Frank Klinker

Was sind Brüche und wie rechnet man mit ihnen?

1 Was sind Brüche?

Aus dem Alltag wissen wir, dass die ganzen Zahlen zum Rechnen nicht ausreichen. Im Mathematikunterricht in der Schule haben wir das dann in der sechsten Klasse gemerkt. Dort haben wir deshalb die Brüche kennen gelernt.

Zunächst wurden sie als Schreibweise für bestimmt 'Anteile' verwendet, z. B.

- $\frac{1}{2}$ ist der Anteil, wenn man ein Ganzes in 2 gleiche Teile teilt.
- $\frac{1}{122}$ ist der Anteil, wenn man ein Ganzes in 122 gleiche Teile teilt.
- $\frac{2}{3}$ ist der Anteil, wenn man ein Ganzes in 3 Teile gleiche teilt und davon dann 2 Teile nimmt.

Wir machen es uns hier sehr viel einfacher und sagen:

Ein **Bruch** besteht aus zwei ganzen Zahlen, die übereinander geschrieben und durch einen **Bruchstrich** getrennt werden.

Die obere Zahl heißt **Zähler** und die untere Zahl heißt **Nenner**.

$$\text{Bruch}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{360}{113}\end{array}\right.\quad \begin{array}{l}\leftarrow \text{Zähler}\\ \leftarrow \text{Bruchstrich}\\ \leftarrow \text{Nenner}\end{array}$$

Alle Brüche zusammen nennt man die **Menge der rationalen Zahlen** und bezeichnet sie auch mit $\mathbb{Q}$.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2 Wieso ist ein Bruch eine "Zahl"?

2.1 Brüche als Kommazahlen

Wir können ganze Zahlen der Größe nach sortieren, z. B. $-292 < -7 < 3 < 8 < 1001$.

Haben wir eine Kommazahl, können wir diese auch mit in den Vergleich einfügen, z. B. $-2 < -0{,}7 < 0 < 0{,}56 < 1 < 3{,}14 < 10 < 100{,}3$.

Um jetzt Brüche mit anderen Brüchen und mit ganzen Zahlen vergleichen zu können machen wir es uns wieder sehr einfach:

> Um den "Zahlwert" eines Bruchs zu ermitteln, berechnen wir die Kommazahl, die wir als Ergebnis der Rechnung **Zähler : Nenner** erhalten.

Beispiel 1.

$$\frac{1}{2} = 1 : 2 = 0{,}5 \qquad \frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$$

$$\frac{10}{4} = 10 : 4 = 2{,}5 \qquad \frac{12}{24} = 12 : 24 = 0{,}5$$

$$\frac{61}{100} = 61 : 100 = 0{,}61 \qquad \frac{2}{3} = 2 : 3 = 0{,}666\ldots = 0{,}\overline{6}$$

$$\frac{14}{99} = 14 : 99 = 0{,}141414\ldots = 0,\overline{14} \qquad \frac{31}{99} = 131 : 99 = 1{,}323232\ldots = 1{,}\overline{32}$$

$$\frac{51}{198} = 0{,}2575757\ldots = 0{,}2\overline{57} \qquad \frac{114}{171} = 114 : 171 = 0{,}666\ldots = 0{,}\overline{6}$$

$$\frac{3}{7} = 3 : 7 = 0{,}428571428571428571\ldots = 0,\overline{428571}$$

Bemerkung 2. 1. Es fällt auf, dass die Kommazahl, die wir nach dem "Ausrechnen" des Bruchs erhalten haben, entweder abbricht oder periodisch ist.

> Das ist tatsächlich immer so![1]

2. Es scheint zunächst sehr umständlich zu sein, dass man Brüche zuerst in eine Kommazahl verwandeln muss, um sie "als Zahlen behandeln zu können".

   Wir werden später sehen, dass dieses Umwandeln gar nicht nötig ist. Stattdessen kann man Brüche sehr einfach miteinander und mit ganzen Zahlen vergleichen. Außerdem kann man sogar sehr einfach mit ihnen rechnen ohne erst die Kommazahl zu bestimmen, siehe Abschnitt 4.

