

Grundlagen: Gleichförmige Kreisbewegungen

Teil 4: Trägheitsmoment ausgedehnter Körper

7 Rotationsenergie und Trägheitsmoment ausgedehnter Körper

Wir haben in den ersten Beispielen gesehen, dass wir die Rotationsenergie stets in der Form

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J\omega^2$$

schreiben konnten. Dabei war der Trägheitsmoment J abhängig von der Masse und wie diese relativ zur Drehachse "verteilt" ist.

Um die Rotationsenergie zu bestimmen ist es also sinnvoll, den Trägheitsmoment zu verwenden.

Wir wollen uns an drei Beispielen ansehen, wie man die Rotationsenergie und damit den Trägheitsmoment ausgedehnter Körper berechnen kann. Das wird insbesondere auch den Wert J_{hohl} aus dem Versuch bestätigen.

Bemerkung 1. Wenn wir einen rotationssymmetrischen Körper haben, dann können wir ihn die Ebene in unserem Versuch aus Abschnitt 6 herunterrollen lassen. Mit Hilfe des Trägheitsmoments können wir seine Geschwindigkeit am Ende der Rampe vorhersagen. Dazu werten wir die Energiebilanz nochmal aus und nutzen den Rollradius r des Körpers:

$$mgh = \frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \stackrel{\omega=\frac{v}{r}}{=} \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{J}{mr^2} + 1\right) \iff \boxed{v^2 = \frac{2gh}{\frac{J}{mr^2} + 1}}$$

Im Nenner dieses Ausdrucks finden wir auch das α wieder, das wir in der Versuchsauswertung eingeführt haben, nämlich als $\frac{J}{mr^2}$.

7.1 Die Zerlegungsidee

Es war recht einfach die Rotationsenergie für eine Massepunktverteilung zu berechnen. Dazu musste man lediglich die Abstände r_i jedes Massepunktes zum Drehzentrum bestimmen und mit seiner Masse m_i zu $m_i r_i^2$ kombinieren. Das lieferte dann den Beitrag dieses Massepunktes zur Rotationsenergie und zum Trägheitsmoment.

Das nutzen wir nun in folgender Weise, um den Trägheitsmoment eines ausgedehnten Körpers zu bestimmen

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm

E-Mail: mail@frank-klinker.de

- Wir zerlegen den Körper in kleine Teile.
- Diese Zerlegung behandeln wir jetzt als Massepunktverteilung und berechnen dessen Rotationsenergie oder Trägheitsmoment. Das nehmen wir dann als Näherungswerte für unsere gesuchten Größen.
- Danach verfeinern wir die Zerlegung immer weiter. Im besten Fall erhalten wir auf diesem Weg immer bessere Näherungen für den gesuchten Wert.

7.2 Trägheitsmoment eines langen Stabes

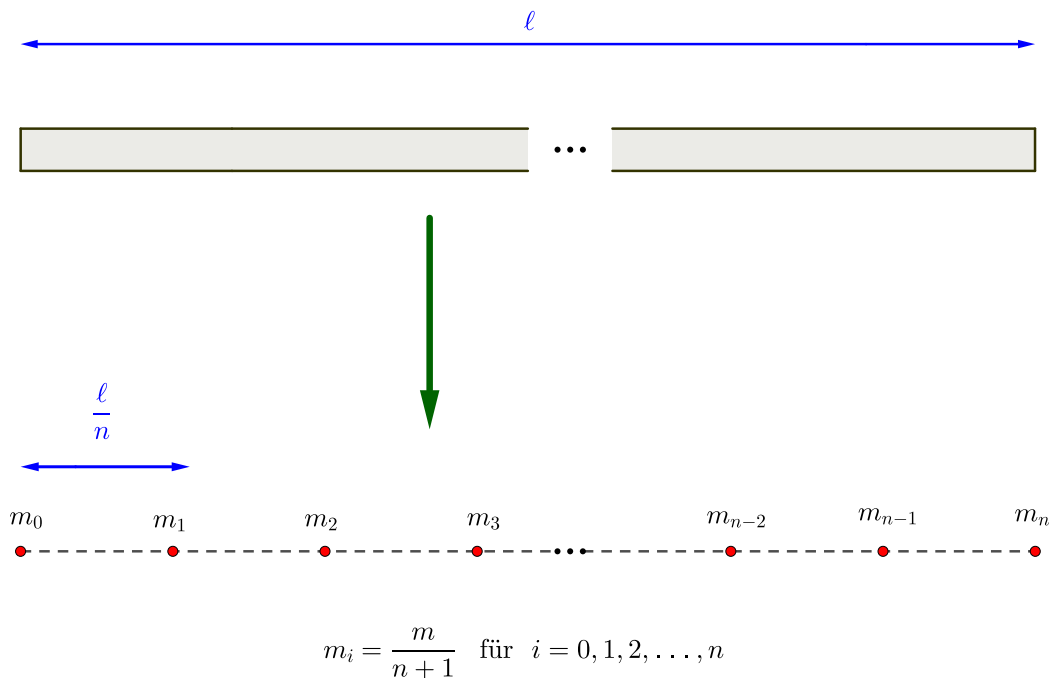
Wir sehen uns für den Stab zwei verschiedenen Rotationsachsen an: zuerst verläuft die Drehachse durch das Ende des Stabes und als zweites verläuft sie durch die Mitte des Stabes. In beiden Fällen ist die Drehachse senkrecht zum Stab.

