Frank Klinker

Grundlagen: Arbeit und Energie

Teil 2: Beispiele mechanischer Arbeit und Energieerhaltung

4 Beispiele mechanischer Arbeit und Energie

Viele Aufgaben im Zusammenhang mit mechanischer Arbeit nehmen den Idealfall an, dass die gesamte Energie in mechanische Arbeit umgesetzt wird. Das heißt, es gibt keine Verluste durch Wärme oder Strahlung.

Statt davon zu sprechen, dass Arbeit beim Anheben verrichtet wird, spricht man auch davon, dass Lageenergie gewonnen wird. In diesem Sinne verwendet man die Begriffe Energie und Arbeit wechselseitig.

Das werden wir in den folgenden zentralen Beispielen auch so handhaben.

4.1 Beispiel: Hubarbeit/Lage- oder potentielle Energie

Das erste Beispiel greift direkt unser Eingangsbeispiel auf:

Wird eine Last mit der Gewichtskraft F_G um die Höhe h angehoben, so wird an ihm **Hubarbeit** verrichtet. Sie gewinnt dabei **Lageenergie** bzw. **potentielle Energie** um den selben Wert. Wir schreiben dafür

$$\boxed{E_{\text{pot}} = F_G\, h}$$

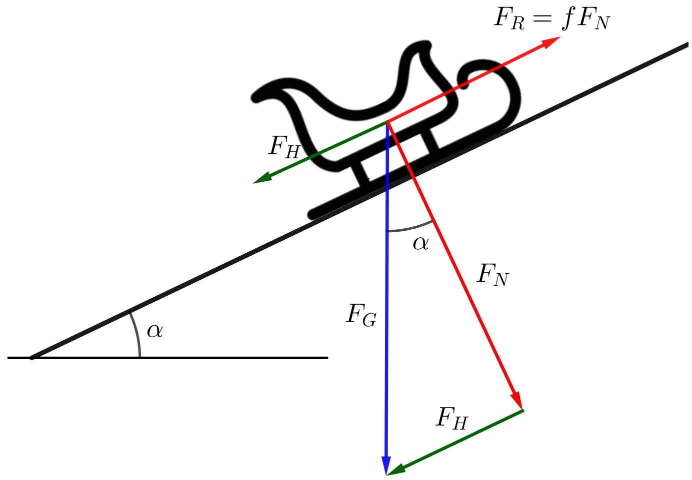
Wir dürfen unsere Definition hier direkt nutzen, denn die Kraft ist konstant und Kraft und Weg zeigen in die gleiche Richtung.

4.2 Beispiel: Reibungsarbeit / Reibungsenergie

Wir betrachten hier lediglich Haft-, Gleit- oder Rollreibung. Wir wissen, dass diese Reibungskräfte über den Reibungskoeffizienten f proportional zur Normalkraft sind: $F_R = f F_N$. Die Normalkraft wiederum ist die Kraft, die ein Körper senkrecht zur Oberfläche ausübt. Ihr Wert hängt direkt mit der Gewichtskraft des Körpers zusammen und ist abhängig von dem Neigungswinkel α der Oberfläche zur Waage-

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

rechten:[a]



Bewegen wir den Körper nun um die Strecke s über die Oberfläche, so ist die **Reibungsarbeit** oder **Reibungsenergie**

$$\boxed{E_{\text{reib}} = F_R\, s = f\, F_N\, s}$$

Diese Reibungsenergie steht nicht für mechanische Arbeit zur Verfügung, sondern macht sich typischerweise als Wärme bemerkbar – umgangssprachlich: sie geht als Wärme verloren.

Auch in diesem Beispiel durften wir die Definition der Arbeit direkt nutzen, denn die Kraft ist konstant und Kraft und Weg zeigen in die gleiche Richtung.

4.3 Beispiel: Federarbeit, Spannarbeit / Feder- oder Spannenergie

In unserem nächsten Beispiel sehen wir uns eine Feder mit der Federkonstanten D an. Wir interessieren uns für die **Spannarbeit**, die wir benötigen, um die Feder um die Strecke s aus seiner Ruhelage zu dehnen – bzw. für die **Spannenergie** oder **Federenergie**, die in einer Feder gespeichert ist, die um die Strecke s aus seiner Ruhelage gedehnt wurde.