3. Wir sehen im obigen Beispiel bereits, dass verschiedene Brüche nach dem Ausrechnen die gleiche Kommazahl ergeben können. Diesem Phänomen widmen wir uns in Abschnitt 3.

[1] Die Begründung dafür ist nicht einfach und benötigt weitere mathematische Hilfsmittel.

Aufgabe 3. a) Geben Sie ein Verfahren an, wie Sie eine Kommazahl erhalten, die nicht abbricht und auch nicht periodisch ist.

b) Die Zahlen aus a) nennt man **irrationale Zahlen**. Recherchieren Sie Beispiele irrationaler Zahlen.

2.2 Kommazahlen als Brüche

So wie wir Brüche in Kommazahlen umwandeln können, können wir das auch umgekehrt machen. Dazu gehen wir in zwei Schritten vor und beginnen mit den abbrechenden Kommazahlen:

> Zähler und Nenner des Bruchs zu einer abbrechenden Kommazahl erhält man wie folgt:
>
> ▷ Den Zähler erhält man, indem man in der Kommazahl das Komma weglässt
>
> ▷ Der Nenner ist eine Zehnerpotenz mit so vielen Nullen, wie die Anzahl der Nachkommastellen der Kommazahl ist

Beispiel 4.

$$0{,}5 = \frac{5}{10} \qquad 0{,}375 = \frac{375}{1000} \qquad 2{,}05 = \frac{205}{100}$$

$$14{,}78 = \frac{1478}{100} \qquad 1{,}000009 = \frac{1000009}{1000000} \qquad 4 = \frac{4}{1}$$

$$235{,}701 = \frac{235701}{1000} \qquad 0{,}0008 = \frac{8}{10000} \qquad 1{,}00 = \frac{100}{100}$$

Bei den periodischen Kommazahlen sieht das schon etwas komplizierter aus. Wir werden aber sehen, dass es da einfache Spezialfälle gibt.

> Zähler und Nenner des Bruchs zu einer periodischen Kommazahl erhält man wie folgt:
>
> ▷ Der Zähler ist die Differenz aus zwei Zahlen:
>
> - Die erste Zahl erhält man, indem man in der Kommazahl das Komma und den "Periodenstrich" weglässt
> - die zweite Zahl erhält man aus der ersten, indem man zusätzlich die Ziffern der Periode weglässt
>
> ▷ Der Nenner ist das Produkt aus zwei Zahlen:
>
> - Eine Zahl mit so vielen Neunen, wie die Länge der Periode,
> - Eine Zehnerpotenz mit so vielen Nullen, wie die Anzahl der nicht-periodischen Nachkommastellen

Beispiel 5. Wir bestimmen den Bruch einer periodischen Kommazahl mit dem Verfahren von oben:

$$4{,}78\overline{261} = \frac{478261 - 478}{99900} = \frac{477783}{99900} \qquad 0{,}3\overline{84} = \frac{384 - 3}{990} = \frac{381}{990}$$

$$12{,}3889\overline{4} = \frac{1238894 - 123889}{90000} = \frac{1115005}{90000} \qquad 2{,}2\overline{1} = \frac{221 - 22}{90} = \frac{199}{90}$$

Beispiel 6. Einfacher ist es, wenn der Bruch rein-periodisch ist , d. h. es kommen keine nicht-periodischen Nachkommastellen vor:

$$4{,}\overline{161} = \frac{4161 - 4}{999} = \frac{4157}{999} \qquad 3{,}\overline{14} = \frac{314 - 3}{99} = \frac{311}{99}$$

$$12{,}\overline{34} = \frac{1234 - 12}{99} = \frac{1222}{99} \qquad 2{,}\overline{3} = \frac{23 - 2}{9} = \frac{21}{9}$$

