Frank Klinker

Anwendungen zur Kraftzerlegung und Kraftaddition

Teil 1: Die schiefe Ebene (auch mit Reibung)

1 Die schiefe Ebene

1.1 Die schiefe Ebene ohne Reibung

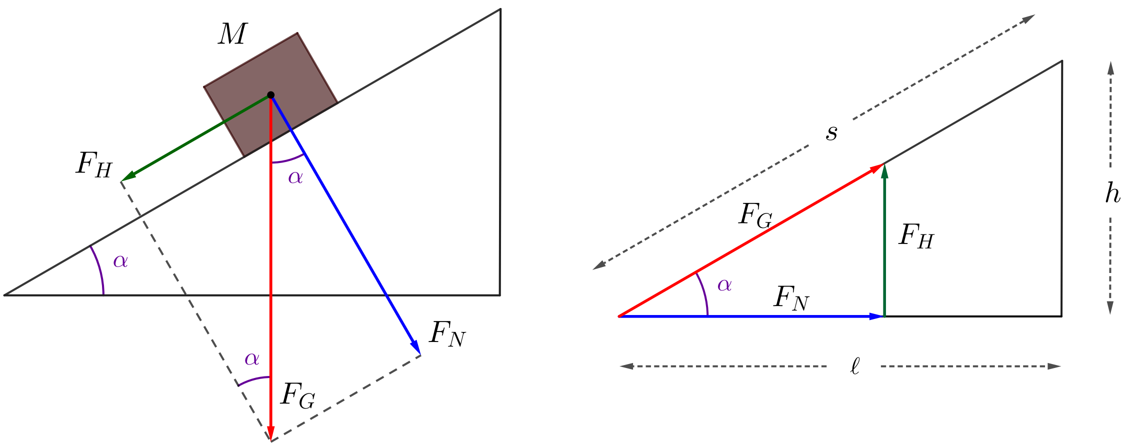
Eine erste Anwendung der Kraftzerlegung ist die **schiefe Ebene**. Darunter versteht man eine Ebene, die gegen die Horizontale um einen festen Winkel α gekippt ist.

Wir sehen uns einen Probekörper an, der sich auf einer solchen schiefen Ebene frei, d. h. reibungsfrei, bewegt. Wir bemerken, dass der Körper sich abwärts bewegt und dabei immer schneller wird. Er wird also entlang der Ebene beschleunigt. Das zweite Newtonsche Gesetz sagt nun, dass für diese Beschleunigung eine Kraft verantwortlich ist. Aber welche?

Die einzige Kraft, die auf den Körper ein wirkt, ist die Gravitationskraft, die jedoch senkrecht nach unten zeigt.

Die Lösung dieses scheinbaren Problems liefert die Abb. 1(links). Hier wird die Gravitationskraft F_G in zwei Komponenten zerlegt. Die eine Komponente F_H verläuft parallel zur schiefen Ebene und heißt **Hangabtriebskraft**, die zweite Komponente F_N verläuft senkrecht zur schiefen Ebene und heißt **Normalkraft**.

Abbildung 1: Die Käfte an der reibungsfreien schiefen Ebene



Die Hangabtriebskraft ist für die Beschleunigung a_H der Masse entlang der Ebene verantwortlich:

$$a_H = \frac{F_H}{m} .$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 28. März 2025

Beziehungen zwischen F_G, F_H und F_N

- Da das Kräfteparallelogramm rechtwinklig ist, gilt der Satz von Pythagoras:

$$\boxed{F_G^2 = F_H^2 + F_N^2}$$

- Mit Hilfe von Abb. 1(rechts) liefert uns der Strahlensatz die folgenden Beziehungen zwischen der Geometrie der schiefen Ebene und der beteiligten Kräfte: Kennt man die Strecke s der schiefen Ebene und die dabei zurückgelegte Höhe h, dann gilt

$$\frac{F_H}{F_G} = \frac{h}{s} \quad \text{oder} \quad \boxed{F_H = \frac{h}{s} \cdot F_G}.$$

Ist dazu noch $\ell = \sqrt{s^2 - h^2}$ die horizontale Länge der schiefen Ebene, dann ist

$$\frac{F_N}{F_G} = \frac{\ell}{s} \quad \text{oder} \quad \boxed{F_N = \frac{\ell}{s} \cdot F_G}$$

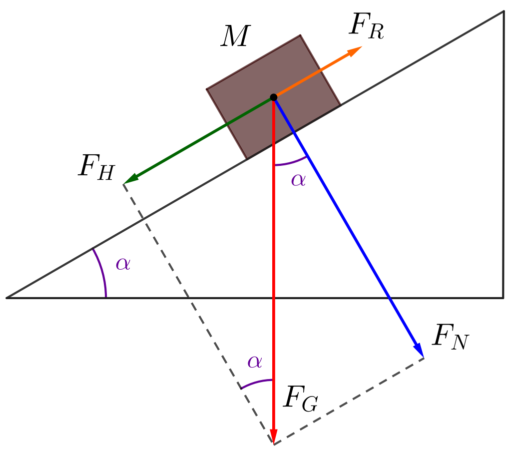
- Mit Hilfe trigonometrischer Ausdrücke kann man das in Termen des beteiligten Steigungswinkels α ausdrücken

$$\frac{F_H}{F_G} = \sin(\alpha) \quad \text{oder} \quad \boxed{F_H = F_G \cdot \sin(\alpha)}$$
$$\frac{F_N}{F_G} = \cos(\alpha) \quad \text{oder} \quad \boxed{F_N = F_G \cdot \cos(\alpha)}$$

