

Stammfunktion, Integral und Flächenberechnung (Teil 1)

1 Einführung: Von der Ableitung zur Stammfunktion

Beim Rechnen mit Zahlen haben wir gemerkt, dass es zu einer Rechnung oft eine Gegenrechnung gibt, die die erste wieder aufhebt (und umgekehrt). Das haben wir z. B. verwendet, als wir Gleichungen aufgelöst haben:

- Die Gegenrechnung zu $+$ ist $-$ und die Gegenrechnung zu $-$ ist $+$:

$$(x + a) - a = x \quad \text{und} \quad (x - a) + a = x.$$

- Die Gegenrechnung zu $\cdot$ ist $:$ und die Gegenrechnung zu $:$ ist $\cdot$:

$$(x \cdot a) : a = x \quad \text{und} \quad (x : a) \cdot a = x.$$

- Die Gegenrechnung zum Potenzieren ist das Wurzelziehen:

$$\sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{und} \quad (\sqrt[n]{x})^n = x.$$

- Die Gegenrechnung zum Exponieren ist das Logarithmieren:

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{und} \quad a^{\log_a(x)} = x.$$

Beim Ableiten arbeiten wir nicht mit Zahlen, sondern mit Funktionen, aber auch hier gibt es so eine "Gegenrechnung":

Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt **eine Stammfunktion der Funktion $f(x)$** , wenn die Ableitung von $F(x)$ die Funktion $f(x)$ liefert, d. h. wenn $F'(x) = f(x)$.

Das Bilden einer Stammfunktion ist deshalb per Definition die Gegenrechnung zur Ableitung:

- Ist $F(x)$ eine Stammfunktion zu $f(x)$, so ist $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$
- Ist $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$, so ist $f(x)$ eine Stammfunktion von $f'(x)$

Beispiel 1. Mit Hilfe der Definition hat man ein einfaches Werkzeug an der Hand, um zu überprüfen ob eine gegebene Funktion $F(x)$ eine Stammfunktion zu einer anderen gegebenen Funktion $f(x)$ ist: man muss $F(x)$ nur ableiten und testen, ob $f(x)$ herauskommt!

- a) $F(x) = 4x$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 4$
- b) $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x$
- c) $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$
- d) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 2$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^2 + 8x$
- e) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x^2 + 215698$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^2 + 8x$

Jetzt kann man sich zurecht fragen, warum man den Begriff "Stammfunktion" einfügt? Etwa nur um die Gegenrechnung zur Ableitung zu bekommen?

Bevor wir uns dieser Frage widmen, wollen wir einige Eigenschaften der Stammfunktion festhalten, die zunächst banal aussehen, aber später noch wichtig sein werden.

Bemerkung 2. 1. An den Beispielen d) und e) sieht man bereits: Zu einer Funktion $f(x)$ gibt es mehrere Stammfunktionen.

Zu jeder Stammfunktion $F(x)$ kann man eine Konstante dazu zählen und die neue Funktion ist ebenfalls eine Stammfunktion.

Das liegt daran, dass die Konstante beim Ableiten wegfällt.

- 2. Das hat die folgende Konsequenz: Hat man zwei x -Werte gegeben, etwa $x = a$ und $x = b$, und möchte man für eine Funktion $f(x)$ die Differenz

$$F(b) - F(a)$$

für eine Stammfunktion $F(x)$ berechnen, so ist es egal, welche Stammfunktion man wählt: Durch die Differenz fällt die Konstante weg, die zwei verschiedene Stammfunktionen unterscheiden kann, siehe Beispiel 3.

Beispiel 3. Wir betrachten $f(x) = 3x^2$ sowie die x -Werte $a = 1$ und $b = 3$. Wir wählen zum einen die Stammfunktion $F_1(x) = x^3$ und zum anderen die Stammfunktion $F_2(x) = x^3 - 1234$. Dann gilt

$$F_1(3) - F_1(1) = 3^3 - 1^3 = 27 - 1 = 26$$

und auch

$$\begin{aligned} F_2(3) - F_2(1) &= (3^3 - 1234) - (1^3 - 1234) \\ &= 27 - \cancel{1234} - 1 + \cancel{1234} = 27 - 1 = 26 \end{aligned}$$

Man sieht also: Die Differenz der Werte einer Stammfunktion an zwei Stellen a und b ist unabhängig von der Wahl der Stammfunktion.

Bemerkung 4. Alle Beispiele a) bis e) von oben ergeben sich aus den folgenden zwei zentralen Tatsachen:

1. Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$, dann ist $F(x) + G(x)$ eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$.
2. $F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1}$ ist die Stammfunktion von $f(x) = ax^n$.

2 Die Bedeutung der Stammfunktion zur Flächenberechnung

2.1 Erste einführende Beispiele

Die folgenden Beispiele illustrieren die Idee, die wir verfolgen sehr gut.

