

## Aufgabe: Modellierung einer Skaterbahn

---

### Aufgabe [Skaterbahn]

1. Die Halfpipe als erster Teil einer Skaterbahn hat die Form eines Teils eines Parabelbogens. Die modellierende Funktion ist

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 4.$$

Die Höhe der Bahn wird durch die  $y$ -Koordinate und die Länge der Bahn durch die  $x$ -Koordinate beschrieben (alle Angaben sind in  $m$ ). Die Einfahrt in die Halfpipe befindet sich bei  $x = 0$  und die Ausfahrt bei  $x = 7,5$ .

- 1.1 Der tiefste Punkt der Halfpipe darf nicht unterhalb des Erdbodens liegen. Überprüfen Sie, ob das erfüllt ist.
- 1.2 Skizzieren Sie den Verlauf der Halfpipe in einem Koordinatensystem, so dass alle relevanten Punkte erkennbar sind.
2. Vor der Einfahrt soll es eine waagerechte Zufahrt geben.
  - 2.1 In welcher Höhe muss die Zufahrt angebracht werden?
  - 2.2 Wie lautet die Funktionsvorschrift, die die Zufahrt in Ihrem Modell beschreibt.
  - 2.3 Ergänzen Sie Ihre Skizze um die Zufahrt.
3. Hinter der Ausfahrt soll eine Rampe die Skater zum Erdboden zurückbringen. Diese Rampe soll die Steigung  $-1$  haben.
  - 3.1 In welcher Höhe beginnt die Rampe?
  - 3.2 Wie lautet die Funktionsvorschrift, die die Rampe in Ihrem Modell beschreibt.
  - 3.3 In welcher Entfernung hinter der Einfahrt in die Halfpipe erreicht die Rampe den Boden?
  - 3.4 Ergänzen Sie Ihre Skizze um die Rampe.
4. Wir wissen bereits, dass der erste Teil unsere Skaterbahn mit einer Rampe nach  $10,5625 m$  wieder den Erdboden erreicht. Die Rampe hat die Steigung  $-1$ .

Der weitere Verlauf bis zu einer Länge von  $18 m$  soll mit Hilfe einer Funktion dritten Grades beschrieben werden. Diese hat bereits die vorgegebene Form

$$g(x) = ax^3 + 1,3243x^2 + bx + 86,697$$

- 4.1 Berechnen Sie die fehlenden Parameter so, dass ein knickfreier Übergang von der Rampe in den anschließenden Teil der Bahn erfolgt.
- 4.2 Zeigen Sie, dass zur Realisierung dieses Verlaufs der Bahn ein Erdaushub notwendig ist und geben sie die maximale Tiefe des Aushubs an.  
**Hinweis:** Sollten Sie in 4.1 kein Ergebnis erhalten haben, dann nutzen Sie  $a = -0,0304$  und  $b = -18,8043$
- 4.3 Zeigen Sie, dass der Aushub bis zu einer Länge der Bahn von  $15\text{ m}$  erfolgt.
- 4.4 Begründen, warum auf dem Teil zwischen  $15\text{ m}$  und  $18\text{ m}$  kein weiterer Aushub notwendig ist, sondern eine Aufschüttung notwendig ist. Wie hoch ist der Hügel?
- 4.5 Ergänzen Sie in der begonnen Skizze den hier weiter beschriebenen Verlauf der Bahn bis  $18\text{ m}$ .
- 4.6 Warum ist die Modellierung der Bahn mit Hilfe von  $g(x)$  spätestens kurz hinter  $18\text{ m}$  nicht sinnvoll?
5. Zwischen der zweiten Senke und dem anschließenden Hügel soll der Betrag der Steigung den Wert  $0,45$  nicht übersteigen.
- 5.1 Überprüfen Sie, ob das erfüllt ist.
- 5.2 Berechnen Sie den zugehörigen Punkt im Bahnmodell.
6. Um möglichst effektiv zu arbeiten, soll der Hügel aus 4.4 mit dem Material aus 4.3 aufgeschüttet werden.  
 Wir wissen, dass das Volumen des Aushubs und des Hügels proportional zu den jeweiligen Querschnittsflächen der jeweiligen Bahnteile ist.
- 6.1 Zeigen Sie, dass der Aushub der Bahn ausreicht, um den anschließenden Hügel aufzuschütten.
- 6.2 Berechnen Sie den prozentualen Anteil des verbleibenden Aushubs.
7. Zwischen  $15\text{ m}$  und  $18\text{ m}$  ist mit altem Material bereits ein Hügel aufgeworfen worden, dessen Querschnitt die Form eines Parabelbogens hat:

$$h(x) = -\frac{1}{25}x^2 + \frac{33}{25}x - 10,8.$$

- 7.1 Zeigen Sie  $h(15) = h(18) = 0$ , indem Sie die Nullstellen von  $h(x)$  berechnen.
- 7.2 Berechnen Sie in Prozent, wie viel Material vom Aushub Sie zur Erstellung des Hügel nun einsparen.  
**Hinweis:** Sie dürfen voraussetzen, dass  $g(x) - h(x) \geq 0$  für  $15 \leq x \leq 18$ .
- 7.3 Begründen Sie kurz, warum für die praktische Umsetzung des Vorhabens in 6.2 die Voraussetzung  $g(x) - h(x) \geq 0$  für  $15 \leq x \leq 18$  wichtig ist?