Frank Klinker

Übersicht: Die Steigung und die Normalform einer Geraden

1 Von einer speziellen Gleichung zur Geraden

1.1 Eine kleine Erweiterung der linearen Gleichung

Wir haben uns mit linearen Gleichungen beschäftigt: eine lineare Gleichung hat nach einiger Umformung z. B. die Form $2x = -3$.[1] Bringen wir alles auf eine Seite der Gleichung, so erhalten wir $0 = 2x + 3$.

Wir verkomplizieren diese Gleichung etwas, indem wir eine zweite Variable y einführen. Genauer sehen wir uns die Gleichung

$$y = 2x + 3$$

an. Hier kann man jetzt durch Ausprobieren Lösungen finden. Zum Beispiel ist $y = 19$ und $x = 8$ eine Lösung, wie man durch Einsetzen der Werte leicht nachrechnen kann. Aber offensichtlich ist das nicht die einzige Lösung, denn auch $x = -1$ und $y = 1$ ist eine Lösung.

Wie erhalten wir nun alle Lösungen?

> Algorithmus zum finden von Lösungen der obigen Gleichung
>
> ① Wähle für x einen beliebigen Wert
>
> ② Berechne die rechte Seite der Gleichung
>
> ③ Wähle für y das Ergebnis der Rechnung aus ②

Beispiel 1. Wir bleiben bei dem Beispiel $y = 2x + 3$. Wählen wir $x = 8$ und berechnen die rechte Seite so erhalten wir $2 \cdot 8 + 3 = 19$, also $y = 19$. Das ist die Lösung von oben

Wählen wir nun $x = 0$ so erhalten wir $2 \cdot 0 + 3 = 3$, also $y = 0$

Machen wir das nun für mehrere Werte, dann bekommen wir eine Wertetabelle:

x	-10	-7	-5	-4	-3	$-1{,}5$	0	1	2	2,5	3	4	6,5	8	10
y	-17	-11	-7	-5	-3	0	3	5	7	8	9	11	16	19	23

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

[1] Die allgemeine Form einer linearen Gleichung war $Ax = B$, wobei A und B feste Zahlen waren, hier $A = 2, B = 3$.

Bemerkung 2. Wir können die Gleichung $y = 2x + 3$ umformen, so dass nicht y, sondern x allein steht:

$$\begin{aligned} y &= 2x + 3 \quad &&| -3 \\ y - 3 &= 2x &&| :2 \\ \frac{y-3}{2} &= x \end{aligned}$$

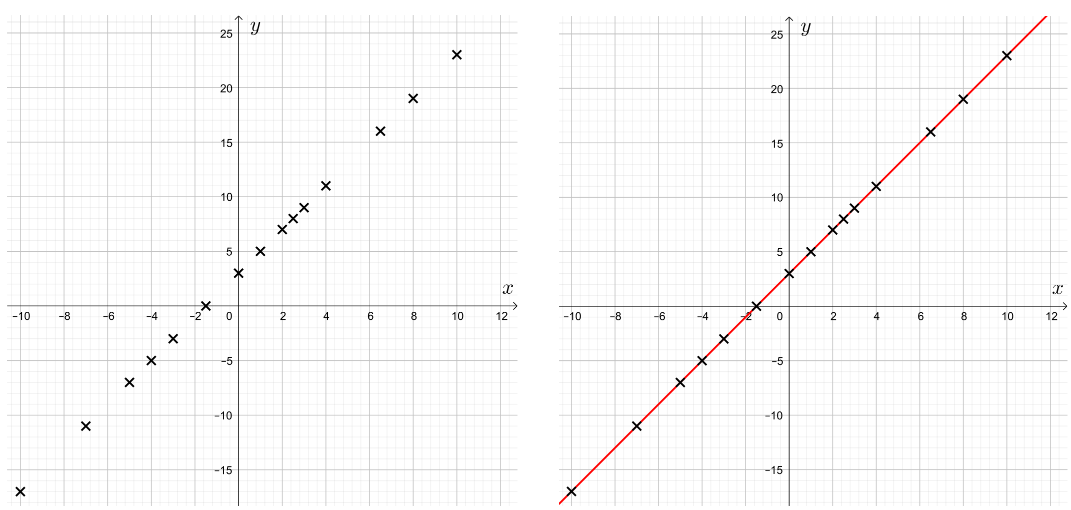
Wir können jetzt in dem Algorithmus ①-③ die Rollen von x und y vertauschen und in ② die umgeformte Gleichung nutzen. Weil aber die Umformungen die Lösung nicht ändern erhalten wir die gleichen Lösungen, wie zuvor. Da bedeutete:

Der Algorithmus ①-③ liefert uns <u>alle</u> Lösungen der Gleichung!