Wir wissen, dass die Kraft, die wir für das Dehnen um die Strecke s aus der Ruhelage benötigen, den Wert

$$F = Ds$$

hat. Diese Kraft ist somit nicht konstant und wir können unsere Definition der Arbeit in der angegebene Form nicht direkt anwenden.

In der Tat erhalten wir ein Ergebnis, dass um einen Faktor $\frac{1}{2}$ kleiner ist, als uns die (falsche) Anwendung der Definition geben würde:

$$\boxed{E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2}\, D\, s^2}$$

[a] Genauer: für die Normalkraft gilt $F_N = F_G \cos\alpha$ und für die Hangabtriebskraft $F_H = F_G \sin\alpha$.

4.4 Beispiel: Beschleunigungsarbeit / Bewegungs- oder kinetische Energie

Ein bewegter Körper hat durch seine Bewegung Energie gespeichert. Das merkt man etwa daran, dass beim Aufprall des Körpers auf einen anderen Körper Arbeit z. B. in Form von Verformung verrichtet wird. Es ist auch unmittelbar einsichtig, dass diese **Bewegungsenergie** oder **kinetische Energie** von der Masse m des Körpers und von seiner Geschwindigkeit v abhängt. Da die Geschwindigkeit einer Bewegung durch eine Beschleunigung hervorgerufen wird, spricht man auch von *Beschleunigungsarbeit*. Die kinetische Energie berechnet sich gemäß

$$\boxed{E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\, m\, v^2}$$

5 Energieerhaltung

Wir betrachten noch einmal den Federversuch und zwar genauer die Ruhelage nach anhängen einer Masse. Lenken wir nun die Masse nach unten aus, so ändert sich die Spannenergie der Feder und die potentielle Energie des Massestücks: man kann sagen, dass sich ein Teil der potentiellen Energie in Spannenergie umgewandelt hat.

Lassen wir nun die Masse los, so wird diese durch die Feder nach oben gezogen. Dadurch verliert die Feder an Spannenergie und das Massestück gewinnt potentielle und kinetische Energie. Dieser Vorgang wiederholt sich nun mit jedem Durchgang der Masse durch die Ruhelage.

Wir sehen, dass die Energieformen sich bei dieser Schwingung ständig in ineinander umformen.

Wir sehen ebenfalls, dass sich diese Schwingung im optimalen Fall unverändert wiederholt. Das heißt, dass die gesamte Energie des Systems Feder-Masse in diesem System verbleibt.

Das ist kein Besonderheit, sondern es gilt die Energieerhaltung

Energieerhaltung

- Bei reibungsfreien, mechanischen Vorgängen wandeln sich die drei mechanischen Energieformen Spannenergie, potentielle Energie und kinetische Energie verlustfrei ineinander um.

  Die Gesamtenergie bleibt dabei erhalten.

- Tritt in einem mechanischen System Reibung auf, so macht sich das als "Verlust" durch Wärme bemerkbar.

Bemerkung 1.

In unserem Federversuch macht sich die Reibung bemerkbar, denn die Amplitude der Schwingung nimmt nach und nach ab, bis das System zur Ruhe kommt.
Wir haben weiter oben schon davon gesprochen, dass neben der reinen Umsetzung von Energie in mechanische Arbeit noch andere "Energieverluste" eine Rolle spielen. Das haben wir hier nun genauer formuliert.
Insbesondere kann man Energie nur in dem Sinne sparen, dass man sie nicht in eine andere Energieform umwandelt.