Beispiel 7. Ganz besonders einfach ist das, wenn der Bruch rein-periodisch ist und vor dem Komma eine 0 steht:

$$0{,}\overline{6} = \frac{6}{9} \qquad 0{,}\overline{34} = \frac{34}{99} \qquad 0{,}\overline{018} = \frac{18}{999} \qquad 0{,}\overline{00015} = \frac{15}{99999}$$

3 Unterschiedliche Brüche aber gleiche Zahl?

3.1 Erste Beispiele gleicher Brüche

Sehen wir uns die Beispiele aus dem letzten Abschnitt nochmal genauer an. Dann sehen wir, dass es verschiedene Brüche geben kann, die nach dem Ausrechnen die selbe Kommazahl geben. Z. B.

$$0{,}\overline{6} = \frac{2}{3} = \frac{114}{171} = \frac{6}{9} \qquad \text{oder} \qquad 0{,}5 = \frac{1}{2} = \frac{12}{24} = \frac{5}{10}$$

Wenn zwei Brüche nach dem Berechnen die selbe Kommazahl ergeben, dann sagen wir: Die Brüche sind **gleich**.

Wir wollen nun untersuchen, wie man Brüchen ansehen kann, ob sie gleich sind. Wir machen das an den beiden obigen Beispielen:

$$\begin{tikzcd} \frac{2}{3} \arrow[r, bend left, "\cdot 57"] \arrow[r, bend right, "\cdot 57"'] \arrow[rr, bend left=50, "\cdot 3"] \arrow[rr, bend right=50, "\cdot 3"'] & \frac{114}{171} \arrow[r, bend left, ":19"] \arrow[r, bend right, ":19"'] & \frac{6}{9} \arrow[r, bend left, ":3"] \arrow[r, bend right, ":3"'] & \frac{2}{3} \end{tikzcd}$$

Man sieht, dass man Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl multipliziert oder durch die gleiche Zahl dividiert hat.

Auch im zweiten Beispiel sieht man das:

$$\begin{tikzcd}
\dfrac{12}{24} \arrow[r, bend left, ":12"] \arrow[r, bend right, ":12"'] \arrow[rr, bend left=50, "\boxed{?}"] \arrow[rr, bend right=50, "\boxed{?}"'] & \dfrac{1}{2} \arrow[r, bend left, "\cdot 5"] \arrow[r, bend right, "\cdot 5"'] & \dfrac{5}{10}
\end{tikzcd}$$

Achtung! In diesem zweiten Beispiel sieht man bereits, dass man nicht immer direkt einen benötigten Faktor findet. Dann ist ein Umweg mit mehreren Faktoren nötig!

3.2 Erweitern und Kürzen

Wir fassen das Resultat der Beispiele zusammen:

Erweitern:	Man erweitert einen Bruch, indem man Zähler und Nenner mit der gleichen ganzen Zahl multipliziert
Kürzen:	Man kürzt einen Bruch, indem man Zähler und Nenner durch die gleiche ganzen Zahl dividiert

Bemerkung 8. 1. Zwei Brüche sind gleich, wenn sie durch kürzen und erweitern ineinander übergehen.

2. Man kann einen Bruch immer erweitern. **Aber:** man kann einen Bruch immer nur so lange kürzen, wie man Zähler und Nenner durch eine gemeinsame Zahl teilen kann.

3. Kann man einen Bruch nicht kürzen, dann nennt man ihn **vollständig gekürzt**.

Beispiel 9.

$$\frac{21}{9} = \frac{21:3}{9:3} = \frac{7}{3} \qquad \text{(Kürzen mit 3)}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 142857}{7 \cdot 142857} = \frac{714285}{999999} \qquad \text{(Erweitern mit 142857)}$$

$$\frac{1050}{1575} = \frac{1050:5}{1575:5} = \frac{210}{315} = \frac{210:5}{315:5} = \frac{42}{63} = \frac{42:7}{63:7} = \frac{6}{9} = \frac{6:3}{9:3} = \frac{2}{3}$$
$$\text{(Kürzen mit 5, 5, 7 und 3)}$$

$$\frac{60}{165} = \frac{60:5}{165:5} = \frac{12}{33} = \frac{12 \cdot 3}{33 \cdot 3} = \frac{36}{99} \qquad \text{(Kürzen mit 5, Erweitern mit 3)}$$

$$\frac{9}{12} = \frac{9:3}{12:3} = \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{75}{100} \qquad \text{(Kürzen mit 3, Erweitern mit 25)}$$

