Frank Klinker

Grundlagen: Gleichförmige Kreisbewegungen

Teil 1: Grundbegriffe und Zentripetalkraft

1 Kreisbewegungen und ihre Grundgrößen

Neben den bisher behandelten geradlinigen Bewegungen sind die Kreisbewegungen diejenigen, die am einfachsten zu beschreiben sind:

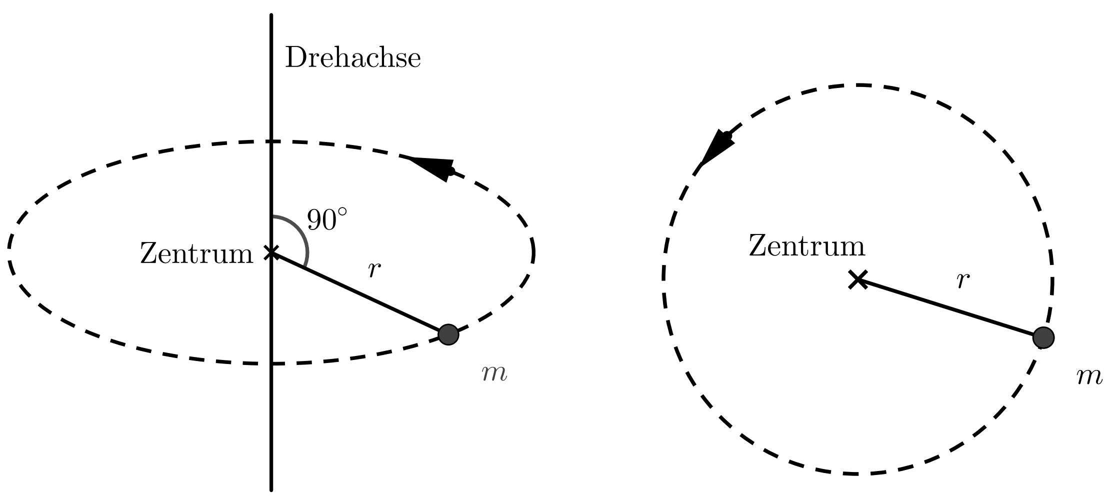
- Unter einer **Kreisbewegung** versteht man die Bewegung eines Körpers, bei der jeder Punkt des Körpers von einer festen Achse einen festen Abstand r hat.

  Diese ausgezeichnete Achse heißt **Drehachse** oder Rotationsachse und der Abstand ist der **Radius** der Kreisbewegung.

- Eine Kreisbewegung heißt **gleichförmige Kreisbewegung**, wenn in gleichen Zeiteinheiten ein gleichgroßer Bogen auf dem Kreis durchlaufen wird.

Fakten 1. Eine Kreisbewegung verläuft immer innerhalb einer Ebene. Eine Normale dieser Ebene ist durch die Richtung der Rotationsachse gegeben, siehe Abb. 1

Abbildung 1: Kreisbewegung



Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

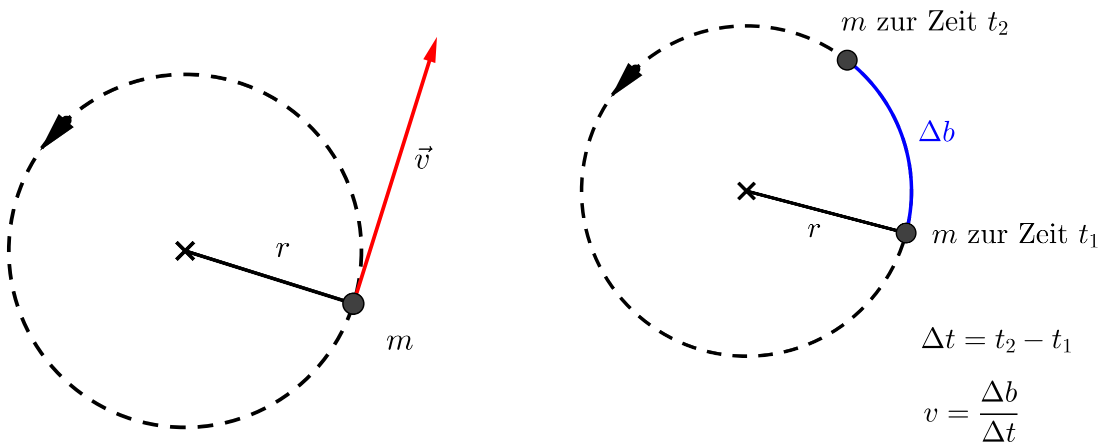
1.1 Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit

Als (durchschnittliche) **Bahngeschwindigkeit** bezeichnet man den Quotienten aus dem zurückgelegten Weg auf dem Kreis bzw. der zurückgelegten Bogenlänge Δb und der dafür benötigten Zeit Δt:

$$v = \frac{\Delta b}{\Delta t}$$

Fakten 2.
- Bei einer gleichförmigen Kreisbewegung ist die durchschnittliche Bahngeschwindigkeit konstant und entspricht der momentanen Bahngeschwindigkeit.
- Die Bahngeschwindigkeit zeigt zu jedem Zeitpunkt in Richtung der Bewegung, das heißt **tangential** an den Kreis, siehe Abb. 2.

Abbildung 2: Kreisbewegung



Da jede Kreisbahn einen festen Radius r hat, genügt zur Beschreibung des zurückgelegten Weges Δb der dabei überstrichene Winkel $\Delta\phi$ gemessen von der Drehachse im Winkelmaß °:

$$\Delta\phi = \frac{360°}{2\pi r} \cdot \Delta b\,.$$

Dann heißt

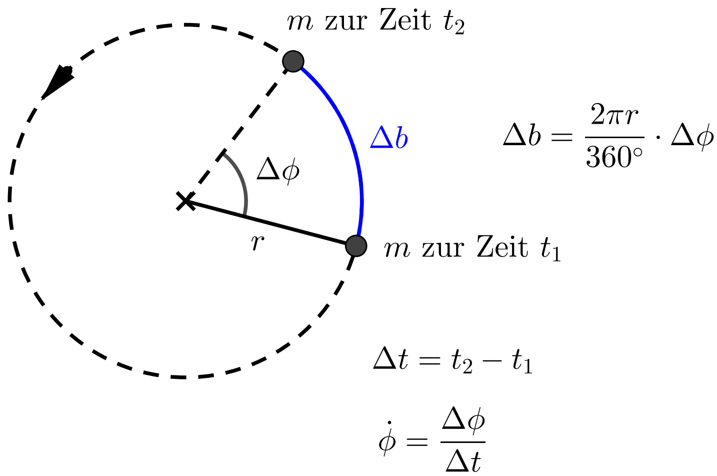
$$\dot{\phi} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

die **Winkelgeschwindigkeit** der Kreisbewegung, siehe Abb.3.

Fakten 3. Zwischen Bahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit besteht die Beziehung

$$360° \cdot v = 2\pi r \cdot \dot{\phi}\,.$$

Abbildung 3: Kreisbewegung



1.2 Frequenz und Kreisfrequenz

Als **Frequenz** der Kreisbewegung oder als **Umlaufzahl** bezeichnet man die Umdrehungen, die der Körper in einer Zeiteinheit um die Drehachse ausführt, also den Quotienten aus Anzahl der Umdrehungen $\#U$ und der dafür benötigten Zeit Δt:

$$f = \frac{\#U}{\Delta t}\,.$$

Die Basiseinheit der Frequenz ist $\frac{1}{s}$ und erhält den eigenen Namen Hz (Hertz[1]), also

$$[f] = \frac{1}{s} = Hz\,.$$

Es gilt

$$\Delta\phi = 360^\circ\,\#U \quad \text{und} \quad \Delta b = 2\pi r\,\#U\,,$$

sodass

$$\dot{\phi} = 360^\circ\,f \quad \text{und } v = 2\pi r f\,.$$

Das Produkt $2\pi f$ ist bei Kreisbewegungen stets präsent, deshalb erhält es einen eigenen Namen, **Kreisfrequenz**, und ein eigenes Symbol[2], ω:

$$\omega = 2\pi f$$

und haben damit

$$v = r\omega \quad \text{und} \quad \dot{\phi} = \frac{360^\circ}{2\pi}\omega$$

[1] Heinrich Hertz (22.02.1857-01.01.1894), siehe http://de.wikipedia.org/wiki/Heinrich_Hertz