7.2.1 Rotation um eine Achse durch das Stabende

Wir betrachten einen Stab der Masse m und der Länge ℓ . Sein Durchmesser ist wesentlich kleiner als seine Länge, sodass wir diesen vernachlässigen können.

Wie in Abb. 1 zerlegen wir den Stab in $n + 1$ gleiche Teile und nummerieren diese wie dort angegeben. Die Drehachse verläuft durch das linke Ende des Stabes, also durch den nullten Massepunkt m_0 .

Abbildung 1: Ein dünner Stab rotiert um sein Ende (Zerlegung)



- Der i -te Massepunkt hat die Masse $m_i = \frac{m}{n+1}$.

- Der Abstand r_i des i -ten Massepunktes vom Drehzentrum ist $r_i = i \cdot \frac{\ell}{n}$

Mit diesen Angaben erhalten wir einen Näherungswert für den Trägheitsmoment:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{Stab,ende}} &= m_0 r_0^2 + m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_{n-1} r_{n-1}^2 + m_n r_n^2 \\
 &= \frac{m}{n+1} \cdot \left(0 \cdot \frac{\ell}{n}\right)^2 + \frac{m}{n+1} \cdot \left(1 \cdot \frac{\ell}{n}\right)^2 + \frac{m}{n+1} \cdot \left(2 \cdot \frac{\ell}{n}\right)^2 + \dots \\
 &\quad \dots + \frac{m}{n+1} \cdot \left((n-1) \cdot \frac{\ell}{n}\right)^2 + \frac{m}{n+1} \cdot \left(n \cdot \frac{\ell}{n}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{m}{n^2} \cdot \ell^2 (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) \\
 &= \frac{m}{n+1} \cdot \frac{\ell^2}{n^2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\
 &= m \ell^2 \cdot \frac{1}{6n} (2n+1) \\
 &= \frac{1}{3} m \ell^2 + \frac{1}{6n} m \ell^2
 \end{aligned}$$

Das Ergebnis unserer Rechnungen besteht aus zwei Summanden, wobei der erste gar nicht von der Zerlegung abhängt sondern nur der zweite.

Dieser zweite Summand hat nun die folgende Eigenschaft: Wenn wir die Anzahl der Teilstücke erhöhen, also die Aufteilung des Stabs feiner machen, dann steigt die Anzahl n . Das hat zur Folge, dass der zweite Summand in unserem Ergebnis kleiner wird. Bei sehr großen Zerlegungszahlen n wird dieser Summand vernachlässigbar klein und nur der erste Summand bleibt übrig. Dieser liefert uns deshalb den Trägheitsmoment eines Stabes bei Rotation durch sein Ende:

$$J_{\text{Stab,ende}} = \frac{1}{3} m \ell^2.$$

7.2.2 Rotation um eine Achse durch die Stabmitte

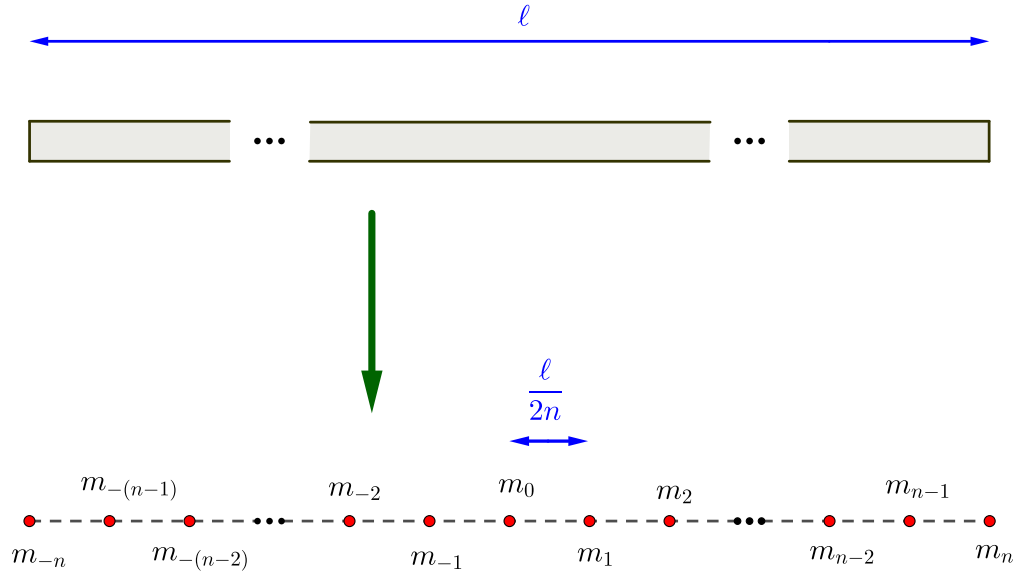
Wir betrachten weiter den Stab der Masse m und der Länge ℓ aus dem vorigen Abschnitt.

Wie in Abb. 2 zerlegen wir den diesmal Stab in $2n+1$ gleiche Teile und nummerieren diese wie dort angegeben. Die Drehachse verläuft durch die Mitte des Stabes, also durch den nullten Massepunkt m_0 .

- Der i -te Massepunkt hat die Masse $m_i = \frac{m}{2n+1}$.
- Der Abstand r_i des i -ten Massepunktes vom Drehzentrum ist $r_i = i \cdot \frac{\ell}{2n}$. Das ist korrekt für beide Vorzeichen von i .

¹Das Tabellenbuch liefert uns die Formel $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ für die Summe der Quadratzahlen.

Abbildung 2: Ein dünner Stab rotiert um seine Mitte (Zerlegung)



$$m_i = \frac{m}{2n+1} \quad \text{für } i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$$

Mit diesen Angaben erhalten wird als Näherungswert für den Trägheitsmoment²

$$\begin{aligned} J_{\text{Stab,mitte}} &= m_0 r_0^2 + 2 \cdot m_1 r_1^2 + 2 \cdot m_2 r_2^2 + \dots + 2 \cdot m_{n-1} r_{n-1}^2 + 2 \cdot m_n r_n^2 \\ &= \frac{m}{2n+1} \cdot \left(0 \cdot \frac{\ell}{2n}\right)^2 + 2 \cdot \frac{m}{2n+1} \cdot \left(1 \cdot \frac{\ell}{2n}\right)^2 + 2 \cdot \frac{m}{2n+1} \cdot \left(2 \cdot \frac{\ell}{2n}\right)^2 + \dots \\ &\quad \dots + 2 \cdot \frac{m}{2n+1} \cdot \left((n-1) \cdot \frac{\ell}{2n}\right)^2 + 2 \cdot \frac{m}{n+1} \cdot \left(n \cdot \frac{\ell}{2n}\right)^2 \\ &= \frac{m}{2n+1} \cdot 2 \cdot \frac{\ell^2}{4n^2} (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2) \\ &= \frac{m}{2n+1} \cdot 2 \cdot \frac{\ell^2}{4n^2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= m\ell^2 \cdot \frac{1}{12n} (n+1) \\ &= \frac{1}{12} m\ell^2 + \frac{1}{12n} m\ell^2 \end{aligned}$$

Auch hier besteht das Ergebnis unserer Rechnungen aus zwei Summanden, wobei wieder nur der zweite Summand von der Zerlegung abhängt. Dieser hat wie zuvor die Eigenschaft, dass er immer kleiner wird, wenn wir die Zerlegung feiner machen. Damit können wir den zweiten Summand auch hier vernachlässigen, wenn wir n sehr groß wählen. Dann bleibt wieder nur der erste Summand übrig, der uns den

²Die Werte für die negativen Massepunkte sind die gleichen wie für die entsprechenden positiven Indizes, deshalb kommen alle doppelt vor (außer der nullte).

