Frank Klinker

Zusammenfassung: Senkrechte Geraden

1 Senkrechte Geraden

▷ Zwei Geraden $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ sind senkrecht, wenn sie sich schneiden und im Schnittpunkt ein Winkel von 90° anliegt, siehe Abbildung 1, links.

▷ Wir erhalten die Gerade $\mathfrak{h}$ aus der Geraden $\mathfrak{g}$, wenn wir $\mathfrak{g}$ um den Schnittpunkt um 90° drehen.

▷ Zeichnen wir zu $\mathfrak{g}$ noch ein Steigungsdreieck der Breite 1 ein, so dreht sich dieses mit und liefert ein Steigungsdreieck der Geraden $\mathfrak{h}$, siehe Abbildung 1, rechts.

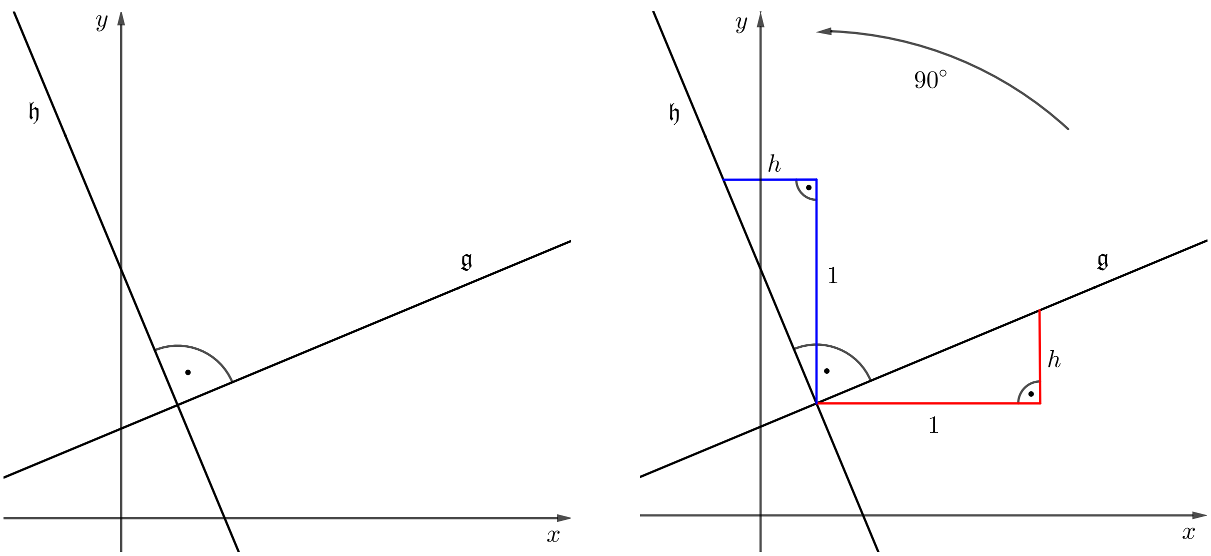

Abbildung 1: Senkrechte Geraden

Bemerkung.

1.
   - Wenn $\mathfrak{g}$ eine positive Steigung hat (d. h. $\mathfrak{g}$ steigt), dann hat die senkrechte Gerade $\mathfrak{h}$ eine negative Steigung (d. h. $\mathfrak{h}$ fällt).
   - Wenn $\mathfrak{g}$ eine negative Steigung hat (d. h. $\mathfrak{g}$ fällt), dann hat die senkrechte Gerade $\mathfrak{h}$ eine positive Steigung (d. h. $\mathfrak{h}$ steigt).

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2. Die Steigungsdreiecke von $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ sind kongruente Dreiecke. Daher hat das Steigungsdreieck von $\mathfrak{h}$ in Abbildung 1 die Breite h und die Höhe 1.

   Bis auf das Vorzeichen ist die Steigung von $\mathfrak{h}$ deshalb durch $\frac{1}{h}$ gegeben:

   - Ist $m_{\mathfrak{g}} = h > 0$ so ist $m_{\mathfrak{h}} = -\frac{1}{h} < 0$
   - Ist $m_{\mathfrak{g}} = -h < 0$ so ist $m_{\mathfrak{h}} = \frac{1}{h} > 0$

Zusammenfassung.

Die letzte Bemerkung lässt sich in den beiden folgenden gleichwertigen Aussagen zusammenfassen:

- Hat eine Gerade die Steigung m und ist eine zweite Gerade senkrecht zu der ersten, so besitzt die zweite die Steigung $-\frac{1}{m}$.
- Sind zwei Geraden senkrecht, so ist das Produkt ihrer Steigungen -1.