[2] Die Kreisfrequenz ist nur sinnvoll bei Kreisbewegungen, wohingegen die Frequenz eine sinnvolle Größe im Zusammenhang mit beliebigen periodischen Prozessen ist (z. B. Schwingungen).

Bemerkung 4. Man kann den Drehwinkel $\Delta\phi$ statt im Winkelmaß $^\circ$ auch im Bogenmaß rad messen[3]. In diesem Fall entfällt der Faktor $\frac{360^\circ}{2\pi}$ in allen Formeln, die den Winkel und damit zusammenhängende Größen enthalten:

- Misst man $\Delta\phi$ im Bogenmaß, dann gilt $\dot{\phi} = \omega$ und $v = r \cdot \dot{\phi}$.
- Somit beschreiben Kreisfrequenz und Winkelgeschwindigkeit die gleiche Größe in verschiedenen Einheiten des Winkels.

2 Zentripetalkraft und Zentripetalbeschleunigung

2.1 Eine gleichförmigen Kreisbewegung ist beschleunigt

Die Beschleunigung haben wir als Quotient aus Änderung der Geschwindigkeit $\Delta\vec{v}$ und Änderung der Zeit Δt kennengelernt:

- Bei der geradlinigen Bewegung spielt der vektorielle Charakter der Geschwindigkeit keine Rolle, da die Bewegung in eine feste Richtung verläuft. Die Änderung der Geschwindigkeit ergibt sich aus Änderung ihres Betrags Δv.[4]
- Bei der gleichförmigen Kreisbewegung verhält es sich genau anders herum: Der Betrag der Bahngeschwindigkeit v ist konstant, aber die Richtung der Geschwindigkeit ändert sich ständig.
- Diese Änderung der Geschwindigkeit bewirkt eine Beschleunigung und damit, wegen Newton II, auch eine Kraft.
- Diese Kraft zwingt unseren Körper auf die Kreisbahn.

Versuch 5. Als Versuch, der diesen Sachverhalt verdeutlicht, dient ein Ball, der an einer Leine befestigt ist und waagerecht über dem Kopf im Kreis bewegt wird:

- Man benötigt Kraft um diese Kreisbahn zu halten.
- Diese Kraft zeigt in Richtung Zentrum der Kreisbewegung.
- Lässt man die Leine los, dann fliegt der Ball tangential davon.

In der Leichtathletik ist dies das Prinzip, dass dem Hammerwerfen zugrunde liegt.

[3] $1\,rad$ entspricht der Länge des Kreisbogens eines Kreises mit Radius $r = 1$ über dem Winkel 1°. Dabei wird der Radius des Kreises als einheitenlos betrachtet, sodass ein Winkel von $2\pi\,rad$ im Bogenmaß einem Winkel von 360° im Winkelmaß entspricht. Üblicherweise verzichtet man in Formeln auf das Einheitensymbol rad.

[4] So einfach war das nicht ganz, denn wir mussten noch ein Vorzeichen beachten, um die Vorwärts- und Rückwärtsbewegung zu unterscheiden.

- Die Kraft die einen Körper bei einer Kreisbewegung auf die Kreisbahn zwingt, heißt **Zentripetalkraft** $\vec{F}_Z$. Sie zeigt immer radial zum Zentrum der Kreisbewegung.

- Die zur Zentripetalkraft gehörige Beschleunigung heißt **Zentripetalbeschleunigung**.