Beispiel 2. Wir lassen einen Körper der Masse $m = 12\,kg$ aus einer Höhe von $5\,m$ fallen. Welche Geschwindigkeit hat der Körper zum Zeitpunkt des Aufpralls auf die Erde?
Da wir den Körper aus der Ruhe fallen lassen, ist die Energie des Körpers vor dem Fall durch die potentielle Energie gegeben:

$$E = E_{\text{pot}} = mgh = 12 \cdot 9{,}81 \cdot 5\,J = 588{,}6\,J\,.$$

Zum Zeitpunkt des Aufpralls auf dem Erdboden ist die potentielle Energie des Körpers $E_{\text{pot}} = \ J0$ und die gesamte Energie ist in Form kinetischer Energie vorhanden:

$$E = E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = 6\,kg \cdot v^2\,.$$

Da die Gesamtenergie erhalten bleibt, haben wir

$$588{,}6\,J = 6\,kg \cdot v^2 \iff v^2 = \frac{588{,}6}{6}\frac{m^2}{s^2} \iff v \approx 9{,}9\frac{m}{s}\,.$$

Allgemein bekommen wir mit Hilfe der Energiebilanz für einen freien Fall aus der Höhe h ohne Anfangsgeschwindigkeit die Aufprallgeschwindigkeit:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \iff v = \sqrt{2gh}\,.$$

Das ist das gleiche Ergebnis, das wir bereits bei der Untersuchung des freien Falls als gleichförmig beschleunigte Bewegung erhalten haben.

6 Exkurs 1: Details zur Spann- und kinetischen Energie

6.1 Herleitung der Federenergie aus Beispiel 4.3

Um das Ergebnis $E = \frac{1}{2}Ds^2$ herzuleiten, behelfen wir uns eines sehr wichtigen und gern angewandten Tricks:

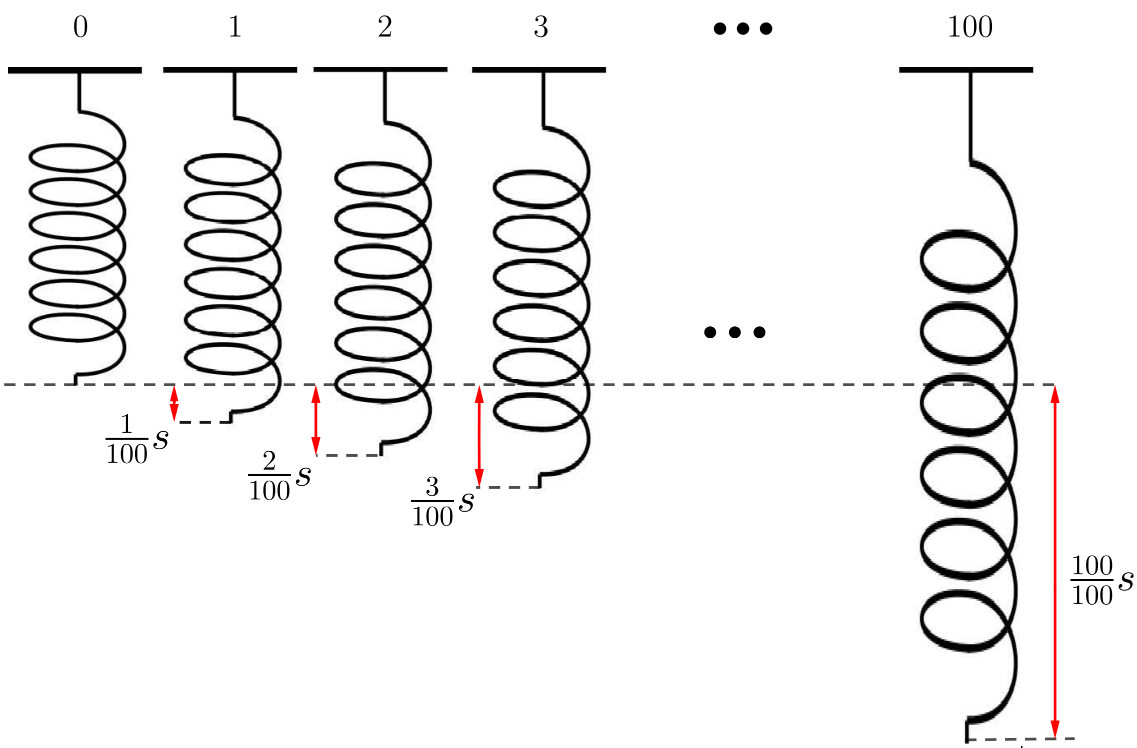
Statt die Arbeit/Energie in einem Schritt zu berechnen, zerlegen wir die Dehnung der Feder in viele kleine Teilstücke. Wir berechnen dann für jedes Teilstück die Energie. Am Schluss summieren wir alle Teile zusammen und erhalten die gesuchte Gesamtenergie.

