Frank Klinker

Grundlagen: Parabeldarstellungen

1 Einführung

1.1 Skizzen spezieller Funktionen, die quadratische Terme besitzen

Wir haben anhand von Beispielen die Gestalt von Graphen spezieller Funktionsvorschrift untersucht. Die Funktionsvorschriften enthalten alle quadratische Terme.

Die Skizzen der Graphen haben wir durch die Auswertung von Wertetabellen erhalten:

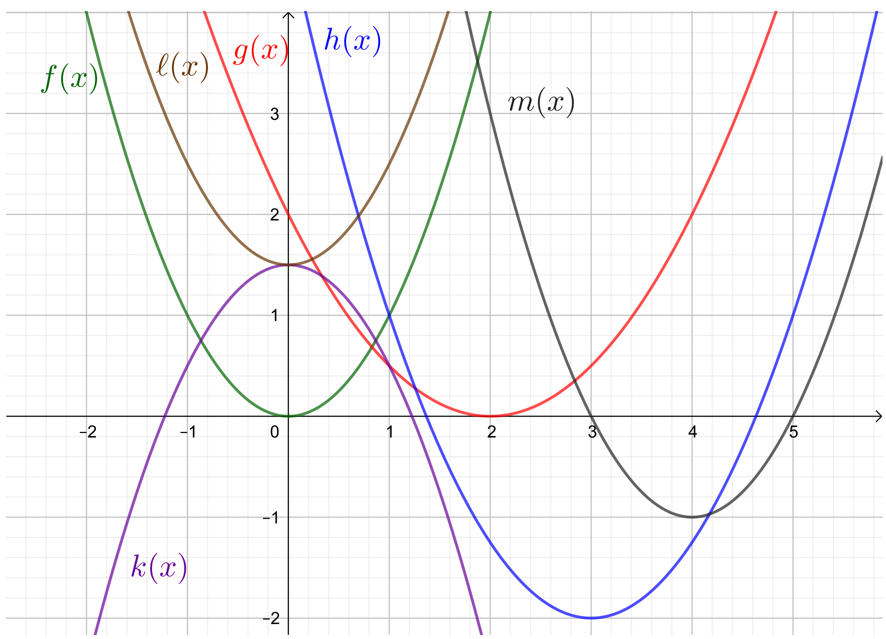


Figure 1: Die Graphen der Funktionen $\begin{cases} f(x) = x^2 \\ g(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 2 \\ h(x) = \frac{3}{4}(x-3)^2 - 2 \\ k(x) = -x^2 + 1{,}5 \\ \ell(x) = x^2 + 1{,}5 \\ m(x) = (x-3)(x-5) \end{cases}$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

Bemerkung 1. Dabei sind uns an den Graphen einige Dinge aufgefallen:

- Sie haben im Wesentlichen die gleiche Gestalt
- Sie sind entweder nach oben oder nach unten geöffnet
- Ihre Öffnnung ist mal weiter und mal enger
- Sie haben einen höchsten oder niedrigsten Punkt, man spricht auch von **Maximum** oder **Minimum**
- Manche haben Schnittpunkte mit der x-Achse, manche nicht. Man spricht auch von **Nullstellen**.

  Es gibt höchstens zwei Schnittpunkte mit der x-Achse und ein oder kein Schnittpunkt kommen auch vor
- Sie sind achsensymmetrisch zu einer senkrechten Achse durch das Maximum oder Minimum
- Links vom Maximum ist der Graph steigend, rechts davon fallend

  Links vom Minimum ist der Graph fallend, rechts davon steigend

Bemerkung 2. Eine weiter Untersuchung der Graphen zeigt, dass man den niedrigsten oder höchsten Punkt in manchen Fällen direkt ablesen kann, nämlich bei $f(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $\ell(x)$:

- Da ein Quadrat stets positiv oder Null ist, ist $f(x) = x^2 \geq 0$ unabhängig davon, welchen Wert man für x einsetzt. Nun ist aber $x = 0$ der einzige Wert für den sich als Wert $f(0) = 0$ ergibt. Damit liegt $(0/0)$ auf dem Graphen von $f(x)$ und ist das Minimum.
- Im Fall von $k(x) = -x^2 + 1{,}5$ zieht man für jeden Wert $x \neq 0$ etwas von 1,5 ab, sodass der Funktionswert immer kleiner ist als 1,5. Außer für $x = 0$, wo man mit $f(0) = 1{,}5$ den größten Wert erhält. Der Punkt $(0/1{,}5)$ ist damit das Maximum des Graphen von $k(x)$.
- Mit einer ähnlichen Argumentation sieht man, dass $(0/1{,}5)$ das Minimum des Graphen von $\ell(x) = x^2 + 1{,}5$ ist.
- Für die Funktion $h(x) = \frac{3}{4}(x-3)^2 - 2$ ist für alle Werte x der Summand $\frac{3}{4}(x-3)^2 \geq 0$, sodass wir immer etwas zu -2 hinzuzählen. Lediglich im Fall $x = 3$ ist der quadratische Term Null und wir haben mit $h(3) = -2$ den niedrigsten Wert der Funktion. Damit ist $(3/-2)$ das Minimum des Graphen von $h(x)$.

Bemerkung 3. Im Fall der Funktionen $f(x)$ und $m(x)$ kann man auch die Schnittpunkte mit der x-Achse direkt ablesen:

- Im Fall von $f(x)$ ist gefragt, für welche Werte x die Funktion $f(x) = 0$ ist, das heißt, wann $x^2 = 0$ ist. Das ist aber nur dann der Fall, wenn $x = 0$ ist, sodass sich als einziger Schnittpunkt mit der x-Achse der Punkt $(0/0)$ ergibt.

- Für die Funktion $m(x)$ sind alle die x gesucht, für die $m(x) = 0$ ist, das heißt $(x-3)(x-5) = 0$. Nun ist ein Produkt von zwei Termen genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist. Damit ist $(x-3)(x-5) = 0$ wenn $x - 3 = 0$ oder $x - 5 = 0$, das heißt wenn $x = 3$ oder $x = 5$. Damit ergeben sich zwei Schnittpunkte mit der x-Achse: (3/0) und (5/0).

Die speziellen Situationen aus den Bemerkungen 2 und 3 werden wir im folgenden Abschnitt genauer untersuchen.

2 Die Darstellungsformen von Parabeln

2.1 Die Normalform einer Parabel, Definition einer Parabel

Bemerkung 4. Wenn wir die Funktionen aus unserem obigen Beispielen etwas umformen, dann sehen wir, dass alle Funktionsvorschriften eine ganz ähnliche Gestalt haben:

$$\begin{array}{rclcrcrcr}
f(x) & = & x^2 & = & 1 \cdot x^2 & + & 0 \cdot x & + & 0 \\
g(x) & = & 0{,}5x^2 - 2x + 2 & = & 0{,}5 \cdot x^2 & + & (-2) \cdot x & + & 2 \\
h(x) & = & \frac{3}{4}(x-3)^2 - 2 & = & \frac{3}{4} \cdot x^2 & + & (-\frac{9}{2}) \cdot x & + & \frac{19}{4} \\
k(x) & = & -x^2 + 1{,}5 & = & (-1) \cdot x^2 & + & 0 \cdot x & + & 1{,}5 \\
\ell(x) & = & x^2 + 1{,}5 & = & 1 \cdot x^2 & + & 0 \cdot x & + & 1{,}5 \\
m(x) & = & (x-3)(x-5) & = & 1 \cdot x^2 & + & (-8) \cdot x & + & 15
\end{array}$$

Da wir bisher noch gar nicht wirklich festgelegt haben, was eine Parabel überhaupt sein soll, nehmen wir diese Gemeinsamkeit dazu her:

> **Definition 5.** Eine **Parabel** ist der Graph einer **quadratischen Funktion** mit der Funktionsvorschrift
> $$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$
> wobei a, b, c beliebige Zahlen sind mit der einzigen Einschränkung $a \neq 0$.
>
> Diese Form der Darstellung der Funktion heißt die **Normalform der Parabel**.
>
> Die einfachtse Variante mit $a = 1$ und $b = c = 0$, also
> $$f(x) = x^2$$
> heißt **Normalparabel**.
>
> *Sprechweise:* Wir werden auch Parabel sagen, wenn wir statt vom Graphen von der Funktionsvorschrift selbst sprechen.