Trägheitsmoment eines Stabes bei Rotation durch seine Mitte liefert:

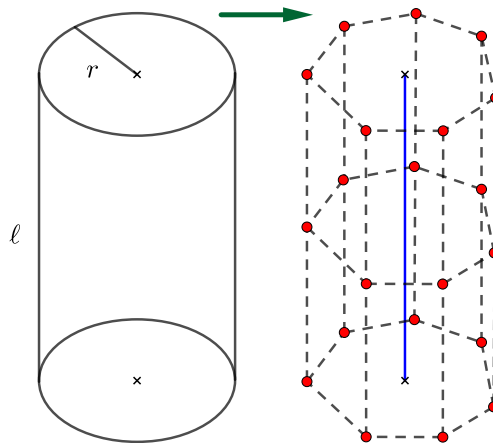
$$J_{\text{Stab,mitte}} = \frac{1}{12}m\ell^2.$$

7.3 Trägheitsmoment eines dünnen Hohlzylinders

Wir betrachten einen Hohlzylinder der Länge ℓ und mit äußerem Radius r . Die Wandstärke sei sehr klein im Vergleich zum Radius, sodass wir diese vernachlässigen können. Wir wollen den Zylinder um seine Symmetrieachse rotieren lassen, so wie wir es im Versuch in Abschnitt 6 gemacht haben.

Die Zerlegung des Hohlzylinders ist etwas komplexer als beim Stab. Wir werden aber sehen, dass die Rechnungen sehr einfach werden. Wir zerlegen den Zylinder in zwei Richtungen: in der Länge zerlegen wir ihn in k Teile. Jede dieser k kleinen Hohlzylinder zerlegen wir dann nochmal in n kleine Teile. Damit erhalten wir $n \cdot k$ Massepunkte, siehe Abb. 3 für $k = 3, n = 7$, also $n \cdot k = 21$.

Abbildung 3: Ein Hohlzylinder rotiert um seine Symmetrieachse (Zerlegung)



- Jeder einzelne Massepunkt hat die Masse $m_i = \frac{m}{n \cdot k}$.
- Der Abstand r_i jedes Massepunktes vom Drehzentrum ist gleich und entspricht dem Zylinderradius $r_i = r$.

Damit ist jeder Summand, der zum Trägheitsmoment beiträgt, gleich, nämlich

$$m_i r_i^2 = \frac{m}{n \cdot k} \cdot r^2.$$

Weil wir aber $n \cdot k$ dieser Summanden haben, ist der Näherungswert für den Trägheitsmoment des Hohlzylinders

$$J_{\text{hohl}} = \sum_{i=1}^{n \cdot k} m_i r_i^2 = (n \cdot k) \cdot m_1 r_1^2 = (n \cdot k) \frac{m}{n \cdot k} \cdot r^2 = m r^2.$$

Dieser hängt aber gar nicht mehr von der Zerlegung, sodass wir direkt den exakten Wert erhalten haben. Dieser stimmt mit dem Wert, den wir in unserem Versuch erhalten haben, überein.

8 Der Satz von Steiner und weitere Beispiele

8.1 Der Satz von Steiner

Typischerweise findet man die Werte für die Trägheitsmomente in Tabellenwerten für Achsen durch den Schwerpunkt.³

Möchte man nun den Trägheitsmoment für eine Rotation um eine Achse berechnen, die nicht durch den Schwerpunkt verlaufen, dann hilft einem der Satz von Steiner:

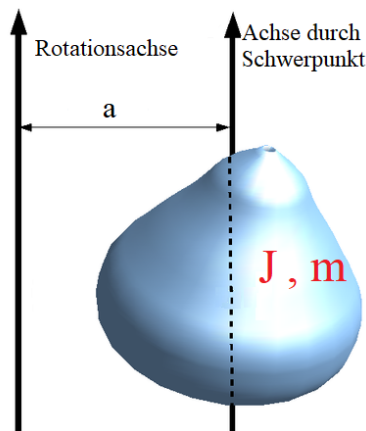
Satz von Steiner

Wir wählen aus dem Tabellenbuch das Trägheitsmoment J bezüglich einer Drehachse durch den Schwerpunkt. Diese muss parallel zu unserer neuen Drehachse sein, siehe Abb. 4.