1.2 Die Darstellung der Lösungen im Koordinatensystem

Wir sehen an diesem Beispiel, dass es nicht möglich ist, alle Lösungen in eine Wertetabelle zu schreiben. Die Lösungen der Gleichung bestehen aber immer aus zwei Werten, nämlich einem x- und einem y-Wert. Schreiben wir das in der Form (8/19) für die Lösung $x = 8, y = 19$ dann können wir die Lösung als Punkt in einem Koordinatensystem eintragen. Wenn wir das für alle Lösungen aus der Tabelle machen, dann sieht das in unserem Beispiel aus wie in Abbildung 1 links. Man sieht, dass alle diese Lösungen auf einer Geraden liegen und wir können diese einzeichnen, siehe Abbildung 1 rechts.

Abbildung 1: Die Lösungen der Gleichung $y = 2x + 3$



Wir halten fest:

- Die Lösungen der Gleichung

$$y = m \cdot x + b\,,$$

liegen alle auf einer Geraden (hier sind m und b feste Zahlen).

- Insbesondere ist der Wert b genau die Stelle auf der y-Achse, wo die Gerade die y-Achse schneidet. Wir nennen b deshalb **y-Achsenabschnitt**.

2 Von der Geraden zur Beschreibung durch eine Gleichung

2.1 Die Steigung einer Geraden

Wir haben gesehen und uns darauf geeinigt, dass wir Geraden im Wesentlichen auf zwei verschiedene Arten beschreiben können:

1. Durch die Angabe von **zwei Punkten** ist eine Gerade festgelegt.

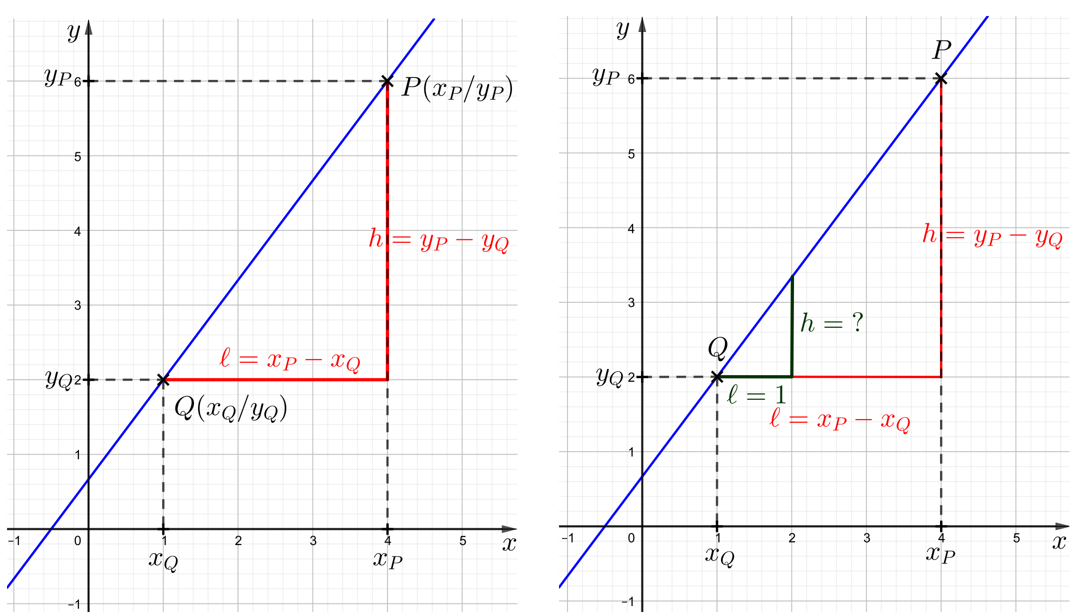
Punkt 1 ist geometrisch schnell klar, denn es wir wissen, dass ein Punkt nicht ausreicht, um eine Gerade zu beschreiben.

