Frank Klinker

Kraft

Teil 2: Kräfteaddition mit rechnerischen Methoden

1 Kräfteaddition mit Hilfe von Kräftezerlegung

Bisher haben wir uns darauf beschränkt, Kräfte zeichnerisch zu addieren. Dass das hinsichtlich der Genauigkeit an Grenzen stößt, haben wir bei unseren Anwendungen recht schnell gemerkt. In diesem Abschnitt wollen wir uns deshalb der rechnerischen Kräfteaddition zuwenden. Dazu werden wir zunächst die Kräfte, die wir addieren wollen, geschickt zerlegen, um anschließend diese Zerlegung zur Addition zu nutzen. Das hört sich zunächst etwas umständlich an. Da wir aber die Zerlegung jedes mal auf die gleiche Art machen, ist der Rechenaufwand nicht zu hoch, und der Genauigkeitsgewinn rechtfertigt diesen kleinen Mehraufwand allemal.

1.1 Die senkrechte Zerlegung einer Kraft

Wir zerlegen unsere Kraft $\vec{F}$ nicht in die Summe zweier beliebiger Kräfte, sondern wir fordern, dass diese Kräfte senkrecht aufeinander stehen:

- Zunächst zeichnen wir die Kraft $\vec{F}$ in ein xy-Koordinatensystem ein. Dazu wählen wir das Koordinatensystem beliebig außer, dass der Ursprung des Koordinatensystems mit dem Anfang von $\vec{F}$ übereinstimmt, siehe Abb. 1.
- Die zwei Kräfte, die $\vec{F}$ zerlegen, wählen wir so, dass die eine, $\vec{F}_x$, in Richtung der x-Achse zeigt und die zweite, $\vec{F}_y$, in Richtung der y-Achse zeigt, siehe Abb. 1. Man spricht hier auch von einer **orthogonalen Kraftzerlegung**.

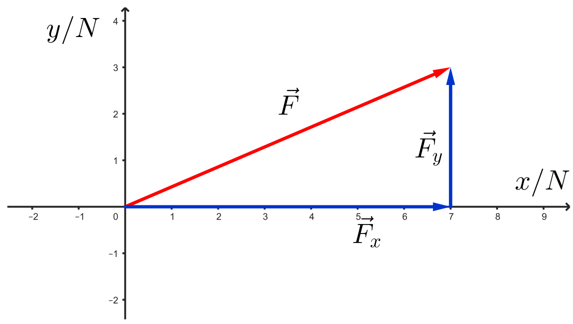


Abbildung 1: Die orthogonale Kraftzerlegung im xy-Koordinatensystem

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 17. Dezember 2023

Bezeichung 1. Da bei dieser Zerlegung die Richtung der Kräfte $\vec{F}_x$ und $\vec{F}_y$ durch die Achsen des Koordinatensystems gegeben ist, werden wir in der Regel lediglich die Beträge F_x, F_y angeben. Diese werden mit einem Vorzeichen versehen: "$+$", wenn die Kraft in positive Achsenrichtung zeigt, und "$-$" wenn sie in negative Achsenrichtung zeigt, siehe auch die Beispiele in Abb. 2. F_x und F_y heißen dann die x-**Komponente** und die y-**Komponente** von $\vec{F}$.

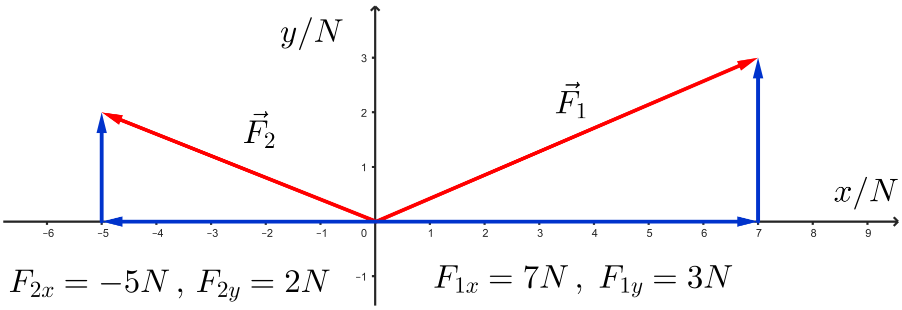


Abbildung 2: Beispiele zur orthogonalen Kraftzerlegung

Bemerkung 2. 1. Die x- und y-Komponenten einer Kraft $\vec{F}$ hängt von der Wahl des Koordinatensystems ab!