Bemerkung 6. 1. Die Normalform einer Parabel ist sicher die "aufgeräumteste" Art der Darstellung.
Wie wir aber schon an den ersten Beispielen und in den Bemerkungen 2 und 3 gesehen haben, gibt es Darstellungen, die es uns erlauben spezielle Punkte der Parabel direkt abzulesen.

2. Der Faktor a in der Normalform beschreibt die Öffnung der Parabel, vergleiche auch mit Abb. 1:

   - Ist $a > 0$ so ist die Parabel nach oben geöffnet
   - Ist $a < 0$ so ist die Parabel nach unten geöffnet
   - Ist a betragsmäßig groß, so ist die Parabel sehr eng
   - Ist a betragsmäßig klein, so ist die Parabel sehr weit

2.2 Die Scheitelpunktform einer Parabel

Definition 7. Eine mögliche Darstellungsform einer Parabel ist

$$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

wobei a, x_S, y_S beliebige Zahlen sind mit der einzigen Einschränkung $a \neq 0$.

Diese Form der Darstellung der Parabel heißt die **Scheitelpunktform der Parabel**.

Es ist $f(x_S) = y_S$ und der Punkt $S = (x_S/y_S)$ heißt Scheitelpunkt der Parabel.

Bemerkung 8. • Die Parabeln $f(x)$, $h(x)$, $k(x)$ und $\ell(x)$ aus Bemerkung 2 liegen in Scheitelpunktform vor:

$$\begin{array}{ll} f(x) = 1 \cdot (x-0)^2 + 0 & S = (0/0) \\ h(x) = \frac{3}{4} \cdot (x-3)^2 - 2 & S = (3/-2) \\ k(x) = (-1) \cdot (x-0)^2 + 1{,}5 & S = (0/1{,}5) \\ \ell(x) = 1 \cdot (x-0)^2 + 1{,}5 & S = (0/1{,}5) \end{array}$$

- Wieder beschreibt a die Öffnung der Parabel. a entscheidet somit darüber, ob der Scheitelpunkt S ein Maximum oder ein Minimum ist: Die Scheitelpunkte von $f(x)$, $h(x)$ und $\ell(x)$ sind Minima, da $a > 0$ und die Parabeln nach oben geöffnet sind, und der Scheitelpunkt von $k(x)$ ist ein Maximum, da $a < 0$ und die Parabel nach unten geöffnet ist.

2.3 Die Nullstellenform der Parabel

Definition 9. Eine mögliche Darstellungsform einer Parabel ist

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

wobei a, x_1, x_2 beliebige Zahlen sind mit der einzigen Einschränkung $a \neq 0$.

Diese Form der Darstellung der Parabel heißt die **Nullstellenform der Parabel**.

Es ist $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Damit sind $x = x_1$ und $x = x_2$ die Nullstellen der Parabel.

Bemerkung 10.

- Die Parabeln $f(x)$ und $m(x)$ aus Bemerkung 3 liegen in Nullstellenform vor:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \cdot (x - 0) \cdot (x - 0) \qquad && x_1 = 0, x_2 = 0 \\ m(x) &= 1 \cdot (x - 3) \cdot (x - 5) \qquad && x_1 = 3, x_2 = 5 \end{aligned}$$