1.2 Die schiefe Ebene mit Reibung

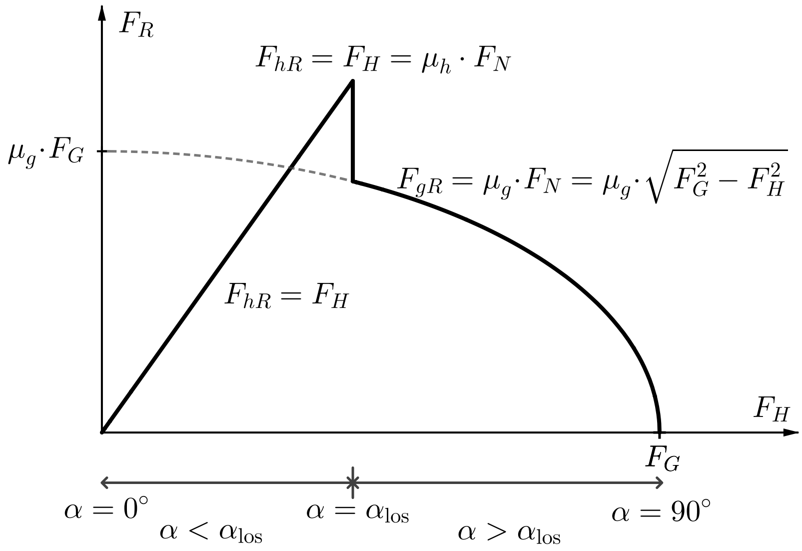
Als nächstes sehen wir uns die Bewegung mit zusätzlicher Reibung an. Die Reibung macht sich durch eine zusätzliche Kraft entgegen der Bewegungsrichtung bemerkbar, siehe Abb. 2.

Abbildung 2: Die Käfte an der schiefen Ebene mit Reibung (in der Gleitphase)



1. Platzieren wir den Körper auf der schiefen Ebene und lassen den Winkel wachsen, dann wird zunächst nichts passieren, da der Körper auf der Ebene haftet: die Reibungskraft (genauer: **Haftreibungskraft**) ist dann genauso groß, wie die Hangabtriebskraft: $F_R = F_{hR} = F_H$.
2. Bei einem Grenzwinkel α_{los} wird der Körper sich in Bewegung setzen. Bei diesem Winkel ist die Haftreibungskraft maximal: sie ist dann proportional zur Normalkraft. Der Proportionalitätsfaktor μ_h heißt **Haftreibungskoeffizient**. Es gilt also $F_R = F_{hR} = F_H = \mu_h F_N$
3. Ist der Neigunswinkel größer als der Winkel α_{los}, dann gleitet der Körper und es wirkt die **Gleitreibungskraft**. Diese ist ebenfalls proportional zur Normalkraft, jedoch mit einem Proportionalitätsfaktor $\mu_g < \mu_h$. μ_g heißt **Gleitreibungskoeffizient** und es gilt $F_R = F_{gR} = \mu_g F_N$

Abbildung 3: Die Reibungskraft in Abhängigkeit von der Hangabtriebskraft



zu 2. Zur Bestimmung des Grenzwinkels $\alpha = \alpha_{\text{los}}$ sehen wir uns die Kräftesituation an der schiefen Ebene in dieser Situation noch einmal an:

$$F_R = F_H = \mu_h F_N.$$

Nutzen wir $F_H = mg\sin(\alpha)$ und $F_N = mg\cos(\alpha)$, dann liefert die Reibungskraft im Grenzfall $mg\sin(\alpha_{\text{los}}) = \mu_h mg\cos(\alpha_{\text{los}})$. Wenn wir das nach dem Winkel auflösen erhalten wir

$$\boxed{\alpha_{\text{los}} = \arctan(\mu_h)}$$

zu 3. In der Gleitreibungsphase $\alpha > \alpha_{\text{los}}$ wirkt die Gleitreibungskraft der Hangabtriebskraft entgegen. Damit ergibt sich die reduzierte, hangabwärts zeigende, beschleunigende Kraft

$$F_H - F_R = mg\sin(\alpha) - \mu_g mg\cos(\alpha) = mg\big(\sin(\alpha) - \mu_g\cos(\alpha)\big)$$

Das liefert schließlich die reduzierte Beschleunigung $a = \dfrac{F_H - F_R}{m}$, also

$$\boxed{a = g\big(\sin(\alpha) - \mu_g\cos(\alpha)\big)}$$

1.3 Hinweis zum klassischen Gleitreibungsversuch und zu Grafik 3

Die Grafik 3 sollte nicht mit der analogen Grafik zum klassischen *Zugversuch zur Reibung* verwechselt werden. Bei diesem wird ein Probekörper waagerecht über eine Unterlage gezogen und die Reibungskraft gemessen.

In diesem Versuch stellt sich heraus (indem man zunächst die Geschwindigkeit konstant hält), dass die (Gleit-)Reibungskraft unabhängig von der Geschwindigkeit ist. Ebenso ist sie unabhängig von der Auflagefläche.

Die einzige Abhängigkeit besteht von der Normalkraft F_N, mit der der Körper auf die Unterlage gepresst wird (im Versuch durch die Masse des Körpers, also dessen Gewichtskraft realisiert). Man erhält den bereits oben (in Punkt 3 beschriebenen) beschriebenen proportionalen Zusammenhang $F_{gR} = \mu_g \cdot F_N$.

Nimmt man die Haftreibung hinzu, die im Versuch als Hemmnis zum Gleitvorgang erkannt wird, dann ergibt sich folgende Grafik, welche die Abhängigkeit der Reibungskraft von der Zugkraft beschreibt:

Abbildung 4: Die Reibungskraft in Abhängigkeit von der Zugkraft