2. Wenn man die Komponenten F_x und F_y einer Kraft $\vec{F}$ kennt, dann lässt sich $\vec{F}$ sehr einfach in das gewählte Koordinatensystem einzeichnen. Wie das klappt, kann man in Abb. 2 sehr gut erkennen.

   Ebenso erhält man den Betrag von $\vec{F}$ mit Hilfe der Komponenten: Der Satz von Pythagoras liefert direkt
   $$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}\,.$$

1.2 Berechnung der Komponenten

Bisher haben wir die beiden Komponenten aus dem Koordinatensystem "herausgelesen". Wir werden jetzt ein Verfahren kennenlernen, wie wir mit Hilfe der Kenntnis von Winkeln die Komponenten tatsächlich berechnen.

Das ist sinnvoll, denn in den meisten Anwendungen sind die verschiedenen angreifenden Kräfte durch ihren Betrag und ihre relative Lage gegeben, wobei die Lage durch Winkel beschrieben wird.

Dazu sehen wir uns zunächst wieder eine Kraft $\vec{F}$ im Koordinatensystem an. Wir wählen einen speziellen Winkel der die Richtung der Kraft beschreibt: Der Winkel von der positiven x-Achse zu $\vec{F}$ gemessen gegen den Uhrzeigersinn, siehe Abb. 3.

Durch diesen Winkel und den Betrag ist die Kraft $\vec{F}$ eindeutig in dem gewählten Koordinatensystem beschrieben!

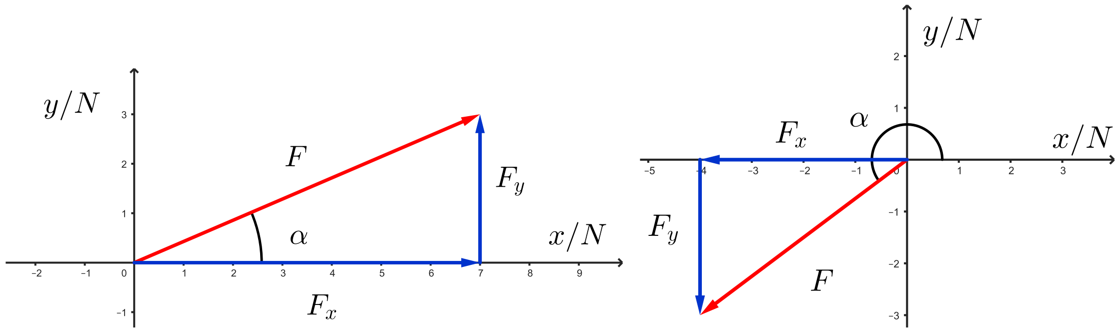


Abbildung 3: Der Winkel zur positiven x-Achse beschreibt die Lage der Kraft

Wir verwenden die trigonometrischen Ausdrücke Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck, um Betrag und Winkel mit den Komponenten einer Kraft zu verbinden:

- Mit Hilfe von Betrag F und Winkel α von $\vec{F}$ lassen sich dessen x- und y-Komponente zu bestimmen:

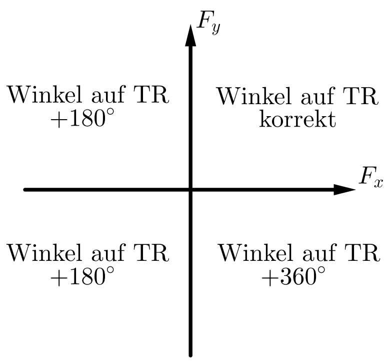
$$F_x = F \cdot \cos(\alpha) \quad \text{und} \quad F_y = F \cdot \sin(\alpha)$$

- Umgekehrt lassen sich der Betrag F und der Winkel α von $\vec{F}$ mit Hilfe der Komponenten F_x, F_y zurückerlangen:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \text{und} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right)$$

Achtung: Berechnet man den Winkel mit Hilfe des Taschenrechners, so erhält man nur den korrekten Winkel, wenn F_x und F_y positiv sind! In den anderen Fällen muss man den auf dem Taschenrechner abgelesenen Winkel korrigieren:

- Ist $F_x > 0$ und $F_y > 0$, dann ist der Winkel den der TR ausgibt, korrekt.
- Ist $F_x < 0$, dann muss man zu dem Winkel, den der TR ausgibt, 180° hinzu addieren.
- Ist $F_x > 0$ und $F_y < 0$, dann muss man zu dem Winkel, den der TR ausgibt, 360° hinzu addieren.