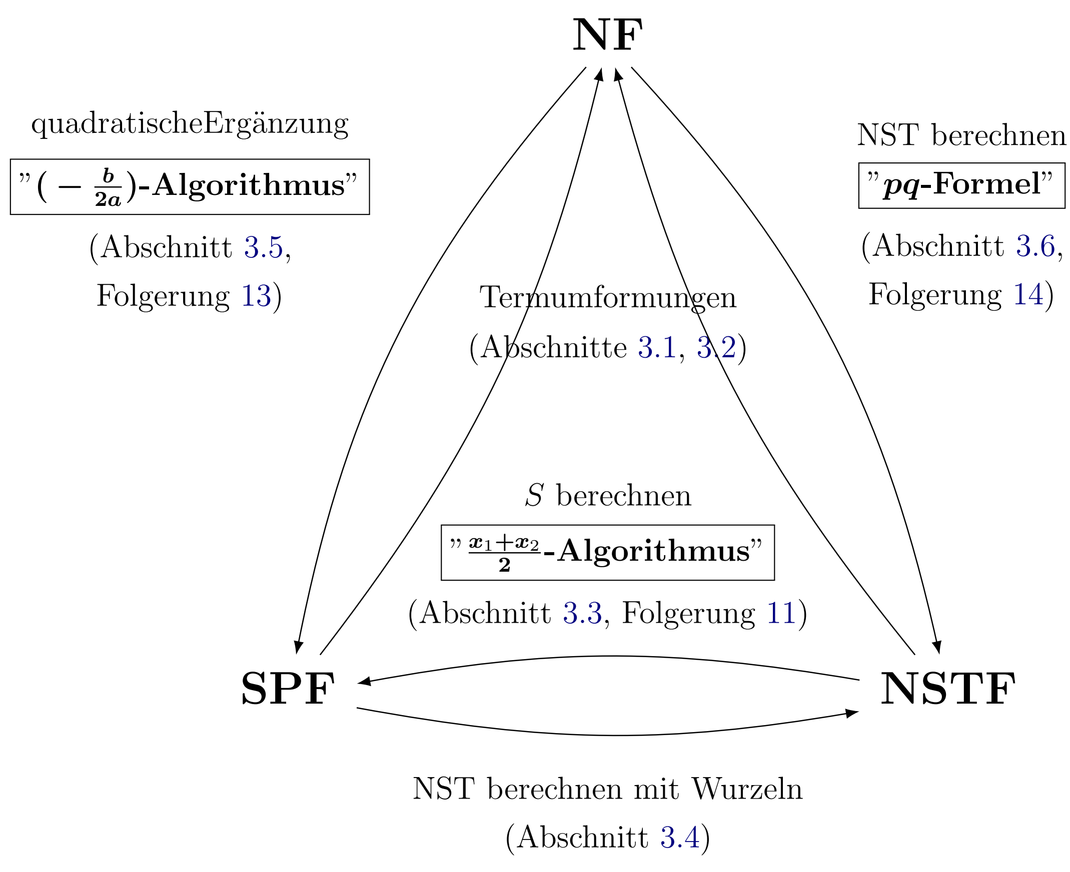
- Wieder beschreibt a die Öffnung der Parabel.

3 Umrechnung in die verschiedenen Formen

Wir werden in diesem Abschnitt beschreiben, wie wir die verschiedenen Darstellungsformen ineinander umrechnen können. Wir verwenden hier die Abkürzungen NF, SPF, NSTF für die drei beschriebenen Formen. Wir werden insbesondere sehen:

- Die NF erhält man leicht aus der NSTF oder der SPF
- Jede Parabel hat eine SPF und damit ein Maximum oder Minimum
- Eine NSTF gibt es nicht immer
- Zur Berechnung der NSTF aus der NF ist es sinnvoll, einen Umweg über die SPF zu machen. Das liefert uns dann eine nützliche Formel für die Bestimmung der Nullstellen

Wir werden wie folgt vorgehen:



3.1 SPF $\longrightarrow$ NF

Dieser Übergang ist recht einfach und wir haben das in Bemerkung 4 bereits gemacht. Dazu benötigen wir lediglich einige einfache Termumformungen:

$$\begin{aligned}
a(x-x_S)^2+y_S &\overset{\substack{\text{binomische}\\ \text{Formel}}}{=} a(x^2-2xx_S+x_S^2)+y_S \\
&\overset{\substack{\text{Klammer}\\ \text{auflösen}}}{=} ax^2-2ax_Sx+ax_S^2+y_S \\
&= \underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\boxed{a}}\cdot x^2+\underset{\substack{\uparrow\\ b}}{\boxed{-2ax_S}}\cdot x+\underset{\substack{\uparrow\\ c}}{\boxed{ax_S^2+y_S}}
\end{aligned}$$

3.2 NSTF $\longrightarrow$ NF

Auch diesen Übergang haben wir in Bemerkung 4 bereits gemacht und wir benötigen ebenfalls nur einige einfache Termumformungen:

$$\begin{aligned}
a(x-x_1)(x-x_2) &\overset{\substack{\text{Klammern}\\ \text{multiplizieren}}}{=} a(x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2) \\
&\overset{\substack{\text{Klammer}\\ \text{auflösen}}}{=} ax^2-ax_1x-ax_2x+ax_1x_2 \\
&\overset{\substack{x\text{ aus-}\\ \text{klammern}}}{=} ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2 \\
&= \underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\boxed{a}}\cdot x^2+\underset{\substack{\uparrow\\ b}}{\boxed{-a(x_1+x_2)}}\cdot x+\underset{\substack{\uparrow\\ c}}{\boxed{ax_1x_2}}
\end{aligned}$$

3.3 NSTF $\longrightarrow$ SPF

Wir starten mit der NSTF einer Parabel, das heißt

$$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\,.$$

Wir haben bereits bemerkt, dass eine Parabel achsensymmetrisch bezüglich einer senkrechten Achse durch den Scheitelpunkt ist.

