Frank Klinker

Grundlagen der Potenzrechnung

1 Grundlegendes zu Potenzen

Für alle Zahlen a und alle ganzen, positiven Zahlen n heißt der Ausdruck

$$\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a \cdot a \cdot a}_{n\text{-mal}}}$$

eine **Potenz**, genauer die **n-te Potenz von** a. Dabei heißt a die **Basis** und n der **Exponent** der Potenz.

Z.B.

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2\,, \qquad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3\,, \qquad \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}\,.$$

Für alle Zahlen a, b und alle ganzen, positiven Zahlen m, n gelten beim Umgang mit Potenzen die folgenden grundlegenden Rechenregeln:

$$\boxed{\begin{array}{ll}
1a) & a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\
1b) & a^m : a^n = \dfrac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{falls } m > n \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & \text{falls } n > m \end{cases} \\
2) & (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\
3a) & (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \\
3b) & (a : b)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}
\end{array}}$$

Achtung: Rechenregel $1b$) ist <u>bisher</u> nur für $m \neq n$ sinnvoll, da nur dann die Exponenten auf der rechten Seite positiv sind. Außerdem ist Rechenregel $3b$) nur für $b \neq 0$ erklärt.

2 Exponenten die kleiner oder gleich Null sind

Ziel: Unser Ziel ist es, bei Potenzen auch ganze, negative Exponenten oder die Null zuzulassen. D. h., wir wollen z. B. die folgenden Ausdrücke berechnen können:

$$3^{-8}\,, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^0\,, \qquad \frac{\left(\frac{3}{8}\right)^{-4}}{5^3}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 30. August 2023

Permanenzprinzip: Dabei möchten wir alle bisherigen Rechenregeln weiter verwenden können. Es kommen allenfalls neue Regeln hinzu.

2.1 Der Exponent Null

Wir lassen in Rechenregel 1a) auch den Exponenten 0 zu und sehen uns das Ergebnis an. Dazu setzen wir in 1b) für m den Wert 0 ein. Das gibt

$$a^n \cdot a^0 \overset{1b)}{=} a^{n+0} = a^n \,.$$

Das heißt: Wenn wir a^n mit a^0 multiplizieren, dann kommt wieder a^n heraus.

Der einzige Wert mit dem man eine Zahl[1] multiplizieren darf, ohne sie zu verändern ist aber die Eins! Deshalb muss also $a^0 = 1$ sein.

Das nehmen wir nun als unsere neue Rechenregel: Für alle Zahlen $a \neq 0$ ist

$$\boxed{4) \quad a^0 = 1\,.}$$

2.2 Ganzzahlige, negative Exponenten

Jetzt wollen wir auch noch negative Exponenten zulassen und verstehen, wie a^{-n} für positive Zahlen n zu erklären ist. Der einzige Wert mit dem man eine Zahl multiplizieren kann, sodass im Ergebnis Eins rauskommt, ist ihr Kehrwert![2] Deshalb müssen also a^{-n} und $\dfrac{1}{a^n}$ die gleichen Zahlen sein.

Dazu verwenden wir Rechenregel 1a) und 4 und sehen uns die folgende Rechnung an:

$$a^n \cdot a^{-n} \overset{1a)}{=} a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 \overset{4)}{=} 1\,.$$

Das heißt: Multiplizieren wir die Zahlen a^n und a^{-n}, dann kommt Eins heraus.

So erhalten wir unsere neue letzte Regel: Für alle Zahlen $a \neq 0$ gilt

$$\boxed{5) \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}\,.}$$

3 Zusammenfassung

Wir haben erreicht, dass wir für alle Zahlen a und alle ganzen Zahlen n die Potenz a^n berechnen können.

[1] Ausgenommen die Null, die sich ja nie verändert wenn man sie mit etwas malnimmt.
[2] Ausgenommen die Null, für die es den Kehrwert nicht gibt.

Für alle Zahlen a, b und alle ganzen Zahlen m, n gelten die **Rechenregeln**

$$\boxed{\begin{array}{llll} 1a) & a^m \cdot a^n = a^{m+n} & 1b) & \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ 2) & (a^m)^n = a^{m \cdot n} & & \\ 3a) & (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n & 3b) & \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \\ 4) & a^0 = 1 & & \\ 5) & a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} & & \end{array}}$$

Wie die Rechnungen oben zeigen, folgt aus 5) und $3b$) die zum Rechnen nützliche **Zusatzregel**:

$$\boxed{5') \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n}$$

Praktische Anwendung der Rechenregel 5): Haben wir einen Bruch, in dem eine Potenz im Nenner (bzw. Zähler) steht, dann können wir diese Potenz in den Zähler (bzw. Nenner) schreiben, wenn wir das Vorzeichen des Exponenten ändern.

Es gilt also für alle Exponenten k

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{} \cdot a^k} = \frac{\boxed{} \cdot a^{-k}}{\boxed{}}$$

Beispiel:

$$\frac{4n^7x^3}{8n^3x^4} = \frac{4}{8n^3x^4n^{-7}x^{-3}} = \frac{4n^7x^3n^{-3}x^{-4}}{8}$$

Das formen wir dann mit Hilfe der Rechenregeln weiter um:

$$\frac{4n^7x^3}{8n^3x^4} = \frac{4}{8n^3x^4n^{-7}x^{-3}} = \frac{{}^1\cancel{4}}{{}_2\cancel{8}n^{3+(-7)}x^{4+(-3)}} = \frac{1}{2n^{-4}x^1} = \frac{n^4}{2x}$$

oder

$$\frac{4n^7x^3}{8n^3x^4} = \frac{4n^7x^3n^{-3}x^{-4}}{8} = \frac{{}^1\cancel{4}n^{7+(-3)}x^{3+(-4)}}{{}_2\cancel{8}} = \frac{n^4x^{-1}}{2} = \frac{n^4}{2x^1} = \frac{n^4}{2x}$$