Haben die Achsen den Abstand a und ist m die Masse des betrachteten Körpers, dann ist der Trägheitsmoment bezüglich der neuen Achse

$$J_{\text{neu}} = J + ma^2.$$

Abbildung 4: Der Satz von Steiner



Beispiel 2. Wir haben in Abschnitt 7.2 zwei Trägheitsmomente für einen dünnen Stab der Länge ℓ berechnet. Zunächst $J_{\text{Stab,ende}} = \frac{1}{3}m\ell^2$ bei Rotation um eine Achse durch das Stabende und $J_{\text{Stab,mitte}} = \frac{1}{12}m\ell^2$ bei Rotation um eine Achse durch die Mitte des Stabes.

Hier ist die Stabmitte auch der Schwerpunkt. Die zwei Drehachsen haben einen Abstand von $a = \frac{\ell}{2}$. Der Satz von Steiner gibt uns für die Rotation um das Stabende

³Der Schwerpunkt ist bei homogenen und symmetrischen Körpern genau der Körpermittelpunkt. Für allgemeinere Körper muss man diesen zunächst bestimmen.

damit

$$J_{\text{Stab,ende}} = J_{\text{Stab,mitte}} + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\ell^2 + \frac{1}{4}m\ell^2 = \frac{1}{3}m\ell^2$$

also das gleiche, wie unsere Rechnung.

8.2 Weitere Beispiele

Bemerkung 3. In den Abschnitt 8.2.2 und Abschnitt 8.2.1 kann man alle weiteren Trägheitsmomente als Spezialfälle der Trägheitsmomente von Hohlzylinder und Hohlkugel bestimmen.

8.2.1 Kugel (Abb. 5)

	Achse (Zentrum)	Achse (Rand)
Vollkugel	$\frac{2}{5}mr^2$	$\frac{7}{5}mr^2$
Hohlkugel	$\frac{2}{5}m \frac{r^5 - r_i^5}{r^3 - r_i^3}$	$\frac{1}{5}m \frac{7r^5 - 5r^2r_i^3 - 2r_i^5}{r^3 - r_i^3}$ (äußerer Rand) $\frac{1}{5}m \frac{2r^5 + 5r^3r_i^2 - 7r_i^5}{r^3 - r_i^3}$ (innerer Rand)
Kugelmantel	$\frac{2}{3}mr^2$	$\frac{5}{3}mr^2$

8.2.2 Zylinder, Stab, Scheibe (Abb. 6)

	Symmetrieachse	Querachse (Mitte)	Querachse (Ende)
Vollzylinder	$\frac{1}{2}mr^2$	$\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$	$\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}m\ell^2$
Hohlzylinder	$\frac{1}{2}m(r^2 + r_i^2)$	$\frac{1}{4}m(r^2 + r_i^2) + \frac{1}{12}m\ell^2$	$\frac{1}{4}m(r^2 + r_i^2) + \frac{1}{3}m\ell^2$
Zylindermantel	mr^2	$\frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}m\ell^2$	$\frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}m\ell^2$
Dünner Stab	—	$\frac{1}{12}m\ell^2$	$\frac{1}{3}m\ell^2$
Dünne Vollscheibe	$\frac{1}{2}mr^2$	$\frac{1}{4}mr^2$	—
Dünne Lochscheibe	$\frac{1}{2}m(r^2 + r_i^2)$	$\frac{1}{4}m(r^2 + r_i^2)$	—
Dünner Ring	mr^2	$\frac{1}{2}mr^2$	—

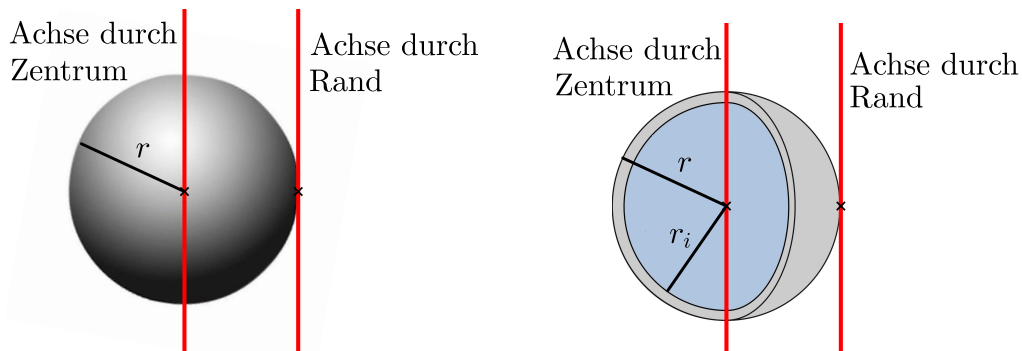
8.2.3 Quader (Abb. 7)