Es gilt auch die Umkehrung dieser Aussagen. Diese kann man dann wie folgt formulieren:

- Haben zwei Geraden die Steigungen m und $-\frac{1}{m}$, so sind sie senkrecht zueinander.
- Ist das Produkt der Steigungen zweier Geraden -1, so sind die Geraden senkrecht.

2 Senkrechte Geraden und der Höhensatz

In einem rechtwinkligen Dreieck teilt der Höhenfußpunkt die Hypotenuse in zwei Teilstrecken der Längen p und q.

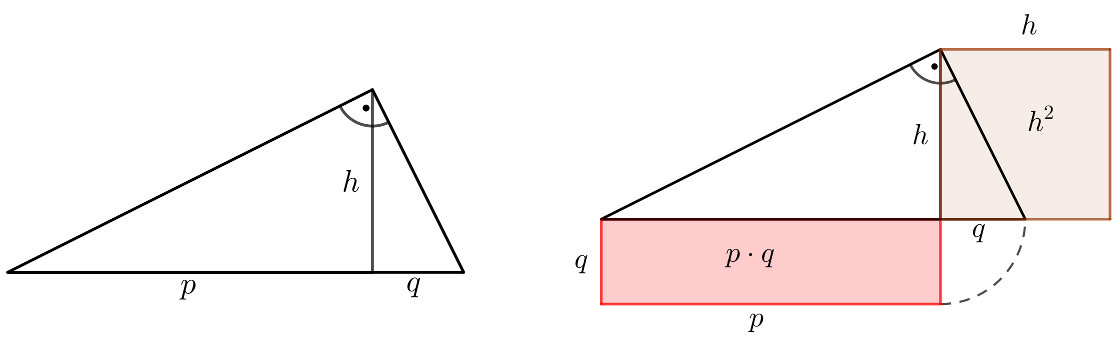

Abbildung 2: Der Höhensatz

Der Höhensatz verbindet nun die Längen p und q der beiden Hypotenusenteilstrecken mit der Höhe h, siehe Abbildung 2. Es gilt

$$\boxed{\text{Höhensatz:} \qquad h^2 = p \cdot q}$$

Mit Hilfe des Höhensatzes sehen wir ebenfalls die Steigungsbeziehung bei senkrechten Geraden. Dazu sehen wir uns die Abbildung 3 an und betrachten dort die zwei eingezeichneten Steigungsdreiecke:

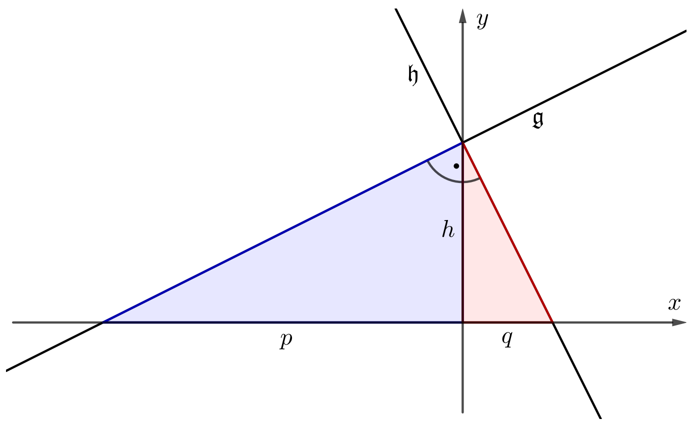

Abbildung 3: Die Steigungsdreiecke und der Höhensatz

- Das Steigungsdreieck zu $\mathfrak{g}$ hat die Breite p und die Höhe h. Da $\mathfrak{g}$ steigt, ist die Steigung
$$m_{\mathfrak{g}} = \frac{h}{p}$$
- Das Steigungsdreieck zu $\mathfrak{h}$ hat die Breite q und ebenfalls die Höhe h. Da $\mathfrak{h}$ fällt, ist die Steigung
$$m_{\mathfrak{h}} = -\frac{h}{q}$$

Bilden wir nun das Produkt aus beiden Steigungen so sehen wir

$$m_{\mathfrak{g}} \cdot m_{\mathfrak{h}} = \frac{h}{p} \cdot \left(-\frac{h}{q}\right) = -\frac{h^2}{pq} \overset{\text{Höhensatz}}{=} -1\,.$$

Das ist wieder die Aussage des ersten Teils der obigen Zusammenfassung.[1]

[1] Die Gültigkeit des zweiten Teils der Zusammenfassung folgt aus der Tatsache, dass der Höhensatz nur gilt, wenn das Dreieck rechtwinklig ist.