Beispiel 5. Wir betrachten die konstante Funktion $f(x) = 3$. Eine Stammfunktion ist gegeben durch

$$F(x) = 3x.$$

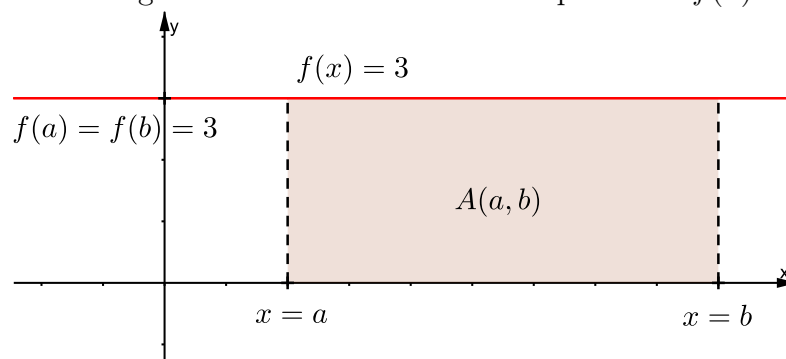
Weiter sehen wir uns die Fläche unter dem Graphen von f zwischen den x -Werten $a < b$ an. Den zugehörigen Flächeninhalt bezeichnen wir mit $A(a, b)$, siehe Abb. 1. Da die Fläche ein Rechteck mit der Höhe 3 und der Breite $b - a$ ist, haben wir

$$A(a, b) = 3(b - a).$$

Ebenso ist aber auch

$$F(b) - F(a) = 3b - 3a = 3(b - a).$$

Abbildung 1: Die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = 3$



Beispiel 6. Als zweites Beispiel ist $f(x) = 4x$ eine lineare Funktion. Eine Stammfunktion ist gegeben durch

$$F(x) = 2x^2.$$

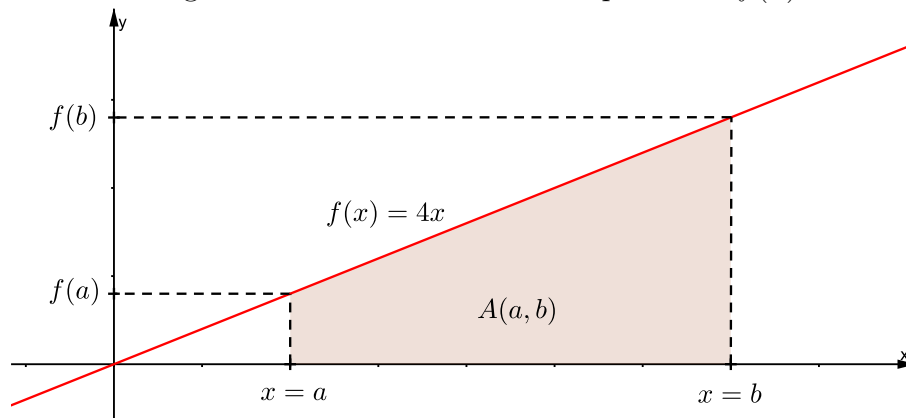
Auch hier sehen wir uns die Fläche unter dem Graphen von f zwischen den x -Werten $0 < a < b$ an und bezeichnen den zugehörigen Flächeninhalt mit $A(a, b)$, siehe Abb. 1. Die Fläche ist ein Parallelogramm dessen Ober- und Unterseite die Längen $f(a) = 4a$ und $f(b) = 4b$ haben und dessen Höhe $b - a$ ist. Damit ist

$$A(a, b) = \frac{4b + 4a}{2} \cdot (b - a) = 2(b + a)(b - a) = 2(b^2 - a^2).$$

Ebenso ist aber auch

$$F(b) - F(a) = 2b^2 - 2a^2 = 2(b^2 - a^2).$$

Abbildung 2: Die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = 4x$



In beiden Beispielen 5 und 6 haben wir also

$$A(a, b) = F(b) - F(a).$$

Um zu überprüfen, ob diese Beziehung grundsätzlich gilt sehen wir uns noch ein weiteres Beispiel an:

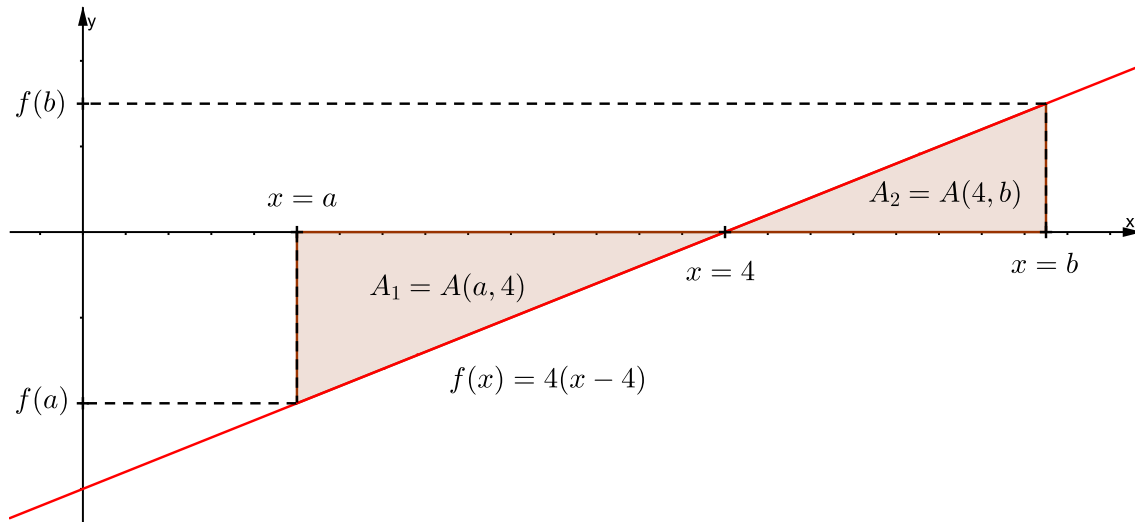
Beispiel 7. Wir betrachten die lineare Funktion $f(x) = 4(x - 4) = 4x - 16$ mit Stammfunktion $F(x) = 2x^2 - 16x$. Außerdem sehen wir uns zwischen den x -Werten $a < 4 < b$ die Fläche an, die der Graph von $f(x)$ mit der x -Achse bildet, siehe Abb. 3.

Die Gesamtfläche $A(a, b)$ setzt sich zusammen aus den Teilflächen $A_1 = A(a, 4)$ und $A_2 = A(4, b)$. Beide Teilflächen sind Dreiecksflächen mit den Höhen $f(b) = 4(b - 4)$ bzw. $-f(a) = -4(a - 4)$ (weil $f(a) < 0$ ist) und den Grundseiten $b - 4$ bzw. $4 - a$. Damit ist

$$A(a, 4) = A_1 = \frac{-4(a - 4)(4 - a)}{2} = 2(a - 4)(a - 4) = 2(a - 4)^2,$$

$$A(4, b) = A_2 = \frac{4(b - 4)(b - 4)}{2} = 2(b - 4)(b - 4) = 2(b - 4)^2.$$

Abbildung 3: Die Fläche unter dem Graphen von $f(x) = 4x - 1$



Damit erhalten wir zusammen

$$A(a, b) = A_1 + A_2 = 2(b-4)^2 + 2(a-4)^2.$$

Im Gegensatz dazu haben wir

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (2b^2 - 16b) - (2a^2 - 16a) \\ &= 2(b^2 - 8b + 16) - 2(a^2 - 8a + 16) = 2(b-4)^2 - 2(a-4)^2, \end{aligned}$$

sodass die aus den vorigen Beispielen erhaltene Beziehung zwischen Flächeninhalt und Stammfunktion nicht allgemein gültig sein kann.

Aber sehen wir genauer hin:

- Es ist für den Teil A_2 :

$$A(4, b) = 2(b-4)^2 \quad \text{und ebenso} \quad F(b) - F(4) = (2b^2 - 16b) - (-32) = 2(b-4)^2,$$

sodass für diese Teilfläche wieder

$$A(4, b) = F(b) - F(4)$$

gilt.

- Für den Teil A_1 ergibt eine analoge Rechnung

$$A(a, 4) = 2(a-4)^2 \quad \text{aber} \quad F(4) - F(a) = -2(a-4)^2,$$

sodass für diese Teilfläche nun

$$A(a, 4) = -(F(4) - F(a))$$

gilt.

Zusammenfassung 8. Wie die Beispiele 5, 6 und 7 zeigen, ist die nach Beispiel 6 eingerahmte Formel nicht immer gültig.

- Sie scheint korrekt zu sein, für Flächen, die oberhalb der x -Achse liegen.
- Sie scheint jedoch für Flächen unterhalb der x -Achse das richtige Ergebnis nur bis auf ein Vorzeichen zu geben.

2.2 Die Fläche zwischen dem Graph von $f(x)$ und der x -Achse

Dass die Zusammenfassung der obigen Beispiele tatsächlich korrekt ist, werden wir in einem späteren Abschnitt begründen, wir fassen hier lediglich zusammen:

Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse

- Gegeben ist eine Funktion $f(x)$ und eine zugehörige Stammfunktion $F(x)$. Weiter sind zwei x -Werte $a < b$ gegeben, sodass der Graph von $f(x)$ zwischen a und b ganz auf einer Seite der x -Achse liegt.