1.3 Bestimmung der resultierenden Kraft mit Hilfe der Zerlegung

Wir zerlegen zwei oder mehr Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots$ in einem gemeinsamen Koordinatensystem orthogonal und erhalten die Komponenten $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}, \ldots$.
Dann lassen sich die die x-Komponente und die y-Komponente der resultierenden Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$ berechnen, indem wir die x-Komponenten und die y-Komponenten getrennt addieren:

$$F_{\text{res},x} = F_{1x} + F_{2x} + \ldots \quad \text{und} \quad F_{\text{res},y} = F_{1y} + F_{2y} + \ldots$$

Den Betrag F_{res} und den Winkel α_{res} erhalten wir wie oben zu

$$F_{\text{res}} = \sqrt{F_{\text{res},x}^2 + F_{\text{res},2}^2} \quad \text{und} \quad \alpha_{\text{res}} = \arctan\left(\frac{F_{\text{res},y}}{F_{\text{res},x}}\right)$$

Beispiel 3. Für die beiden Kräfte F_1 und F_2 aus Abb. 2 finden wir in Abb. 4 die Berechnung der Komponenten der resultierenden Kraft $\vec{F}_{\text{res}}$, nämlich $F_{\text{res},x} = 2N, F_{\text{res},y} = 5N$.

Der Betrag der resultierenden Kraft ist damit $F_{\text{res}} = \sqrt{5^2 + 2^2}\,N \approx 5{,}39\,N$. Der Winkel von der positiven x-Achse zu $\vec{F}_{\text{res}}$ ist $\alpha_{\text{res}} = \arctan\left(\frac{5}{2}\right) \approx 68{,}2°$.

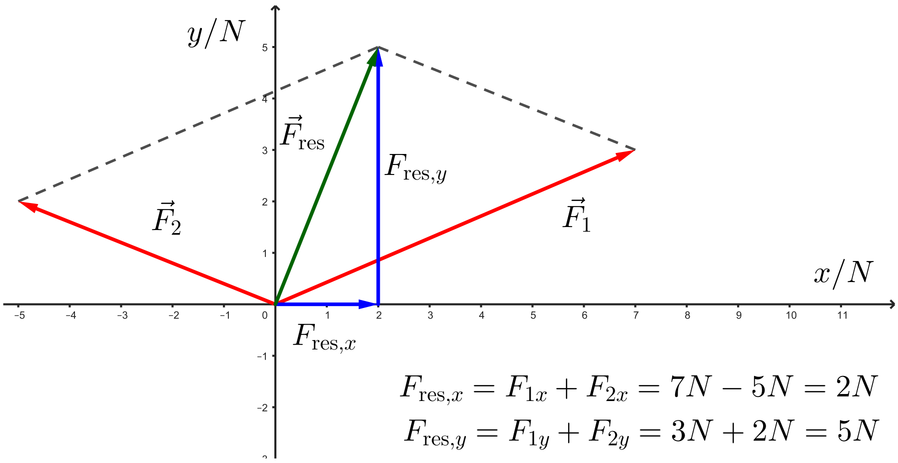
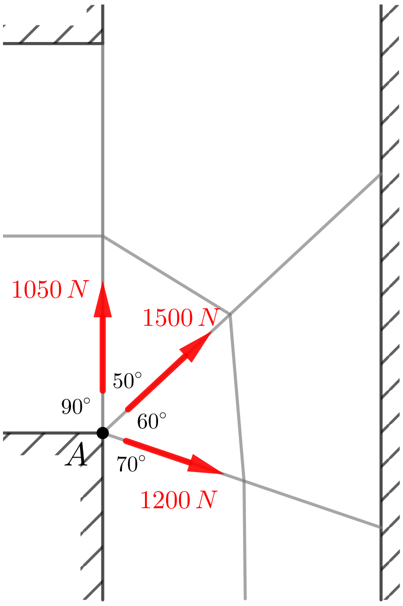


Abbildung 4: Beispiel zur Konstruktion der resultierenden Kraft

2 Anwendungsaufgabe

Aufgabe 4.