Das bedeutet, dass die beiden Nullstellen symmetrisch zu dieser Achse liegen. Anders herum bedeutet das, dass die x-Koordinate x_S des Scheitelpunkts S genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen liegt:

$$x_S=\tfrac{1}{2}(x_1+x_2)\,.$$

Die y-Koordinate des Scheitelpunktes erhalten wir nun, indem wir den zugehörigen x-Wert einsetzen: $y_S = f(x_S)$.

$$\begin{aligned} y_S &= a(x_S - x_1)(x_S - x_2) \\ &= a\big(\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) - x_1\big)\big(\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) - x_2\big) \\ &= a\big(\tfrac{1}{2}(x_2 - x_1)\big)\big(\tfrac{1}{2}(x_1 - x_2)\big) \\ &= -\tfrac{1}{4}a(x_2 - x_1)^2 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Übergang von der NSTF zur SPF:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{\boxed{a}}\Bigg(x - \underset{\substack{\uparrow \\ x_S}}{\boxed{\tfrac{1}{2}(x_1 + x_2)}}\Bigg)^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ y_S}}{\boxed{-\tfrac{1}{4}a(x_2 - x_1)^2}}$$

Folgerung 11 (NSTF $\longrightarrow$ SPF: Der "$\frac{x_1+x_2}{2}$-Algorithmus").

- Berechne $x_S = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$
- Damit berechne dann $y_S = f(x_S)$
- Nimm a direkt aus der SPF

Beispiel: Aus der Nullstellenform $f(x) = -2(x-2)(x+3)$ erhält man mit $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$ den x-Wert $x_S = \frac{1}{2}\big(2 + (-3)\big) = -\frac{1}{2}$ des Scheitelpunktes.

Das gibt dann $y_S = f(x_S) = -2\big(-\frac{1}{2} - 2\big)\big(-\frac{1}{2} + 3\big) = -2 \cdot (-\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$.

Damit ist $f(x) = -2\big(x + \frac{1}{2}\big)^2 + \frac{25}{2}$.

3.4 SPF $\longrightarrow$ NSTF

Wir starten diesmal mit der SPF einer Parabel, das heißt

$$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S\,.$$

Um nun die NSTF zu bekommen, reicht es, die Nullstellen von $f(x)$ zu berechnen, also die x-Werte für die $f(x) = 0$ ist.

Wir haben also die Gleichung $a(x-x_S)^2 + y_S = 0$ zu lösen:

$$
\begin{aligned}
a(x-x_S)^2 + y_S &= 0 && \Big|\, -y_S \\
a(x-x_S)^2 &= -y_S && \Big|\, :a \\
(x-x_S)^2 &= -\frac{y_S}{a} && \Big|\, \sqrt{} \\
x - x_S &= \sqrt{-\frac{y_S}{a}} \quad \text{oder} \quad x - x_S = -\sqrt{-\frac{y_S}{a}} && \Big|\, +x_S \\
x &= x_S + \sqrt{-\frac{y_S}{a}} \quad \text{oder} \quad x = x_S - \sqrt{-\frac{y_S}{a}}
\end{aligned}
$$

Das liefert uns die zwei Nullstellen

$$
x_1 = x_S + \sqrt{-\frac{y_S}{a}}\,, \qquad x_2 = x_S - \sqrt{-\frac{y_S}{a}}\,.
$$

Damit erhalten wir den Übergang von der SPF zur NSTF:

$$
a(x-x_S)^2 + y_S = \underset{\substack{\uparrow \\ a}}{\boxed{a}} \left(x - \underset{\substack{\uparrow \\ x_1}}{\boxed{x_S + \sqrt{-\frac{y_s}{a}}}} \right) \left(x - \underset{\substack{\uparrow \\ x_2}}{\boxed{x_S - \sqrt{-\frac{y_s}{a}}}} \right)
$$

Bemerkung 12. Hier sieht man sehr gut, dass die NSTF nicht immer existieren muss. Diese gibt es natürlich nur, wenn es auch Nullstellen gibt. An den obigen Rechnungen sieht man, dass man ausgehend von der SPF nur Nullstellen hat, wenn einer der beiden folgenden Fälle auftritt:

1. $y_S = 0$.