Haben wir jedoch nur einen Punkt, dannn bräuchten wir zur Beschreibung einer Geraden noch die Richtung, in die sie verläuft, also:

2. Durch die Angabe **eines Punktes und der Richtung** ist eine Gerade festgelegt.

Um die Richtung besser zu verstehen und zu beschreiben, sehen wir uns linke Grafik in Abb. 2 an.

Abbildung 2: Geraden beschreiben



- Hier sehen wir, dass zur Beschreibung der Geraden – zusätzlich zu einem Punkt – die Angabe eines rechtwinkligen Dreiecks reicht, dessen Grundseite auf der Geraden liegt. Solch ein Dreieck nennen wir ein **Steigungsdreieck**.

- Zur genauen Beschreibung dieses Dreiecks können wir die Länge ℓ und die Höhe h verwenden. In dem linken Beispiel in Abb. 2 ist $P(4/6)$ und $Q(1/3)$ und für die Seitenlängen des Dreiecks lesen wir $\ell = 4 - 1 = 3$ und $h = 6 - 2 = 4$ ab.

- Für die Beschreibung der Geraden benötigen wir aber gar nicht die tatsächliche Größe des Dreiecks, sondern nur seine 'Form': in der rechten Grafik in Abb. 2 ist es egal, ob wir das 'alte' rote Dreieck zur Beschreibung hernehmen oder das 'neue' grüne.

  Wenn wir uns nun generell darauf einigen, dass wir immer ein Dreieck verwenden wollen, dessen Länge genau $\ell = 1$ ist, dann reicht es, dessen entsprechende Höhe anzugeben.

- Die Höhe dieses Steigungsdreiecks der Länge $\ell = 1$ nennen wir **Steigung der Geraden**.

  Weil es in den meisten Büchern so üblich ist, bezeichnen wir die Steigung mit dem Buchstaben m.

- Aus Gründen des Maßstabs kann es schwierig sein, ein Dreieck der Länge $\ell = 1$ zu zeichnen. Wie erhalten wir aber aus einem beliebigen Steigungsdreieck die Steigung m?

  Dazu sehen wir uns in der rechten Grafik in Abb. erfabb:1 die zwei ineinander verschachtelten Dreiecke an. Der Strahlensatz[2] sagt uns nun, dass

$$\frac{h_{\text{grün}}}{\ell_{\text{grün}}} = \frac{h_{\text{rot}}}{\ell_{\text{rot}}}\,.$$

  Setzen wir nun noch $h_{\text{grün}} = m$ und $\ell_{\text{grün}} = 1$ so ist

$$m = \frac{h_{\text{rot}}}{\ell_{\text{rot}}}\,.$$

  In der Situation der rechten Grafik in Abb. 2 ist das rote Dreieck durch zwei Punkte auf der Geraden gegeben und wir können Höhe und Länge ablesen. Das gibt dann für die Steigung m die wichtige Beziehung

$$\boxed{m = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q}} \tag{1}$$

  oder in unserem Beispiel ganz explizit

$$m = \frac{6-2}{4-1} = \frac{4}{3} = 1{,}\overline{3}\,.$$

Bemerkung 3.

- Die Steigung m einer Geraden ist negativ, wenn die Gerade fällt.

- Nutzt man die Formel (1) zur Berechnung der Steigung, so erhält man das Vorzeichen automatisch!

[2] Zum Strahlensatz siehe Wikipedia:Strahlensatz.

2.2 Die Normalform einer Geraden

Wie hilft uns nun die im vorigen Abschnitt berechnete Steigung dabei, die Gleichung zu finden, die die Gerade beschreibt.

In dem Eingangsbeispiel zu $y = 2x + 3$ ist die Gerade etwa durch die Punkte $(-4/-5)$ und $(2{,}5/8)$ festgelegt. Damit ist die Steigung der Geraden

