-1,j+1} && \text{für } j = 1, \dots, n-1 && (4.\text{d})\\
B_{n-1,n} &= S_{n-2,n} && && (4.\text{e})\\
B_{n,j} &= S_{n-1,j} - S_{n,j+1} && \text{für } j = 1, \dots, n-1 && (4.\text{f})\\
B_{n,n} &= S_{n-1,n} && && (4.\text{g})
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem lösen wir nun nach S auf:

- Im ersten Schritt nutzen wir (4.a). Das bestimmt die erste Zeile von S bis auf das Element S_{11}, das wir vorerst frei wählen können.
- Im zweiten Schritt nutzen wir (4.b) und das liefert dann die zweite Zeile von S, bis auf das Element S_{21}, das wir wieder frei wählen.
- Im k-ten Schritt für $k < n-1$ nutzen wir (4.c) und bekommen so die k-te Zeile von S bis auf S_{k1}, das wir wieder frei wählen.
- Im $n-1$-ten Schritt nutzen wir (4.d) und bekommen wieder bis auf den frei wählbaren ersten Eintrag die $(n-1)$-te Zeile von S.
- im letzten Schritt liefert (4.f) schließlich die letzte Zeile von S und wieder bleibt S_{n1} frei wählbar übrig.

Auch wenn die Wahl der ersten Spalte nicht durch B fixiert ist, so bestimmt doch die Wahl des i-ten Eintrag die Gestalt der $(i+1)$-ten Zeile, da das Element explizit in die Berechnung einfließt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass die zwei übrigen Gleichungen (4.e) und (4.g) hierdurch auch erfüllt werden.

Es ist $\operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}([R,S]) = 0$ und außerdem ist $B_{ii} = [R,S]_{ii}$ für alle $i = 1,\dots,n-1$. Damit ist dann auch

$$B_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} B_{ii} = -\sum_{i=1}^{n-1}[R,S]_{ii} = [R,S]_{nn} = S_{n-1,n}\,.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}[R,S]_{i,i+1} &= -S_{13} + \sum_{i=2}^{n-2}(S_{i-1,i+1} - S_{i,i+2}) + S_{n-2,n}\\ &= -S_{13} + \sum_{i=1}^{n-3} S_{i,i+2} - \sum_{i=2}^{n-2} S_{i,i+2} + S_{n-2,n} \;=\; 0\,,\end{aligned}$$

so dass $\sum_{i=1}^{n-1} B_{i,i+1} = \sum_{i=1}^{n-1}[R,S]_{i,i+1} = 0$. Da aber $B_{i,i+1} = [R,S]_{i,i+1}$ für $i = 1,\dots,n-2$, ist ebenfalls

$$B_{n-1,n} = -\sum_{i=1}^{n-2} B_{i,i+1} = -\sum_{i=1}^{n-1}[R,S]_{i,i+1} = [R,S]_{n-1,n} = S_{n-2,n}\,.$$

Die Kontruktion 4 basiert auf der Arbeit [1]. Sie liefert nun den Beweis für den folgenden Satz 5.

Satz 5. *Sei B eine Matrix mit den Eigenschaften (2). Dann gibt es Matrizen R,S derart, dass $B = [R,S]$.*

Bemerkung 6. Das Ersetzen der Matrix R in Satz 5 durch $\mathbb{1}+R$ hat keinen Einfluss auf den Kommutator. Es zeigt aber, dass man mindestens eine der beteiligten Matrizen regulär wählen kann.

Bemerkung 7.
- Die zweite Matrix in (3), also $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ b & a & \\ & & \Delta \end{pmatrix}$, hat die Form $\begin{pmatrix} 0 & x^t \\ y & A' \end{pmatrix}$, wobei A' eine Matrix mit den Eigenschaften (2) ist; genauer: die gesamte Nebendiagonale verschwindet. Wegen Satz 5 und Bemerkung 6 gibt es R', S' mit $A' = [R', S']$ derart, dass R' regulär ist. Wählen wir nun

  $$R = \begin{pmatrix} 0 & \\ & R' \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -x^t(R')^{-1} \\ (R')^{-1}y & S' \end{pmatrix}$$

  dann ist $\begin{pmatrix} 0 & x^t \\ y & A' \end{pmatrix} = [R,S]$.