	Achse (Zentrum)	Achse (Rand)
Quader	$\frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ (Seite ab)	$\frac{1}{12}m(a^2 + 4b^2)$ (Seite bc) $\frac{1}{12}m(4a^2 + b^2)$ (Seite ac)

8.2.4 Kegel, Kegelstumpf, Donut (Abb. 8, Abb. 9)

	Längsachse	Querachse
Vollkegelstumpf	$\frac{3}{10}m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$	$\frac{3}{20}m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3} + \frac{3}{80}m \ell^2 \frac{(R+r)^4 + 4R^2r^2}{(R^2 + Rr + r^2)^2}$ (durch Schwerpunkt)
Vollkegel	$\frac{3}{10}mR^2$	$\frac{3}{20}mR^2 + \frac{1}{10}m\ell^2$ (in Bodenmitte) $\frac{3}{20}mR^2 + \frac{3}{80}m\ell^2$ (durch Schwerpunkt)
Volldonut/Volltorus	$\frac{1}{4}m(4R^2 + 3r^3)$	$\frac{1}{8}m(4R^2 + 5r^2)$

Abbildung 5: Kugel



³Der Schwerpunkt des Vollkegelstumpfes liegt auf der Höhe $\frac{1}{4}\ell \cdot \frac{R^2 + 2Rr + 3r^2}{R^2 + Rr + r^2}$ und der des Vollkegels auf der Höhe $\frac{1}{4}\ell$. Sie liegen beide auf den Symmetrieachsen.

