

Aufgaben: Kurvendiskussion  
Teil 5: Gebrochen-rationale Funktionen

---

**Aufgabe 1.**

- a) Was ist eine gebrochen-rationale Funktion (Zusammensetzung, Definition). Geben Sie (auch kompliziertere) Beispiele.
- b) Wie berechnet man die Schnittpunkte mit den Achsen?
- c) Warum muss man bei gebrochen-rationalen Funktionen zwingend den Definitionsbereich bestimmen?
- d) Was sind *Definitionslücken*?
- e) Wodurch können sich Definitionslücken prinzipiell unterscheiden?
- f) Beschreiben Sie die Auswirkungen einer Definitionslücke für den Verlauf der Funktion. Berücksichtigen Sie dabei auch d).
- g) Erklären Sie den Begriff *Polstelle* am Beispiel  $f(x) = \frac{1}{x+4}$ .
- h) Für  $x \rightarrow \infty$  und  $x \rightarrow -\infty$  zeigen gebrochen-rationale Funktionen asymptotisches Verhalten. Wie kann die Asymptote bestimmt werden? Um was für eine Art von Funktion handelt es sich bei der Asymptote immer?
- i) Wie lautet die Asymptote bei Funktionen, für die der Nennergrad größer als der Zählergrad ist?
- j) Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 - 4}{x - 1}$ .
- k) Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2 - 1}{x - 1}$  und  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 - 1}{x - 1}$ . Warum war hier im Gegensatz zur Aufgabe j) die Unterteilung in die einseitigen Grenzwerte notwendig?
- l) Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x + 1}$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x + 1}$ .
- m) Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{x + 2}$  und  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{x + 2}$ . Erläutern Sie den Unterschied zu Aufgabe l).
- n) Bestimmen Sie die Asymptote von  $\frac{x^2 - 1}{x + 2}$  für  $x \rightarrow \pm\infty$ .

---

*Adresse:* Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm

*E-Mail:* [mail@frank-klinker.de](mailto:mail@frank-klinker.de)

*Version:* 6. September 2023

**Aufgabe 2.**

- a) Wie lautet die Quotientenregel der Ableitung?
- b) Wie kann man die Steigung einer gebrochen-rationalen Funktion an einer gegebenen Stelle  $x = x_0$  bestimmen?
- c) Wie kann man die Stelle  $x_0$  bestimmen, an der eine gebrochen-rationale Funktion eine vorgegebenen Steigung hat?
- d) Berechnen Sie  $f'(x)$  für  $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x + 1}$
- e) Bestimmen Sie für die Funktion  $f(x)$  aus d) die Steigung an den Stellen  $x = 1$  und  $x = 0$ .
- f) Bestimmen Sie die Stelle/n, an der/denen die Steigung von  $f(x)$  aus d) verschwindet.

**Aufgabe 3.** Diskutieren Sie die folgenden Funktionen:

a)  $f(x) = \frac{2x + 2}{x^2 - 3x}$

b)  $f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x^2 - 1}$

c)  $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{5x - 5}$

d)  $f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 2x}$