- Die erste Matrix in (3), also $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \Delta \end{pmatrix}$, ist ähnlich zur Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -\lambda^2 & \\ 1 & 2\lambda & \\ & & \Delta \end{pmatrix}$, wähle dazu die Basis $\{e_2, e_1 + \lambda e_2, e_3, \dots e_n\}$. Diese hat ebenfalls die Form $\begin{pmatrix} 0 & x^t \\ y & A' \end{pmatrix}$ mit einer Matrix A', die (2) erfüllt – weil die gesamte Nebendiagonale verschwindet. Damit gilt das Resultat des vorigen Punktes.

Korollar 8. *Die Sätze 3 und 5 zusammen mit der Bemerkung 7 liefern nun den Beweis für die Aussage in Satz 1 unter der Einschränkung* $\operatorname{char}(\mathbb{K}) \neq 2$.

2. Eine Erweiterung (ohne Einschränkung)

Im Fall eines Körpers der Charakteristik 2 geht der oben vorgestellte konstruktive Ansatz nur in den Fällen durch, in denen die Anzahl der Einsen auf der Nebendiagonale in der Jordan-Normalform der betrachteten Matrix gerade ist.

Dass die Aussage aber auch im ungeraden Fall sinnvoll ist, zeigt schon das Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Die Erweiterung des konstruktiven Ansatzes für Matrizen, deren Nebendiagonale eine ungerade Anzahl von Einsen aufweist, wird durch Bemerkung 7 motiviert.

Konstruktion 9. Sei A eine Matrix deren Jordan-Form $\hat{A}$ eine ungerade Zahl an Einsen auf der Nebendiagonale trägt. Dann hat $\hat{A}$ die Form

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} c_1 & 1 & 0 & \\ c_2 & c_3 & c_4 & 0 \\ & * & & \hat{B} \end{pmatrix}$$

mit $c_1 c_2 = 0$, $c_3 \in \mathbb{K}$, $c_4 \in \{0, 1\}$. Insbesondere sind e_2 und $\hat{A}e_2 = e_1 + c_3 e_2 + w$ mit $w \in \operatorname{span}\{e_3, \dots, e_n\}$ linear unabhängig und bezüglich der Basis $\{e_2, \hat{A}e_2, e_3, \dots e_n\}$ hat $\hat{A}$ die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} 0 & x^t \\ y & B \end{pmatrix}$. Hierin hat die Matrix B die Eigenschaften (1) und die Anzahl der Einsen auf der Nebendiagonale ist um Eins vermindert, also gerade. Damit gibt es gemäß der Konstruktion im vorigen Abschnitt eine diagonale Basistransformation $B' = D^{-1}BD$ derart, dass B' die Eigenschaften (2) hat. Die Transformation $\begin{pmatrix} 1 & \\ & D \end{pmatrix}$ liefert dann die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & x'^t \\ y' & B' \end{pmatrix}$, mit $y'_i = d_i y_i$ und $x'_i = \frac{x_i}{d_i}$.

Jetzt liefert die gleiche Konstruktion wie in Bemerkung 7 zwei Matrizen R, S derart, dass $\begin{pmatrix} 0 & x'^t \\ y' & B' \end{pmatrix} = [R, S]$.