- Man spricht auch von **Radialkraft** und **Radialbeschleunigung**, um die Richtung der Kraft deutlich zu machen, siehe

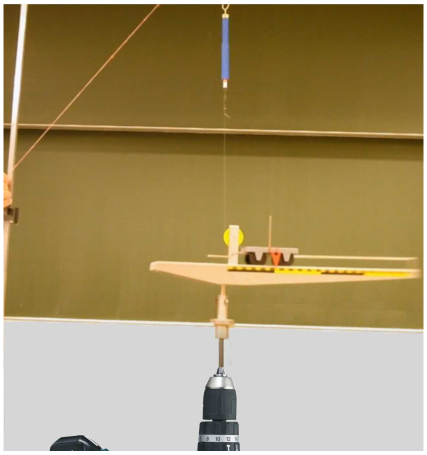
Bemerkung 6. Würde bei einer gleichförmigen Kreisbewegung die Zentripetalkraft plötzlich abgestellt, dann würde sich der Körper mit der momentanen Geschwindigkeit geradlinig weiter bewegen. In unserem Fall bedeutet das, er würde sich in tangentialer Richtung von der Kreisbahn entfernen.

2.2 Ein Versuch zur Ermittlung der Zentripetalkraft

Man kann eine Drehbewegung auch unabhängig von einem Punkt in einer festen Entfernung r vom Drehzentrum betrachten. Dann ist jedoch nicht mehr die spezielle Bahngeschwindigkeit v die Größe, die die "Schnelligkeit" der Bewegung beschreibt, sondern die Kreisfrequenz ω. Wegen $v = \omega r$ lassen sich aber alle mit der "Schnelligkeit" zusammenhängenden Größen leicht von Kreisfrequenz auf Bahngeschwindigkeit umrechnen und umgekehrt.

Versuch 7.

Wie rechts skizziert, wird ein Wagen über eine Ablenkrolle mit einem Kraftmesser verbunden. Der Wagen kann sich auf der drehbaren Bahn bewegen. Die Bahn und mit ihr der Wagen werden in eine gleichförmige Kreisbewegung versetzt. Der Kraftmesser befindet sich dabei auf der Drehachse.
Nun werden nacheinander Masse m des Wagens, Radius r und Kreisfrequenz ω der Kreisbewegung variiert, wobei die verbleibenden zwei Größen konstant gehalten werden. Die Kraft, die benötigt wird um den Wagen auf der Kreisbahn zu halten, wird am Kraftmesser abgelesen.



Als Ergebnis erhalten wir, dass die gemessene Kraft proportional zur Masse, proportional zum Radius und proportional zum Quadrat der Kreisfrequenz ist:

$$F_Z \sim m\,, \quad F_Z \sim r\,, \quad F_Z \sim \omega^2\,.$$

Eine genauere Analyse der Messwerte ergibt, dass der Gesamtproportionalitätsfaktor 1 ist. Wir fassen das zusammen

Die Zentripetalkraft einer Kreisbewegung ist abhängig von der Masse m des bewegten Körpers, seiner Kreisfrequenz ω und von seinem Abstand r zur Drehachse:

$$\boxed{F_Z = m\omega^2 r}$$

Die Zentripetalbeschleunigung ergibt sich damit zu

$$\boxed{a_Z = \omega^2 r}$$

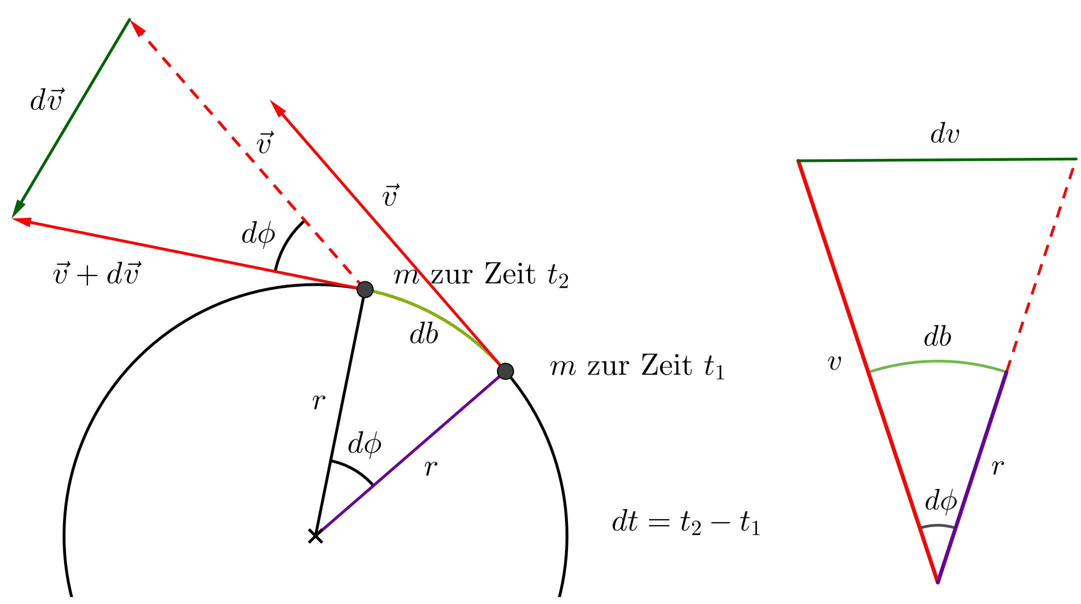
Schreibt man beide Größen in Termen der Bahngeschwindigkeit, so ergibt sich

$$F_Z = \frac{mv^2}{r} \quad \text{und} \quad a_Z = \frac{v^2}{r}$$

2.3 Eine geometrische Herleitung der Zentripetalbeschleunigung

Wir wissen, dass die Beschleunigung die Änderung der Geschwindigkeit beschreibt. Zur Untersuchung der Änderung der Geschwindigkeit sehen wir uns die Drehbewegung eines Punktes zu zwei Zeiten t_1 und $t_2 = t_1 + dt$ an, die sehr dicht zusammenliegen. Damit sind der zurückgelegte Winkel $d\phi$ und der zurückgelegte Bogen db ebenfalls klein, siehe Abb. 4 (links).

Abbildung 4: Kreisbewegung



Zusätzlich haben wir hier die Geschwindigkeiten zu diesen beiden Zeitpunkten in rot eingezeichnet.

Wir verschieben nun die Geschwindigkeit $\vec{v}$ zur Zeit t_1 parallel zum Ort zur Zeit t_2 (gestrichelte Geschwindigkeit). Da der Bogen db sehr klein ist, ist in dem roten Dreieck der eingezeichneten Vektor $d\vec{v}$ mit einer guten Genauigkeit die (vektorielle) Differenz der Geschwindigkeiten zu den Zeiten t_2 und t_1. Damit ist $\vec{v} + d\vec{v}$ die Geschwindigkeit zur Zeit t_2. Für die Länge der Geschwindigkeitspfeile gilt $|\vec{v} + d\vec{v}| = |\vec{v}|$, weil es sich um eine gleichförmige Kreisbewegung handelt.

$\vec{v}$ und $\vec{v} + d\vec{v}$ stehen jeweils senkrecht auf den Radien, sodass der Winkel in dem roten Dreieck der gleiche ist, wie der in der Zeit dt zurückgelegte Winkel $d\phi$.

Wir zeichnen die beteiligten Dreiecke in eine gemeinsame Skizze und dürfen mit einer guten Genauigkeit den Bogen db als parallele Strecke zu dv annehmen, siehe Abb. 4 (rechts). Dann liefert der Strahlensatz

$$\frac{dv}{v} = \frac{db}{r} \quad \text{oder} \quad dv = \frac{v}{r}\, db\,.$$

Wir dividieren beide Seiten durch dt und erhalten

$$\frac{dv}{dt} = \frac{v}{r} \cdot \frac{db}{dt} = \frac{v^2}{r}\,,$$

wobei wir $v = \frac{db}{dt}$ verwendet haben. Beachten wir nun weiter, dass für infinitesimal kleine Zeiten dt der Quotient $\frac{dv}{dt}$ die Beschleunigung gibt, dann haben wir schließlich

$$a_Z = \frac{v^2}{r}\,.$$