Abbildung 6: Zylinder, Stab, Scheibe

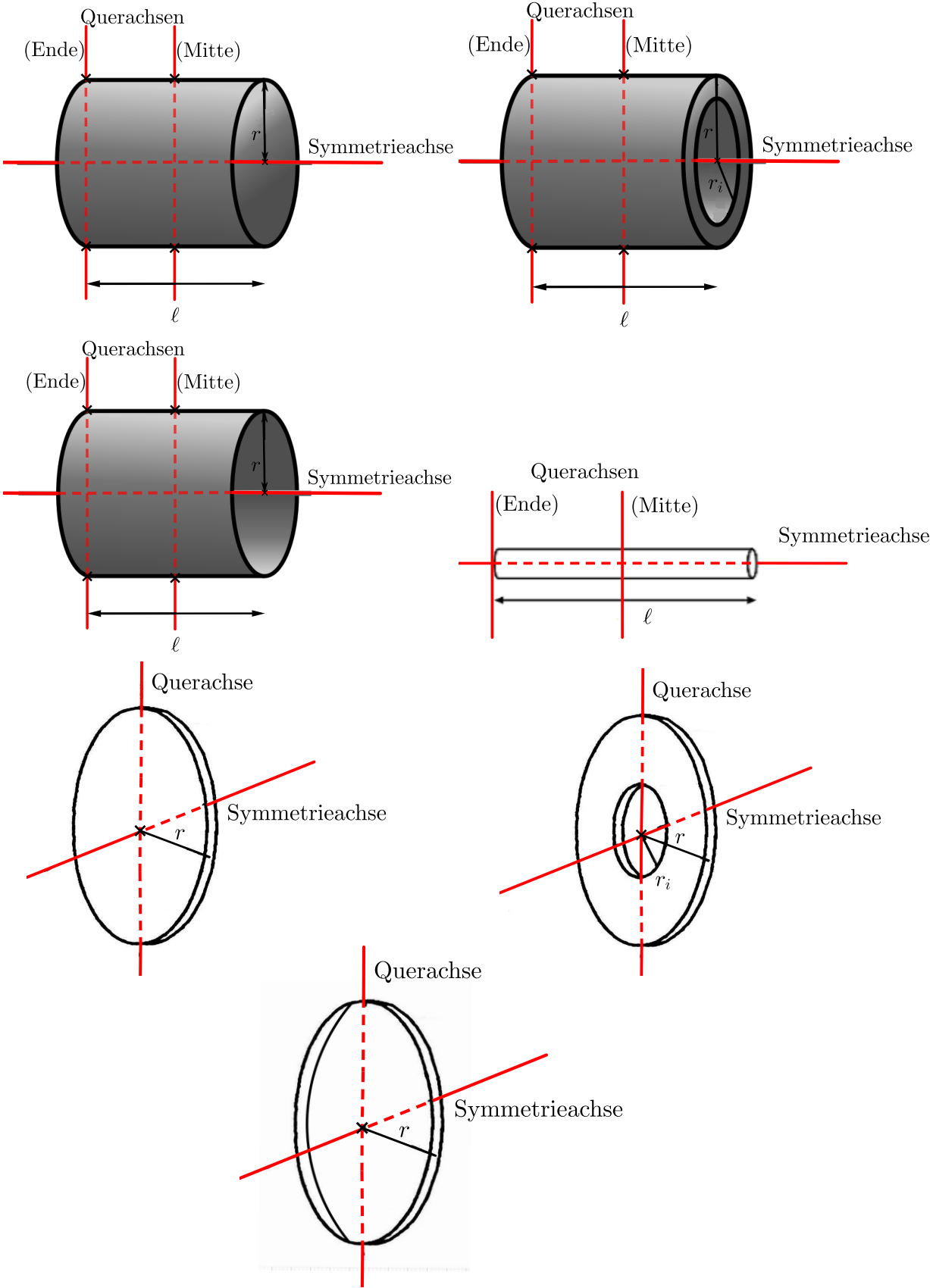


Abbildung 7: Quader

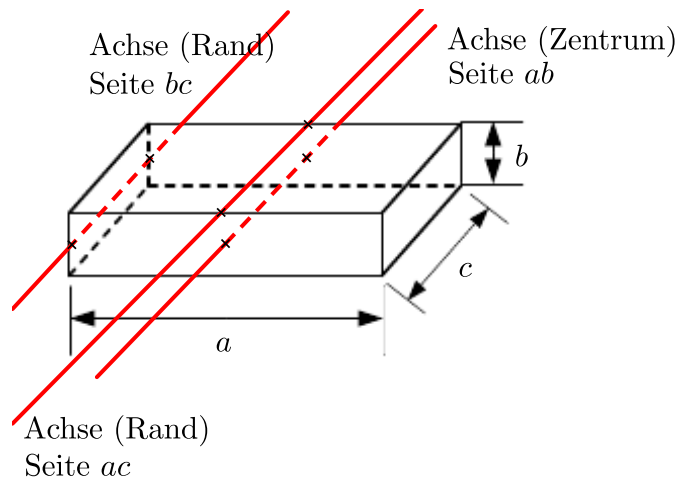


Abbildung 8: Kegel, Kegelstumpf

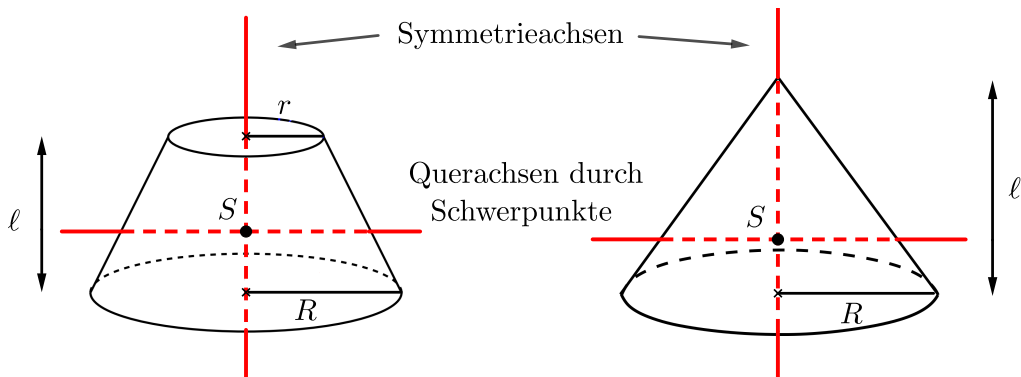


Abbildung 9: Donut/Torus