Für das Kürzen schreiben wir auch kürzer:

$$\frac{1050}{1575} = \frac{\cancel{1050}^{210}}{\cancel{1575}_{315}} = \frac{\cancel{210}^{42}}{\cancel{315}_{63}} = \frac{\cancel{42}^{6}}{\cancel{63}_{9}} = \frac{\cancel{6}^{2}}{\cancel{9}_{3}} = \frac{2}{3}$$

Der Nachteil dieser Notation ist, dass man nicht sieht, mit welcher Zahl gekürzt wurde.

4 Wie rechnet man mit Brüchen?

Wir haben Brüche mit Zahlen identifiziert, indem wir sie "ausgerechnet" haben. Mit dieser Methode könnten wir nun auch mit Brüchen rechnen, z. B. könnten wir zwei Brüche addieren, indem wir die zugehörigen Kommazahlen addieren und diese in einen Bruch zurückformen.

Das hört sich nicht nur umständlich an, sondern ist es auch!

Wir werden hier kennenlernen, wie wir mit Brüchen direkt rechnen können. Dass die Regeln korrekt sind, kann man mit Hilfe der Rechenregeln für ganze Zahlen begründen.

4.1 Multiplizieren und Dividieren

> **Multiplizieren von Brüchen**
>
> Zwei Brüche werden miteinander multipliziert, indem man jeweils die beiden Zähler und die beiden Nenner miteinander multipliziert. Das gibt dann Zähler und Nenner des Ergebnisses. Z. B.
>
> $$\frac{12}{39} \cdot \frac{7}{2} = \frac{12 \cdot 7}{39 \cdot 2} = \frac{84}{78}$$

Bemerkung 10. Multiplizieren wir eine ganze Zahl mit einem Bruch, so muss man nur den Zähler mit der ganzen Zahl multiplizieren. Das sieht man am besten, wenn man die ganze Zahl zu einem Bruch macht, z. B.

$$\boxed{12 \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{1} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12 \cdot 3}{1 \cdot 8} = \frac{12 \cdot 3}{8}}$$

Beispiel 11.

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{23}{100} = \frac{2 \cdot 23}{5 \cdot 100} = \frac{\cancel{46}^{23}}{\cancel{500}_{250}} = \frac{23}{250}$$

$$4 \cdot \frac{3}{8} = \frac{4 \cdot 3}{8} = \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{8}_{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{7}{52}\cdot 8=\frac{7\cdot 8}{52}=\frac{\cancel{56}^{14}}{\cancel{52}_{13}}=\frac{14}{13}$$

$$\frac{8}{3}\cdot 92=\frac{8\cdot 9}{3\cdot 2}=\frac{\cancel{72}^{12}}{\cancel{6}_{1}}=\frac{12}{1}=12$$

Dividieren von Brüchen

Zwei Brüche werden miteinander dividiert, indem man den hinteren der beiden Brüche umdreht und die beiden Brüche danach multipliziert. Z. B.

$$\frac{11}{3}:\frac{5}{2}=\frac{11}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{11\cdot 2}{3\cdot 5}=\frac{22}{10}$$

Beispiel 12.

$$\frac{4}{15}:\frac{16}{105}=\frac{4\cdot 105}{15\cdot 16}=\frac{\cancel{420}^{7}}{\cancel{240}_{4}}=\frac{7}{4}$$

$$4:\frac{3}{2}=\frac{4}{1}:\frac{3}{2}=\frac{4\cdot 2}{1\cdot 3}=\frac{8}{3}$$

$$\frac{15}{7}:5=\frac{15}{7}:\frac{5}{1}=\frac{15\cdot 1}{7\cdot 5}=\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{35}_{7}}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{115}{32}:\frac{50}{8}=\frac{115\cdot 8}{32\cdot 50}=\frac{\cancel{920}^{23}}{\cancel{1600}_{40}}=\frac{23}{40}$$

