Frank Klinker

Aufgaben: Kurvendiskussion

Teil 4.1: Funktionen mit Parametern I

Aufgabe 1. Eine Funktion dritten Grades

$$f_k(x) = x^3 + kx^2 + 3x$$

hängt von einem reellen Parameter $k \in \mathbb{R}$ ab. Das heißt, jedes Mal, wenn man einen festen Wert für k wählt, erhält man eine neue Funktion.

a) Begründen Sie, warum das globale Verhalten von $f_k(x)$ an den Grenzen des Definitionsbereichs nicht von k abhängt.

b) Bestimmen Sie rechnerisch, für welche Werte von k die Funktion eine, zwei bzw. drei Nullstellen hat.

c) Bestimmen Sie rechnerisch alle Werte k, für die der Graph von $f_k(x)$ einen Hochpunkt besitzt.

d) Überprüfen Sie rechnerisch, ob es Werte für k gibt, sodass der Graph von $f_k(x)$ einen Hochpunkt bzw. einen Tiefpunkt an der Stelle $x_0 = 3$ hat.

e) Beurteilen Sie, ob es Werte für k gibt, sodass $f_k(x)$ nur eine Nullstelle aber einen Hoch- und einen Tiefpunkt hat.

f) Beurteilen Sie, ob es Werte für k gibt, sodass $f_k(x)$ zwar drei Nullstellen aber keinen Hochpunkt hat.

Aufgabe 2. Wiederholen Sie die Aufgaben a)-f) aus Aufgabe 1 für die Funktionenschar

$$f_k(x) = x^3 + 3x^2 - kx\,.$$

Aufgabe 3. Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_k(x) = \left(kx + \tfrac{1}{2}\right)^2 e^{\frac{1}{k}x} \qquad (k \in \mathbb{R}_+)\,.$$

a) Begründen Sie, dass $f_k(x)$ eine doppelte Nullstelle bei $x_1 = -\frac{1}{2k}$ besitzt.

b) Begründen Sie $f_k(x) \geq 0$.

c) Alle Nullstellen von $f_k'(x)$ sind Extremstellen. Zeigen Sie, dass $x_1 = -\frac{1}{2k}$ und $x_2 = -\frac{1}{2k} + 2k$ die Extremstellen sind, indem Sie diese mit Hilfe der pq-Formel berechnen.
Begründen Sie, warum x_1 eine Minimalstelle und x_2 eine Maximalstelle ist.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 16. September 2024

Aufgabe 4. Die Funktionen

$$f_k(x) = \frac{x}{k}(kx-1)^2 \qquad \text{und} \qquad g_k(x) = 3kx^2 - 4x + \frac{1}{k}$$

hängen von dem gleichen reellen Parameter $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ab.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $f_k(x)$ und geben Sie deren Vielfachheit an.

b) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion $g_k(x)$ und geben Sie das Intervall an, auf dem $g_k(x) < 0$ ist.

c) Begründen Sie mit dem Ergebnis aus a), dass $f_k(x)$ für jeden Wert k einen Hoch- und einen Tiefpunkt besitzt.

d) Berechnen Sie den Hoch- und Tiefpunkt von $f_k(x)$.

e) Berechnen Sie den Scheitelpunkt von $g_k(x)$. Für welche Werte k handelt es sich um einen Hochpunkt und für welche Werte um einen Tiefpunkt?

f) Skizzieren Sie die Graphen von $f_{\frac{1}{3}}(x)$ und $g_{\frac{1}{3}}(x)$ in ein gemeinsames Koordinatensystem ($-4 \leq x \leq 4$ und $-5 \leq y \leq 5$).

g) Zeigen Sie rechnerisch, dass $f_k(x) = f_{-k}(-x)$ und $g_k(x) = -g_{-k}(-x)$. Skizzieren Sie mit diesem Wissen die Graphen von $f_{-\frac{1}{3}}(x)$ und $g_{-\frac{1}{3}}(x)$ in das Koordinatensystem aus f).

Wegen der Aufgaben a) und b) wissen Sie, dass $\frac{1}{k}$ eine gemeinsame Nullstelle der Funktionen $f_k(x)$ und $g_k(x)$ ist. Daher ist $(\frac{1}{k}\,;\,0)$ ein Schnittpunkt der Graphen der beiden Funktionen. Alle weiteren Schnittpunkte lassen sich als Nullstellen der Funktion $f_k(x) - g_k(x)$ mit Hilfe des Ansatzes $f_k(x) - g_k(x) = 0$ bestimmen.

h) Bestätigen Sie rechnerisch

$$f_k(x) - g_k(x) = kx^3 - (2+3k)x + \left(4 + \tfrac{1}{k}\right)x - \tfrac{1}{k}\,.$$

i*) Führen Sie die Polynomdivision $\big(f_k(x) - g_k(x)\big) : \left(x - \frac{1}{k}\right)$ durch und bestätigen Sie so

$$\big(f_k(x) - g_k(x)\big) : \left(x - \tfrac{1}{k}\right) = kx^2 - (1+3k)x + 1\,.$$

j*) Bestätigen Sie rechnerisch mit Hilfe der *pq*-Formel, dass die weiteren Schnittpunkte die x-Werte

$$\frac{1}{2}\left(3 + \tfrac{1}{k} \pm \sqrt{8 + \left(1 + \tfrac{1}{k}\right)^2}\,\right)$$

haben.

k) Begründen Sie mit dem Ergebnis aus j), warum die Graphen von $f_k(x)$ und $g_k(x)$ immer drei Schnittpunkte haben.