In der Kurve einer Straßenbahn sind drei Halteseile an einem Haus im gleichen Punkt A verankert.
Bestimmen Sie Betrag und Richtung der resultierenden Kraft, die in A wirkt.
(Beträge und Richtungen der drei Seilkräfte lassen sich der Skizze entnehmen)



Lösungsvorschlag:

- Wir benennen die Kräfte von unten nach oben: $F_1 = 1200N$, $F_2 = 1500N$ und $F_3 = 1050N$
- Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $\vec{F}_3$ auf der y-Achse liegt.
- Damit ergeben sich folgende Winkel zur positiven x-Achse: $\alpha_1 = 340°$, $\alpha_2 = 40°$, $\alpha_3 = 90°$
- Daraus ergeben sich folgende Komponenten:

$$\begin{aligned}
F_{1x} &= 1200\cos(340°)N \approx 1127{,}63N & F_{1y} &= 1200\sin(340°)N \approx -410{,}42N \\
F_{2x} &= 1500\cos(40°)N \approx 1149{,}07N & F_{2y} &= 1500\sin(40°)N \approx 964{,}18N \\
F_{3x} &= 1050\cos(90°)N = 0N & F_{3y} &= 1050\sin(90°)N = 1050N
\end{aligned}$$

- Die Komponenten der resultierenden Kraft sind:

$$\begin{aligned}
F_{\text{res},x} &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \approx 1127{,}63N + 1149{,}07N + 0N = 2276{,}7N \\
F_{\text{res},y} &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \approx -410{,}42N + 964{,}18N + 1050N = 1603{,}76N
\end{aligned}$$

- Betrag und Winkel der resultierenden Kraft sind F_{res} sind:

$$\begin{aligned}
F_{\text{res}} &= \sqrt{F^2_{\text{res},x} + F^2_{\text{res},y}} \approx \sqrt{2276{,}7^2 + 1603{,}76^2}N \approx 2784{,}85N \\
\alpha_{\text{res}} &= \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \approx \arctan\left(\frac{1603{,}76}{2276{,}7}\right) \approx 35{,}2°
\end{aligned}$$

$\alpha_{\text{res}} = 35{,}2°$ ist der Winkel gegen die Horizontale in der Skizze oben.

Alternativer Lösungsvorschlag:

- Wir benennen die Kräfte wie zuvor: $F_1 = 1200N$, $F_2 = 1500N$ und $F_3 = 1050N$
- Wir wählen das Koordinatensystem so, dass $\vec{F}_1$ auf der x-Achse liegt.
- Damit ergeben sich folgende Winkel zur positiven x-Achse: $\alpha_1 = 0°$, $\alpha_2 = 60°$, $\alpha_3 = 110°$
- Daraus ergeben sich folgende Komponenten:

$$\begin{aligned} F_{1x} &= 1200\cos(0°)N = 1200N & F_{1y} &= 1200\sin(0°)N = 0N \\ F_{2x} &= 1500\cos(60°)N = 750N & F_{2y} &= 1500\sin(60°)N \approx 1299{,}04N \\ F_{3x} &= 1050\cos(110°)N \approx -359{,}12N & F_{3y} &= 1050\sin(110°)N \approx 986{,}68N \end{aligned}$$

- Die Komponenten der resultierenden Kraft sind:

$$\begin{aligned} F_{\text{res},x} &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \approx 1200N + 750N - 359{,}12N = 1590{,}88N \\ F_{\text{res},y} &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \approx 0N + 1299{,}04N + 986{,}68N = 2285{,}72N \end{aligned}$$

- Betrag und Winkel der resultierenden Kraft sind F_{res} sind:

$$\begin{aligned} F_{\text{res}} &= \sqrt{F_{\text{res},x}^2 + F_{\text{res},y}^2} \approx \sqrt{1590{,}88^2 + 2285{,}72^2}N \approx 2784{,}85N \\ \alpha_{\text{res}} &= \arctan\left(\frac{F_y}{F_x}\right) \approx \arctan\left(\frac{1603{,}76}{2276{,}7}\right) \approx 55{,}2° \end{aligned}$$

  $\alpha_{\text{res}} = 55{,}2°$ ist der Winkel gegen F_1 in der Skizze oben.

> Die beiden Lösungsvorschläge zeigen, dass es wichtig ist, die Wahl des Koordinatensystems deutlich hervorzuheben!