Bemerkung 13. Oft bietet es sich an, nicht sofort Nenner und Zähler auszurechnen, sondern man kann **überkreuz kürzen**, z. B.

$$\frac{115}{32}:\frac{50}{8}=\frac{115\cdot \cancel{8}^{1}}{\cancel{32}_{4}\cdot 50}=\frac{\cancel{115}^{23}\cdot 1}{4\cdot \cancel{50}_{10}}=\frac{23}{4\cdot 10}=\frac{23}{40}$$

! **Achtung:** Das Überkreuz-Kürzen ist nur erlaubt, wenn im Zähler und Nenner nur muliplizier wird. Es darf keine Strichrechnung vorkommen.

Die Begründung für die Multiplikation und Division von Brüchen liegt in den Rechenregeln für ganze Zahlen.

Multiplikation:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=(a:b)\cdot(c:d)=a:b\cdot c:d=a\cdot c:b:d=a\cdot c:(b\cdot d)=(a\cdot c):(b\cdot d)=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

Division:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=(a:b):(c:d)=a:b:c\cdot d=a\cdot d:b:c=a\cdot d:(b\cdot c)=(a\cdot d):(b\cdot c)=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

4.2 Addieren und Subtrahieren

Das Addieren und Subtrahieren von Brüchen klappt ganz einfach, wenn beide den gleichen Nenner haben:

Addieren und Subtrahieren von Brüchen

Brüche mit gleichen Nennern:

Man addiert oder subtrahiert Brüche mit gleichen Nennern, indem man lediglich die Zähler addiert oder subtrahiert, z. B.

$$\frac{8}{13} + \frac{25}{13} = \frac{8+25}{13} = \frac{33}{13}$$
$$\frac{12}{3} - \frac{2}{3} = \frac{12-2}{3} = \frac{10}{3}$$

Brüche mit verschiedenen Nennern:

Haben die beiden beteiligten Brüche unterschiedliche Nenner, dann muss man sie zunächst so weit erweitern oder kürzen, bis sie gleiche Nenner haben. Dann kann man addieren oder subtrahieren, z. B.

$$\frac{8}{100} + \frac{13}{50} = \frac{8:2}{100:2} + \frac{13}{50} = \frac{4}{50} + \frac{13}{50} = \frac{4+13}{50} = \frac{17}{50}$$
$$\frac{3}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3\cdot 2}{4\cdot 2} - \frac{1}{8} = \frac{6}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6-1}{8} = \frac{5}{8}$$

Beispiel 14.

$$\frac{4}{15} + \frac{16}{105} = \frac{4\cdot 7}{15\cdot 7} + \frac{16}{105} = \frac{28}{105} + \frac{16}{105} = \frac{44}{105}$$
$$\frac{3}{6} - \frac{2}{8} = \frac{3\cdot 4}{6\cdot 4} - \frac{2\cdot 3}{8\cdot 3} = \frac{12}{24} - \frac{6}{24} = \frac{12-6}{24} = \frac{\cancel{6}^{\,1}}{\cancel{24}_{\,4}} = \frac{1}{4}$$
$$\frac{15}{7} + 5 = \frac{15}{7} + \frac{5}{1} = \frac{15}{7} + \frac{5\cdot 7}{1\cdot 7} = \frac{15}{7} + \frac{35}{7} = \frac{15+35}{7} = \frac{50}{7}$$
$$\frac{17}{5} - \frac{3}{2} = \frac{17\cdot 2}{5\cdot 2} - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 5} = \frac{34}{10} - \frac{15}{10} = \frac{34-15}{10} = \frac{29}{10}$$