   In diesem Fall verschwindet der Wurzelterm und es gibt nur eine (doppelte) Nullstelle, die mit dem Scheitelpunkt übereinstimmt.

2. y_S und a haben unterschiedliche Vorzeichen.

   Hätten beide das gleiche Vorzeichen, so wäre der Term unter der Wurzel negativ.

   Man sieht das aber auch direkt an der SPF: Haben a und y_S das gleiche Vorzeichen, dann gilt:

   - $f(x)$ ist immer positiv, wenn a und y_S beide positiv sind, oder
   - $f(x)$ ist immer negativ, wenn a und y_S beide negativ sind.

3.5 NF $\longrightarrow$ SPF

Um von der NF zur SPF zu gelangen, muss man die ersten zwei Terme der NF geeignet zu einem Binom ergänzen. Wir starten also mit der Normalform

$$
f(x) = ax^2 + bx + c\,.
$$

Bei dieser konzentrieren wir uns vor allem auf die ersten beiden Summanden (die mit x^2 und x):

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= a\Big(x^2+\frac{b}{a}x\Big)+c && \Big|\text{schreibe komplizierter}\\
&= a\Big(x^2+2\,\frac{b}{2a}\,x\Big)+c && \Big|\text{schreibe komplizierter}\\
&= a\left(x^2+2\,\frac{b}{2a}\,x+\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2-\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2\right)+c && \Big|\text{Klammere den letzten Summanden aus}\\
&= a\left(x^2+2\,\frac{b}{2a}\,x+\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2\right)+c-a\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 && \Big|\text{vereinfache den letzten Summanden}\\
&= a\left(x^2+2\,\frac{b}{2a}\,x+\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2\right)+c-\frac{b^2}{4a} && \Big|\text{In der Klammer steht ein Binom}\\
&= a\Big(x+\frac{b}{2a}\Big)^2+c-\frac{b^2}{4a}\\
&= \underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\boxed{a}}\Bigg(x-\underset{\substack{\uparrow\\ x_S}}{\boxed{-\frac{b}{2a}}}\Bigg)^2+\underset{\substack{\uparrow\\ y_S}}{\boxed{c-\frac{b^2}{4a}}}
\end{aligned}$$

Mit dieser allgemeinen Formel muss man bei der Umformung NF $\to$ SPF die quadratische Ergänzung nicht mehr durchführen. Das Vorgehen ist stattdessen wie folgt:

Folgerung 13 (NF $\longrightarrow$ SPF: Der "$-\frac{b}{2a}$-Algorithmus").

- Berechne $x_S = -\frac{b}{2a}$
- Damit berechne dann $y_S = f(x_S)$
- Nimm a direkt aus der NF

Beispiel: Aus der Normalform $f(x) = 6x^2 - 72x + 166$ erhält man mit $a = 6$ und $b = -124$ den x-Wert $x_S = -\frac{-72}{2\cdot 6} = 6$ des Scheitelpunktes.

Das gibt dann $y_S = f(x_S) = 6 \cdot 6^2 - 72 \cdot 6 + 206 = -10$.

Damit ist $f(x) = 6(x-6)^2 - 10$.

3.6 NF $\longrightarrow$ NSTF

Um letztlich von der NF zur NSTF einer Parabel zu gelangen, ist es sinnvoll, den Umweg über die Scheitelpunktform zu machen. Insbesondere, da sich aus letzterer die Nullstellen durch einfach Wurzelziehen bestimmen ließen, siehe Abschnitt 3.4.

