Frank Klinker

Integralrechnung

Teil 1: Die Stammfunktion als "Gegenrechnung" zur Ableitung

1 Die Stammfunktion

1.1 Einführung

Beim Rechnen mit Zahlen haben wir gesehen, dass es zu einer Rechnung oft eine Gegenrechnung gibt, welche die erste wieder aufhebt (und umgekehrt).

Das haben wir verwendet, als wir Gleichungen aufgelöst haben:

- Die Gegenrechnung zu $+$ ist $-$ und die Gegenrechnung zu $-$ ist $+$:
$$(x+a)-a=x \quad \text{und} \quad (x-a)+a=x\,.$$
- Die Gegenrechnung zu $\cdot$ ist $:$ und die Gegenrechnung zu $:$ ist $\cdot$:
$$(x\cdot a):a=x \quad \text{und} \quad (x:a)\cdot a=x\,.$$
- Die Gegenrechnung zum Potenzieren ist das Wurzelziehen:
$$\sqrt[n]{x^n}=x \quad \text{und} \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n=x\,.$$
- Die Gegenrechnung zum Exponentieren ist das Logarithmieren:
$$\log_a(a^x)=x \quad \text{und} \quad a^{\log_a(x)}=x\,.$$

1.2 Definition der Stammfunktion

Beim Ableiten arbeiten wir nicht mit Zahlen, sondern mit Funktionen. Aber auch hier gibt es so eine "Gegenrechnung":

> **Stammfunktion**
>
> Eine Funktion $F(x)$ heißt **eine Stammfunktion der Funktion** $f(x)$, wenn die Ableitung von $F(x)$ die Funktion $f(x)$ liefert, d. h wenn $F'(x)=f(x)$.
>
> Das Bilden einer Stammfunktion ist deshalb per Definition die Gegenrechnung zur Ableitung:
>
> - Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, so ist $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$
> - Ist $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$, so ist $f(x)$ eine Stammfunktion von $f'(x)$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2 Eigenschaften und Beispiele

Beispiel 1. Mit Hilfe der Definition hat man ein einfaches Werkzeug an der Hand, um zu überprüfen ob eine gegebene Funktion $F(x)$ eine Stammfunktion zu einer anderen gegebenen Funktion $f(x)$ ist: man muss $F(x)$ nur ableiten und testen, ob $f(x)$ herauskommt!

a) $F(x) = 4x$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 4$

b) $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x$

c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

d) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 2$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^2 + 8x$

e) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 215698$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^2 + 8x$

Jetzt kann man sich zurecht fragen, warum man den Begriff "Stammfunktion" einfügt? Etwa nur um die Gegenrechnung zur Ableitung zu bekommen?

Bevor wir uns dieser Frage widmen, wollen wir einige Eigenschaften der Stammfunktion festhalten, die zunächst banal aussehen, aber später noch wichtig sein werden.

Bemerkung 2. 1. An den Beispielen d) und e) sieht man bereits: Zu einer Funktion $f(x)$ gibt es mehrere Stammfunktionen.

Zu jeder Stammfunktion $F(x)$ kann man eine Konstante dazu zählen und die neue Funktion ist ebenfalls eine Stammfunktion.

Das liegt daran, dass die Konstante beim Ableiten wegfällt.

2. Das hat die folgende Konsequenz: Hat man zwei x-Werte gegeben, etwa $x = a$ und $x = b$, und möchte man für eine Funktion $f(x)$ die Differenz

$$F(b) - F(a)$$

für eine Stammfunktion $F(x)$ berechnen, so ist es egal, welche Stammfunktion man wählt: Durch die Differenz fällt die Konstante weg, die zwei verschiedene Stammfunktionen unterscheiden kann, siehe Beispiel 3.

Beispiel 3. Wir sehen uns die Funktion $f(x) = 3x^2$ an und dazu die x-Werte $a = 1$ und $b = 3$. Wir wählen einmal die Stammfunktion $F_1(x) = x^3$ und die weitere Stammfunktion $F_2(x) = x^3 - 1234$. Dann gilt

$$F_1(3) - F_1(1) = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$$

und auch

$$\begin{aligned} F_2(3) - F_2(1) &= (3^3 - 1234) - (1^3 - 1234) \\ &= 27 \cancel{-1234} - 1 \cancel{+1234} = 27 - 1 = 26 \end{aligned}$$

Man sieht also: Die Differenz der Werte einer Stammfunktion an zwei Stellen a und b ist unabhängig von der Wahl der Stammfunktion.

Bemerkung 4. Alle Beispiele a) bis e) von oben ergeben sich aus den folgenden zwei zentralen Tatsachen:

1. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und ist $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$, dann ist $F(x) + G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$.

2. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, dann ist $a \cdot F(x)$ eine Stammfunktion zu $a \cdot f(x)$.

3. $F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$ ist die Stammfunktion von $f(x) = ax^n$.

Mit diesen drei Eigenschaften lassen sich nun Stammfunktionen zu allen ganzrationalen Funktionen finden:

Beispiel 5. Ist $f(x) = 2x^7 - 8x^5 + 5x + 7$, dann ist

$$\begin{aligned}
F(x) &= 2 \cdot \left(\frac{1}{7+1}x^{7+1}\right) - 12 \cdot \left(\frac{1}{5+1}x^{5+1}\right) + 5 \cdot \left(\frac{1}{1+1}x^{1+1}\right) + 7 \cdot \left(\frac{1}{0+1}x^{0+1}\right) \\
&= \frac{1}{4}x^8 - 2x^6 + \frac{5}{2}x^2 + 7x
\end{aligned}$$

eine Stammfunktion zu $f(x)$.