Korollar 10. *Konstruktion 9 zusammen mit Konstruktion 4 liefert nun einen Beweis für Satz 1 für beliebige Körper.*

3. Ein weiterer Beweis (mit Einschränkung)

Es sei $R = \operatorname{diag}(r_1, \ldots, r_n) \in M_n\mathbb{K}$ eine Diagonalmatrix mit Einträgen derart, dass $r_i - r_j \neq 0$ für alle $i \neq j$ ist, und sei $S \in M_n\mathbb{K}$ eine beliebige Matrix. Insbesondere muss der Körper $\mathbb{K}$ mindestens n verschiedene Elemente haben. Dann ist

$$[R, S]_{ij} = (r_i - r_j)s_{ij}$$

und in $[R, S]$ verschwinden sämtliche Diagonalelemente. Ist nun $A \in M_n\mathbb{K}$ mit $a_{ii} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$, und ist R eine Diagonalmatrix wie oben, dann löst die Matrix S mit

$$s_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i = j \\ \dfrac{a_{ij}}{r_i - r_j} & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

die Gleichung $A = [R, S]$. Das heißt es gilt der folgende Satz 11:

Satz 11. *Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper mit mindestens n veschiedenen Elementen und sei $A \in M_n\mathbb{K}$ mit $a_{ii} = 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Dann gibt es Matrizen R, S, so dass $A = [R, S]$.*

Es sei nun $A \in M_n\mathbb{K}\backslash\{0\}$ eine Matrix mit verschwindender Spur. Wir betrachten nun einen Vektor $v_1 \in \mathbb{K}^n$ derart, dass v_1 und Av_1 linear unabhängig sind. Dieses v_1 gibt es, denn andernfalls wäre jeder Vektor v ein Eigenvektor und damit $A = \mu\mathbb{1}$ und wegen der Spurbedingung sogar $A = 0$. Sei nun weiter $\{v_1, Av_1, w_3, \ldots, w_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}$, dann hat A bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A^{(1)} \end{pmatrix}$$

mit einer Matrix $A^{(1)} \in M_{n-1}\mathbb{K}$ die ebenfalls spurfrei ist. Ist nun $A^{(1)}_{ii} \neq 0$ für mindestens ein i, so wähle $v_2 \in \operatorname{span}\{Av_1, w_3, \ldots, w_n\}$ derart, dass v_2 und A_1v_2 linear unabhängig sind. Bezüglich der Basis $\{v_1, v_2, A^{(1)}v_2, \hat{w}_4, \ldots, \hat{w}_n\}$ hat A dann die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ * & 0 & * \\ * & * & A^{(2)} \end{pmatrix},$$

wobei nun $A^{(2)} \in M_{n-2}\mathbb{K}$ spurfrei ist. Induktiv konstruiert man so eine Basis $\{v_1, \ldots, v_n\}$ derart, dass A bezüglich dieser Basis die Darstellung

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & * & \\ & & 0 & & \\ & * & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

hat. Die induktive Berechnung ist spätestens nach $(n-1)$ Schritten beendet, frühestens jedoch nach dem Schritt, bei dem die Restmatrix $A^{(k)}$ nur Nullen auf der Diagonale hat. Insgesamt hat man den folgenden Satz 12:

Satz 12. *Ist A eine Matrix, deren Spur verschwindet, so ist A ähnlich zu einer Matrix deren Diagonalelemente verschwinden.*

Korollar 13. *Die Sätze 11 und 12 liefern nun zusammen einen Beweis für Satz 1, jedoch mit der Einschränkung, dass der zugrundeliegende Körper eine Mindestzahl verschiedener Elemente hat, vergleiche Satz 11.*

Literatur

[1] Abraham Adrian Albert and Benjamin Muckenhoupt: On matrices of trace zeros. *Michigan Math. J.* **4** (1957), 1-3.

[2] Falko Lorenz: *Lineare Algebra II*. Spektrum Akademischer Verlag, 3. überarb. Aufl. 2005 (Nachdr. 2009).

[3] Hans-Joachim Kowalsky: *Lineare Algebra*. Verlag Walter de Gruyter, 9. Aufl. 1979.