Man kann nun einwenden, dass auch bei einer Zerlegung der Strecke, die Kraft auf jedem Teilstück nicht konstant ist, und uns die Zerlegung daher nicht hilft.

Die Idee ist jedoch nun, die Zerlegung so klein zu wählen, dass sich auf jedem Teilstück die Kraft nur sehr wenig ändert und daher als konstant angesehen werden darf.

In unserer expliziten Rechnung wählen wir eine Zerlegung in 100 Teilstücke:

Abb. 1: Die Zerlegung der Auslenkung einer Feder



<u>Beachte:</u> In jedem der 100 Schritte wird die Feder stets um die gleiche Teilstrecke $\frac{1}{100}s$ gedehnt!

Nach Dehnung 1 haben wir die Kraft $F_1 = D \cdot \frac{1}{100}s$ und die Strecke $s_1 = \frac{1}{100}s$, also die Energie

$$E_1 = D \cdot \tfrac{1}{100}s \cdot \tfrac{1}{100}s = Ds^2 \cdot \frac{1}{100^2}$$

Nach Dehnung 2 haben wir die Kraft $F_2 = D \cdot \frac{2}{100}s$ und die Strecke $s_2 = \frac{1}{100}s$, also die Energie

$$E_2 = D \cdot \tfrac{2}{100}s \cdot \tfrac{1}{100}s = Ds^2 \cdot \frac{2}{100^2}$$

Nach Dehnung 3 haben wir die Kraft $F_3 = D \cdot \frac{3}{100}s$ und die Strecke $s_3 = \frac{1}{100}s$, also die Energie

$$E_3 = D \cdot \tfrac{3}{100}s \cdot \tfrac{1}{100}s = Ds^2 \cdot \frac{3}{100^2}$$

Führen wir das so fort, dann haben wir nach Dehnung 100 die Kraft $F_{100} = D \cdot \frac{100}{100} s$ und die Strecke $s_{100} = \frac{1}{100} s$, also die Energie

$$E_{100} = D \cdot \tfrac{100}{100} s \cdot \tfrac{1}{100} s = Ds^2 \cdot \frac{100}{100^2}$$

Diese summieren wir nun zur Gesamtenergie auf:[(b)]

$$\begin{aligned}
E &= E_1 + E_2 + E_3 + \cdots + E_{100} \\
&= Ds^2 \cdot \frac{1}{100^2} + Ds^2 \cdot \frac{2}{100^2} + Ds^2 \cdot \frac{3}{100^2} + \cdots + Ds^2 \cdot \frac{100}{100^2} \\
&= Ds^2 \cdot \frac{1}{100^2} \cdot \big(1 + 2 + 3 + \cdots + 100\big) \\
&= Ds^2 \cdot \frac{1}{100^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot \big(100 + 1\big) \\
&= \frac{1}{2} Ds^2 \cdot \Big(1 + \frac{1}{100}\Big)
\end{aligned}$$

Die Zerlegung in 100 Teilstücke ist nur ein Beispiel und die Zerlegung ließe sich ohne Probleme erweitern. Aber man sieht bereits bei 100 Teilstücken, dass die erhaltene Summe nur sehr wenig von dem genauen Wert $\frac{1}{2} Ds^2$ abweicht. Der Fehler ist $\frac{E - E_{\text{Feder}}}{E_{\text{Feder}}} = \frac{1}{100}$, also 1%.

Dieser wird immer kleiner, wenn wir die Zerlegung feiner machen, bei 100000 Teilstücken wäre der Fehler nur noch 0,001%, also vernachlässigbar. Damit ist die Formel für die Federenergie hergeleitet.

6.2 Herleitung der kinetischen Energie aus Beispiel 4.3

Im Fall der kinetischen Energie ist es schwieriger, die Formel herzuleiten und benötigt das mathematische Werkzeug der Integration, siehe den folgenden Abschnitt 7.