Wir starten mit der NF und schreiben diese wie in Abschnitt 3.5 in die SPF um:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a}\,.$$

Zur Bestimmung der Nullstellen müssen wir die Gleichung $f(x) = 0$ lösen und machen das mit den gleichen Schritten, wie in Abschnitt 3.4:

$$\begin{aligned}
f(x) = a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 + c - \frac{b^2}{4a} &= 0 && \Big|\; - c + \frac{b^2}{4a}\\
a\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 &= \frac{b^2}{4a} - c && \Big|\; : a\\
\Big(x + \frac{b}{2a}\Big)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} && \Big|\; \sqrt{}\\
x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \quad &\text{oder} \quad x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} && \Big|\; - \frac{b}{2a}\\
x = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} \quad &\text{oder} \quad x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}
\end{aligned}$$

Das liefert uns die zwei Nullstellen

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \sqrt{\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{c}{a}}\,, \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\Big(\frac{b}{2a}\Big)^2 - \frac{c}{a}}$$

und schließlich den Übergang von der NF zur NSTF:

$$ax^2 + bx + c = \underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\boxed{a}}\Bigg(x - \underset{\substack{\uparrow\\ x_1}}{\boxed{-\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}}}\Bigg)\Bigg(x - \underset{\substack{\uparrow\\ x_2}}{\boxed{-\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}}}\Bigg)$$

Wie wir das praktisch nutzen, um den Übergang NF $\to$ NSTF zu machen, sehen wir in Folgerung 14

4 Wichtige Folgerungen aus den Umformungen

4.1 Die quadratische Ergänzung

Der entscheidende Teil der Umrechnung NF $\to$ SPF war die Suche nach dem Binom. Das heben wir als Rechenverfahren noch einmal hervor:

> Wir beginnen mit dem Umschreiben eines quadratischen Terms der Form ax^2+bx:
>
> $$ax^2 + bx = a\Big(x^2 + \frac{b}{a}x\Big) = a\Big(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x\Big)\,.$$
>
> Das machen wir, weil wir in der Klammer jetzt den ersten Teil einer Binomischen Formel wiederfinden. Um das zu sehen, haben wir einige Terme farbig markiert und vergleichen diesen Ausdruck mit der linken Seite des Binoms
>
> $$u^2 + 2\,u\,v + v^2 = (u + v)^2\,.$$

Um in der Klammer nun einen echten Binom zu haben, fehlt der grüne Term in der quadrierten Variante. Diesen ergänzen wir deshalb. Um allerdings den gesamten Term gleich zu lassen, müssen wir alles, was wir ergänzen, sofort wieder abziehen:

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right).$$

Um in der Klammer nur den Binom zu behalten, nehmen wir den letzten Summanden aus der Klammer heraus:

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + 2\,\frac{b}{2a}\,x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2.$$

Im letzten Schritt schreiben wir den Binom in der Klammer in Kurzform und vereinfachen den zusätzlichen hinteren Summanden:

$$ax^2 + bx = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}.$$

Dieses Vorgehen nennt man auch **quadratische Ergänzung**.

4.2 Die *pq*-Formel

Bei der Umrechnung NF → NSTF haben wir die Nullstellen x_1, x_2 in Termen der Parameter a, b, c berechnet. Auch diese Formeln können hilfreich sein und sie haben sogar einen eigenen Namen:

Eine spezielle Form von Parabeln erhält man für $a = 1$. In diesem Fall verwendet man üblicherweise die Bezeichnung

$$f(x) = x^2 + px + q$$

(also p statt b und q statt c). In diesem Fall reduzieren sich die Formeln zur Berechnung der Nullstellen ein wenig und man hat

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Diese Formeln sind sehr praktisch, wenn man die Nullstellen von Parabeln berechnen möchte. Aus diesem Grund hat sie einen eigenen Namen:

pq-Formel

Die pq-Formel in der obigen Form gibt uns das vorab angekündigte Vorgehen beim Übergang NF $\to$ NSTF:

Folgerung 14 (NF $\longrightarrow$ NSTF: Die "pq-Formel").

- Berechne $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ und damit die beiden Nullstellen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
- Nimm a direkt aus der NF

Beispiel: Aus der Normalform $f(x) = -2x^2 + 8x + 10$ erhält man mit $p = \frac{8}{-2} = -4$ und $q = \frac{10}{-2} = -5$ die Nullstellen $x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-5)} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3 = \begin{cases} 5 \\ -1 \end{cases}$ des Scheitelpunktes.

Damit ist $f(x) = -2\big(x-5)(x+1)$.