$$m = \frac{8 - (-5)}{2{,}5 - (-4)} = \frac{13}{6{,}5} = 2\,.$$

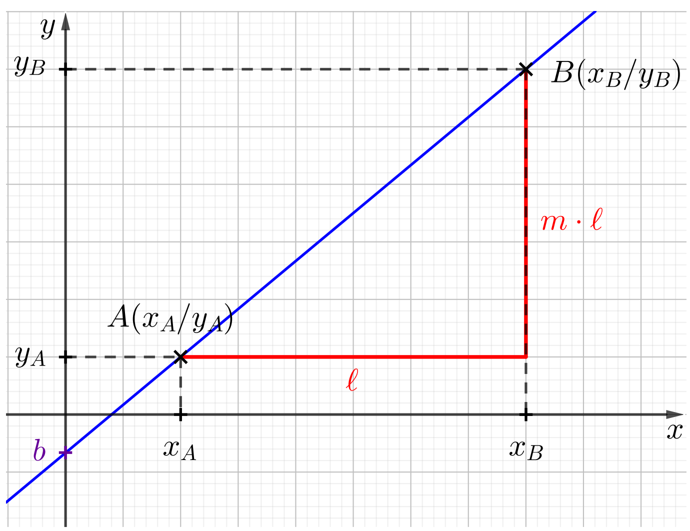
Das stimmt genau mit dem Faktor vor der Variablen x überein.

Wir wollen uns jetzt überlegen, ob das hier ein Zufall ist oder ob das immer so ist.

Wir starten mit der Beschreibung einer Geraden durch die Angabe eines Punktes A und der Steigung m. Dann kann man dadurch alle weiteren Punkte der Gerade erhalten.

- Dazu müssen wir lediglich von A aus nach rechts oder links laufen und dann nach oben oder unten bis wir die Gerade erreichen. Genauer: gehen wir ℓ Schritte in waagerechte Richtung, so müssen wir $m \cdot \ell$ Schritte in senkrechte Richtung laufen.
- Die Anzahl der Schritte in senkrechter Richtung ergeben sich dadurch, dass Quotient aus Höhe und Länge genau m ergeben muss, siehe Abb. 3 Hierbei

Abbildung 3: Punkte auf einer Geraden variieren



gilt:

  - ist ℓ positiv/negativ, so gehe nach rechts/links und
  - ist $m \cdot \ell$ positiv/negativ, so gehe nach oben/unten.

Auf diese Weise erhalten wir durch Änderung von ℓ alle Punkte der Geraden. Die Koordinaten des Punktes, zu dem wir gelangen (in der Grafik ist das der Punkt B) sind dann:

$$x_B = \ell + x_A \quad \text{und} \quad y_B = m \cdot \ell + y_A\,.$$

- Ein spezieller Punkt der Geraden ist derjenige, wo die Gerade die y-Achse schneidet: $(0/b)$.[3]

  Diesen Punkt $A(0/b)$ wählen wir nun als festen Punkt der Geraden, von dem aus wir alle anderen Punkte erreichen wollen. Dann ergibt sich

  $$x_B = \ell \quad \text{und} \; y_B = m \cdot \ell + b\,.$$

  Das heißt: Die 'Laufweite' ℓ ist selbst der x-Wert des neuen Punktes und der y-Wert ergibt sich damit als

  $$y_B = m \cdot x_B + b\,.$$

Die Normalform einer Geraden

Kennt man von einer Geraden die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b, dann hat der Punkt $Q(x/y)$, der auf der Geraden liegt, die y-Koordinate

$$\boxed{y = m \cdot x + b\,.} \tag{2}$$

Diese Gleichung zur Beschreibung der Geraden heißt **Normalform der Geraden**.

3 Wichtige Bemerkungen zur Normalform

3.1 Testen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt

Wenn wir die Normalform einer Geraden haben, dann können wir denkbar einfach überprüfen, ob ein gegebener Punkt auf der Geraden liegt oder nicht.

Dazu müssen wir die x- und y-Komponenten des Punktes lediglich in die Normalform einsetzen und das Ergebnis überprüfen: Ist das Ergebnis wahr, dann liegt der Punkt auf der Geraden, und ist das Ergebnis falsch, dann nicht.

Als Beispiel fragen wir, ob die Punkte $A(2/18)$ und $B(-1/5)$ auf der Geraden $y = 4x + 10$ liegen:

- Wir setzen die Komponenten von A in die Normalform der Geraden ein:

  $$18 = 4 \cdot 2 + 10\,.$$

  Da das wahr ist, liegt A auf der Geraden.

- Wir setzen die Komponenten von B in die Normalform der Geraden ein:

  $$5 = 4 \cdot (-1) + 10\,.$$

  Da das falsch ist, liegt B nicht auf der Geraden.

[3] Den Wert b haben wir **y-Achsenabschnitt** genannt.