Wenn wir wüssten wie der Körper der Masse m auf die Geschwindigkeit v beschleunigt worden wäre, dann könnten wir über das zweite Newtonsche Axiom, $F = ma$, die Kraft berechnen. Diese ist dann aber in der Regel nicht konstant, sodass wir die Definition der Arbeit nicht anwenden können.

Nehmen wir deshalb als spezielle Situation an, dass der Körper mit einer konstanten Beschleunigung a beschleunigt wurde.

Dann ist auch $F = ma$ konstant und nach Zurücklegen der Strecke s besitzt der Körper die Energie

$$E = Fs = mas\,.$$

Wir wissen, dass Geschwindigkeit v und Strecke s sich bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung gemäß

$$v = at \quad \text{und} \quad s = \frac{1}{2} at^2$$

[(b)] Berechnet man die Summe $1 + 2 + 3 + \cdots + N$ der ersten N natürlichen Zahlen, dann erhält man als Ergebnis $\frac{N(N+1)}{2}$.

berechnen. Wir setzen zunächst $s = \frac{1}{2}at^2$ in E ein und erhalten

$$E = mas = ma \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}ma^2t^2 \,.$$

Hier setzen wir nun $a = \frac{v}{t}$ ein und bekommen abschließend

$$E = \frac{1}{2}ma^2t^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{t}\right)^2 t^2 = \frac{1}{2}\,m\,v^2 \,.$$

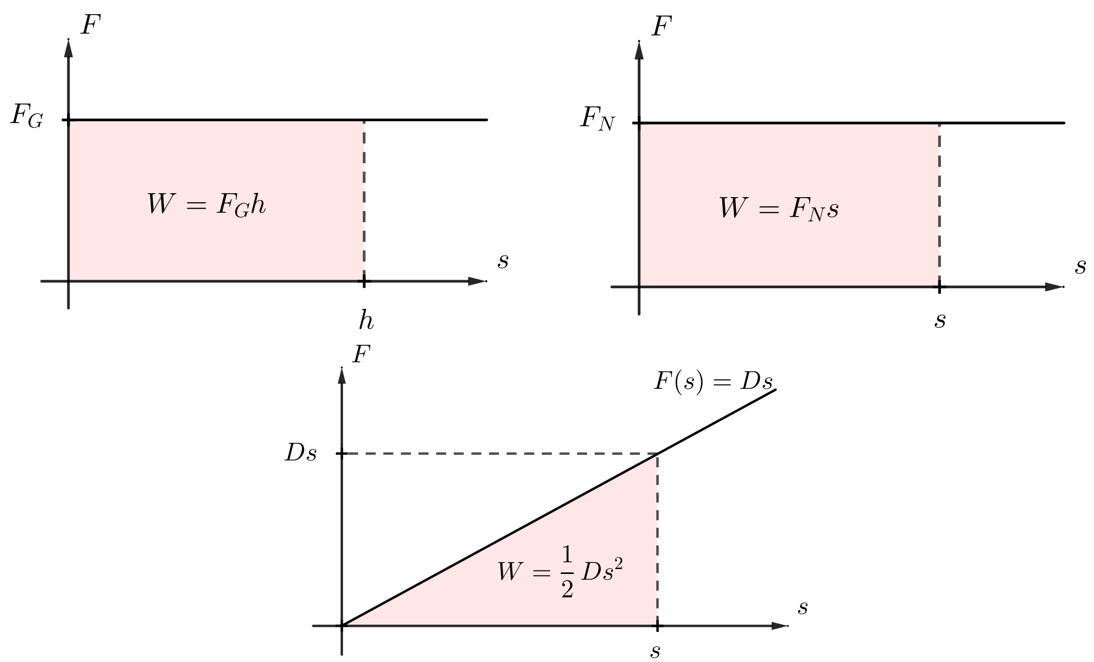
7 Exkurs 2: Erweiterte Definition der Arbeit

Wir sehen uns die Beispiele aus den Abschnitten 4.1 bis 4.3 noch einmal genauer an. In diesen drei Fällen kannten wir den Verlauf der Kraft in Abhängigkeit von der Strecke. Die ersten zwei Beispiele hatten eine konstante Kraft und im dritten Beispiel war die Kraft linear:

$$F(s) = F_G \,, \qquad F(s) = F_N \,, \qquad F(s) = Ds \,.$$

Wir tragen das in Koordinatensystemen auf und stellen eine bemerkenswerte Gemeinsamkeit fest, die allgemein gültig ist!