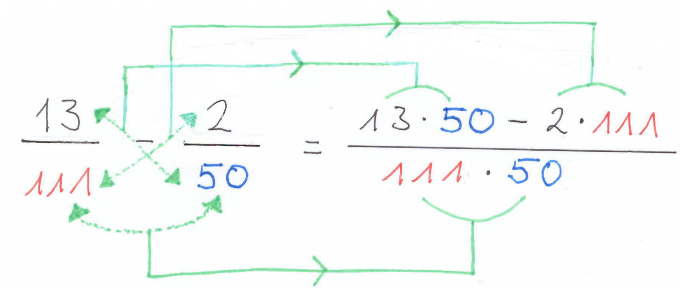
Bemerkung 15. Es scheint nicht so einfach zu sein, den passenden Nenner zu finden. Das ist aber nicht so, denn es ist zunächst mal egal ob man "den besten" Nenner findet oder irgendeinen:

Einen passenden Nenner erhält man immer aus dem Produkt der beiden Nenner der beteiligten Brüche!

Im letzten Beispiel haben wir das bereits gemacht. Wir testen das an einem weiteren Beispiel:

$$\frac{7}{12} + \frac{4}{3} = \frac{7 \cdot 3}{12 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 12}{3 \cdot 12} = \frac{7 \cdot 3 + 4 \cdot 12}{12 \cdot 3}$$

Die folgende Grafik skizziert das Verfahren noch einmal:



Insgesamt gibt das

$$\frac{13}{111} - \frac{2}{50} = \frac{13 \cdot 50 - 2 \cdot 111}{111 \cdot 50} = \frac{\cancel{428}^{\,214}}{\cancel{5550}_{\,2775}} = \frac{412}{2775}\,.$$

> Die Begründung für die Addition und Subtraktion von Brüchen liegt in den Rechenregeln für ganze Zahlen.
>
> Addition und Subtraktion mit gleichen Nennern:
>
> $$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = (a : b) \pm (c : b) = a : b \pm c : b = (a \pm c) : b = \frac{a \pm c}{b}$$
>
> Addition und Subtraktion mit unterschiedlichen Nennern:
>
> $$\begin{aligned} \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} &= (a : b) \pm (c : d) = a \cdot d : b : d \pm c \cdot b : d : b = (a \cdot d) : (b \cdot d) \pm (c \cdot b) : (d \cdot b) \\ &= \big((a \cdot d) \pm (c \cdot b)\big) : (b \cdot d) = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d} \end{aligned}$$

4.3 Vergleichen von Brüchen

Auch zum Vergleichen bzw. Ordnen von Brüchen muss man die zugehörige Kommazahl nicht ausrechnen.

Sehr einfach ist das wieder, wenn die Nenner gleich sind. In diesem Fall erinnern wir uns daran, dass z B.

$$\frac{4}{17} = 4 \cdot \frac{1}{17} \quad \text{und} \quad \frac{6}{17} = 6 \cdot \frac{1}{17}\,.$$

Wenn wir also Brüche mit gleichen Nennern sortieren wollen, brauchen wir uns nur die Zähler anzuschauen:

$$\frac{4}{17} < \frac{6}{17} \quad \text{weil} \quad 4 < 6\,.$$

Sind die Nenner nicht gleich, dann müssen wir die beiden Brüche zuerst auf den gleichen Nenner bringen. Das haben wir bereits bei der Addition und der Subtraktion auf eine Art gemacht, die immer klappt. Wir führen das auch hier an einem Beispiel durch:

$$\frac{4}{5}\ \boxed{?}\ \frac{41}{51} \quad\longleftrightarrow\quad \frac{4\cdot 51}{5\cdot 51}\ \boxed{?}\ \frac{41\cdot 5}{51\cdot 5} \quad\longleftrightarrow\quad \frac{204}{255}\ \boxed{?}\ \frac{205}{255}$$

Damit ist

$$\frac{4}{5} < \frac{41}{51} \quad \text{weil} \quad \frac{204}{255} < \frac{205}{255}$$

Weil wir hierbei die Nenner eigentlich gar nicht benötigen, kann man das Verfahren wie folgt zusammenfassen