5 Abschlussbemerkungen und Beispiel

Bemerkung 15. Es ist sicher nicht notwendig alle Formeln zu kennen, aber einige Dinge sollte man sich merken:

- Die Nullstellen lassen sich leicht durch Wurzelziehen aus der SPF berechnen
- Der Scheitelpunkt (genauer seine x-Koordinate) liegt mittig zwischen den Nullstellen
- Aus der NF erhält man die SPF durch quadratische Ergänzung (= Finden eines Binoms)
- Aus der NF erhält man die Nullstellen mit Hilfe der pq-Formel

Beispiel 16. Bestimmen Sie die Scheitelpunktform, Normalform und Nullstellenform von

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(x+4)(x-2) + x(x+1) + 1$$

- **NF:** Es ist

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(x^2 + 4x - 2x - 8) + x^2 + x + 1 = \underline{\tfrac{3}{2}x^2 + 2x - 3}$$

- **SPF:** Wir rechnen ausgehend von der vorigen Normalform

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{3}{2}x^2 + 2x - 3 \\ &= \tfrac{3}{2}\big(x^2 + \tfrac{4}{3}x\big) - 3 \\ &= \tfrac{3}{2}\big(x^2 + 2\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{9} - \tfrac{4}{9}\big) - 3 \\ &= \tfrac{3}{2}\big(x^2 + 2\tfrac{2}{3}x + \tfrac{4}{9}\big) - 3 - \tfrac{2}{3} \\ &= \underline{\tfrac{3}{2}\big(x + \tfrac{2}{3}\big)^2 - \tfrac{11}{3}}\,. \end{aligned}$$

  Insbesondere ist der Scheitelpunkt $S\big(-\tfrac{2}{3}/-\tfrac{11}{3}\big)$

- **NSTF:** Wir berechnen zunächst die Nullstellen mit der pq-Formel ausgehend von der Normalform: Es ist $p = \frac{b}{a} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}$ und $q = \frac{c}{a} = \frac{-3}{\frac{3}{2}} = -2$, sodass die Nullstellen

$$x_{1/2} = -\tfrac{p}{2} \pm \sqrt{\big(\tfrac{p}{2}\big)^2 - q} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\tfrac{4}{9} + 2} = -\tfrac{2}{3} \pm \tfrac{\sqrt{22}}{3}$$

  Damit ist Nullstellenform

$$f(x) = \underline{\tfrac{3}{2}\big(x + \tfrac{2}{3} - \tfrac{\sqrt{22}}{3}\big)\big(x + \tfrac{2}{3} + \tfrac{\sqrt{22}}{3}\big)}\,.$$

- Beginnen wir mit SPF und suchen die Nullstellen, so lösen wir $f(x) = 0$, also

$$\begin{aligned} \tfrac{3}{2}\big(x + \tfrac{2}{3}\big)^2 - \tfrac{11}{3} &= 0 \\ \tfrac{3}{2}\big(x + \tfrac{2}{3}\big)^2 &= \tfrac{11}{3} \\ \big(x + \tfrac{2}{3}\big)^2 &= \tfrac{22}{9} \\ x + \tfrac{2}{3} &= \sqrt{\tfrac{22}{9}} \quad \text{oder} \quad x + \tfrac{2}{3} = -\sqrt{\tfrac{22}{9}} \\ x &= -\tfrac{2}{3} + \sqrt{\tfrac{22}{9}} \quad \text{oder} \quad x = -\tfrac{2}{3} - \sqrt{\tfrac{22}{9}} \end{aligned}$$

  Das sind natürlich die gleichen Nullstellen wie oben.

- Mit Hilfe der Nullstellen können wir auch den Scheitelpunkt $S(x_S/y_S)$ bestimmen. Wir haben

$$x_S = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2) = \tfrac{1}{2}\Big(-\tfrac{2}{3} + \sqrt{\tfrac{22}{9}} - \tfrac{2}{3} - \sqrt{\tfrac{22}{9}}\Big) = -\tfrac{2}{3}$$

  und weiter

$$y_S = f(x_S) = f(-\tfrac{2}{3}) = \frac{3}{2}\big(-\tfrac{2}{3}\big)^2 + 2\big(-\tfrac{2}{3}\big) - 3 = \tfrac{2}{3} - \tfrac{4}{3} - 3 = -\tfrac{11}{3}\,.$$

  Damit haben wir den Scheitelpunkt $S\big(-\tfrac{2}{3}/-\tfrac{11}{3}\big)$ von oben bestätigt.