Abb. 2: Arbeit vs. Fläche im F-s-Diagramm

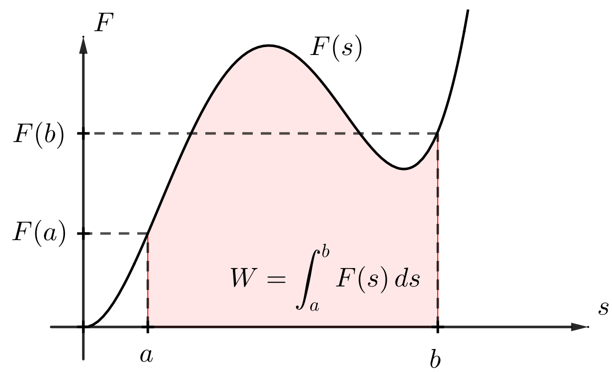


Die Arbeit W entspricht der Fläche unter dem Graphen im F-s-Diagramm.

Diese Fläche lässt sich nur in einfachen Fällen direkt berechnen: in der Regel ist der Verlauf von $F(s)$ zu kompliziert. Für die Arbeit auf dem Streckenabschnitt zwischen

$s = a$ und $s = b$, also für die Fläche unter dem Graphen von $F(s)$ von a bis b, schreibt der Physiker[c]

$$W = \int_a^b F(s)\,ds$$



Herleitung der Spannenergie aus Beispiel 4.3

Für alle die sich mit der Integration als Umkehrung der Differentiation auskennen, berechnen wir Beispiel 4.3 mit $F(s) = Ds$

$$W = \int F(s)\,ds = \int Ds\,ds = \frac{1}{2}Ds^2\,.$$

Streng genommen haben wir in Abschnitt 6.1 genau diese Integration "zu Fuß" durchgeführt.

Herleitung der kinetischen Energie aus Beispiel 4.4

In Abschnitt 6.1 haben wir die kinetische Energie lediglich für den Spezialfall konstanter Beschleunigung besprochen.

Für alle, die sich mit der Integration genauer auskennen und die Substitution beherrschen, berechnen wir Beispiel 4.4 hier ausgehend vom zweiten Newtonschen Gesetz $F(s) = ma$.

Die Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit und die Geschwindigkeit ist die zeitliche Ableitung der Strecke:

$$a(t) = v'(t) \quad \text{und} \quad v(t) = s'(t)\,.$$

Wir haben mit der Substitution $s = s(t)$, also $ds = s'(t)\,dt = v(t)\,dt$,

$$F(s)ds = m\,a(t)\,v(t)\,dt = m\,v'(t)\,v(t)\,dt\,.$$

Mit der weiteren Substitution $v = v(t)$, also $dv = v'(t)\,dt$, folgt

$$F(s)\,ds = m\,v(t)\,v'(t)\,dt = mv\,dv\,.$$

Damit ist nach Integration

$$W = \int F(s)\,ds = \int mv\,dv = \frac{1}{2}mv^2\,.$$

[c] Man liest das als "Integral über $F(s)$ in den Grenzen von a bis b".

8 Abschlussbemerkung

Neben der hier behandelten mechanischen Arbeit und den damit verbundenen Energieformen und der ebenfalls angesprochenen Wärmeenergie und Strahlungsenergie gibt es weitere Energieformen.

Die bekanntestem aus dem Alltag sind sicher die elektrische Energie, die chemische Energie und die Kernenergie.

So kann etwa mechanische in elektrische Energie überführen, so wie beim Dynamo, oder umgekehrt, so wie beim Elektromotor.

Ohne chemische Energie würde ein Verbrennungsmotor und ohne Kernenergie ein Atomkraftwerk nicht funktionieren.

Diese Unterscheidung der Energieformen ist jedoch eher historisch. Bei einer genaueren Betrachtung sieht man, dass hier oft Überschneidungen stattfinden.