3.2 Bestimmung der Normalform aus der Steigung und einem Punkt

Normalerweise ist bei einer Geraden der Schnittpunkt mit der y-Achse nicht gegeben oder wir können ihn aus einer gegebenen Skizze der Geraden nicht ablesen. Statt dessen können wir aber zwei beliebige Punkt ablesen.

Mit diesen können wir dann zwar die Steigung m berechnen, aber wie erhalten wir den y-Achsenabschnitt b?

Statt hier allgemeine Formeln anzugeben, sehen wir uns das Problem an einem Beispiel an. Dieses lässt sich dann sehr einfach auf andere Beispiele übertragen:

Eine Gerade ist durch den Punkt $A(2/-4)$ und die Steigung $m = 3$ gegeben. Ihre Normalform $y = mx + b$ erhalten wir auf folgendem Weg:

- Die Steigung m haben wir, daher wissen wir bereits $y = 3x + b$. D. h. wir brauchen nur noch b zu finden.
- Wir wissen, dass der Punkt $A(2/-4)$ auf der Geraden liegen soll. Wenn wir die Komponenten von A also in die Normalform der Geraden einsetzen, dann muss das Ergebnis wahr sein. Wir erhalten

  $$-4 = 3 \cdot 2 + b$$

  und lösen diese Gleichung nach b auf:

  $$\begin{aligned} -4 &= 3 \cdot 2 + b && |\text{vereinfachen} \\ -4 &= 6 + b && | -6 \\ -10 &= b \end{aligned}$$

Damit ist die Normalform der gesuchten Geraden

$$y = 3x - 10\,.$$

3.3 Parallele Geraden

Zwei Geraden heißen *parallel*, wenn sie sich nie schneiden.

Wenn zwei Geraden parallel sind, dann haben ihre Steigungsdreiecke immer die gleiche Form. Mit anderen Worten, die Geraden haben die gleiche Steigung m.

Wenn umgekehrt zwei Geraden die gleiche Steigung haben, so können sie parallel sein oder es handelt sich sogar um die selben Geraden, d. h. sie sind identisch.

Parallele und identische Geraden

Zur Unterscheidung, ob zwei Geraden mit gleicher Steigung identisch oder parallel sind, untersucht man sie auf gemeinsame Punkte. Dabei reicht es, folgendes zu überprüfen:

a) Wenn zwei Geraden die gleiche Steigung haben und es einen Punkt gibt, der auf der einen Geraden liegt aber nicht auf der anderen, dann sind die Geraden parallel.

b) Wenn zwei Geraden die gleiche Steigung haben und nur einen gemeinsamen Punkt, dann haben sie sofort alle Punkte gemeinsam und sind damit gleich!

Sehr einfach sieht man das, wenn die Geraden durch ihre Normalformen gegeben sind:

a) Die Geraden sind parallel, wenn die Steigungen gleich und die y-Achsenabschnitte unterschiedlich sind

b) Die Geraden sind identisch, wenn die Steigungen und auch die y-Achsenabschnitte gleich sind (dann sind ja sogar die Normalformen insgesamt gleich!).

Beispiel 4. Die Gerade $\mathfrak{g}_1$ ist durch die Punkte $A(-1/3)$ und $B(1/7)$, die Gerade $\mathfrak{g}_2$ durch ihre Normalform $y = 2x + 4$ und $\mathfrak{g}_3$ durch den Punkt $P(-2/0)$ und die Steigung $m = 2$.

- Zunächst sieht man, dass die Gerade $\mathfrak{g}_1$ die Steigung $m = \frac{7-3}{1-(-1)} = \frac{4}{2} = 2$ hat. Somit haben alle drei Geraden die gleiche Steigung.
- Der Punkt $B(-2/0)$ von $\mathfrak{g}_3$ liegt auf $\mathfrak{g}_2$, denn $0 = 2 \cdot (-2) + 4$ ist wahr. Damit sind $\mathfrak{g}_2$ und $\mathfrak{g}_3$ identisch.
- Der Punkt $A(-1/3)$ von $\mathfrak{g}_1$ liegt nicht auf $\mathfrak{g}_2$, denn $4 = 2 \cdot (-1) + 5$ ist falsch. Damit ist $\mathfrak{g}_1$ parallel zu $\mathfrak{g}_2$ (und natürlich auch zu $\mathfrak{g}_3$).