Dann lässt sich der Flächeninhalt $A(a, b)$ der Fläche, die zwischen a und b vom Graphen der Funktion $f(x)$ und der x -Achse eingeschlossen wird, mit Hilfe der Werte der Stammfunktion an a und b berechnen:

$$A(a, b) = |F(b) - F(a)|$$

Siehe dazu Abb. 4 (oben).

- Besteht die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse aus mehreren Teilen, dann muss man für alle Teilflächen die Rechnung aus dem ersten Punkt durchführen, und anschließend alle Teilstücke addieren, siehe Abb. 4 (unten).

Dazu muss man in der Regel die Nullstellen der Funktion $f(x)$ berechnen.

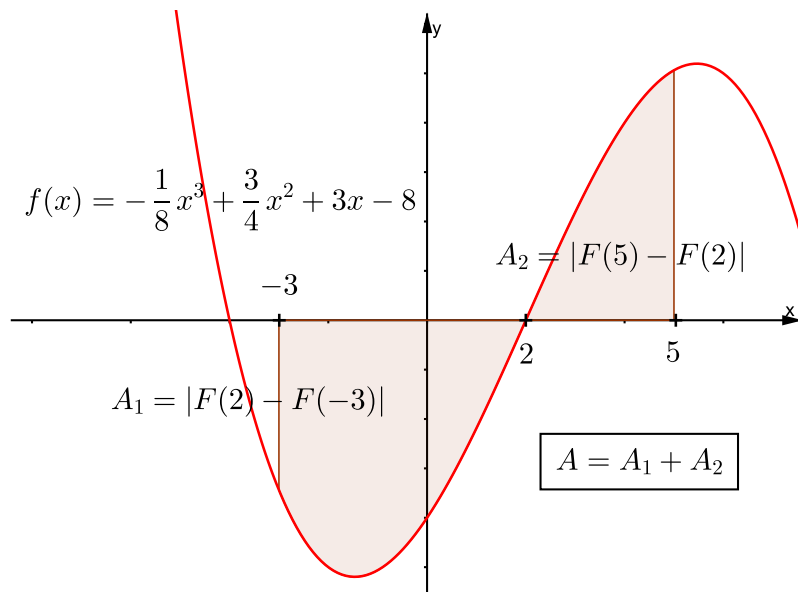
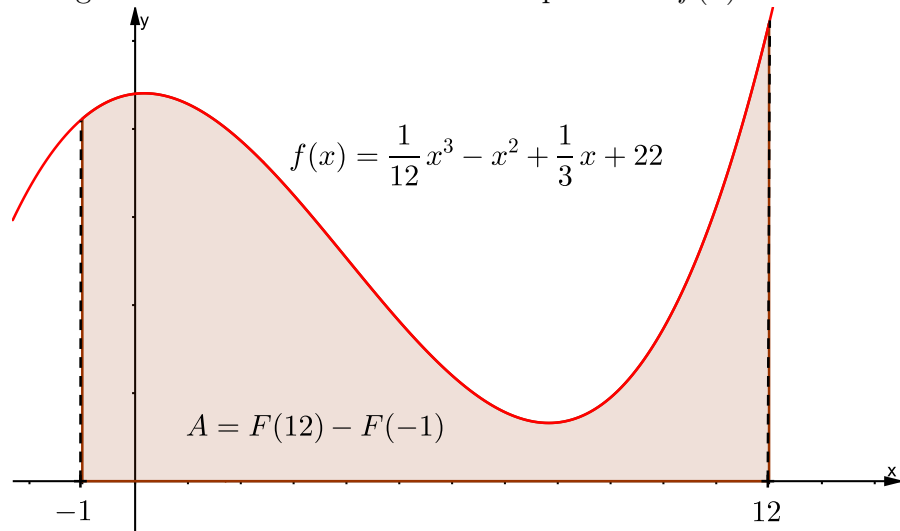
Beispiel 9. Zwischen $a = -1$ und $b = 12$ liegt der Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x + 22$ ganz oberhalb der x -Achse, siehe Abb. 4. Eine Stammfunktion von $f(x)$ ist

$$F(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 22x.$$

Damit ist der Flächeninhalt der Fläche, die der Graph von $f(x)$ zwischen $a = -1$ und $b = 12$ mit der x -Achse einschließt:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F(12) - F(-1)}} &= \left(\frac{1}{48} \cdot 12^4 - \frac{1}{3} \cdot 12^3 + \frac{1}{6} \cdot 12^2 + 22 \cdot 12 \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{48} \cdot (-1)^4 - \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{6} \cdot (-1)^2 + 22 \cdot (-1) \right) \\ &= (432 - 576 + 24 + 264) - \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 22 \right) \approx \underline{\underline{165,48}} \end{aligned}$$

Abbildung 4: Die Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse



2.3 Die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

Die Fläche zwischen den Graphen zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ erhält man als Differenz der entsprechenden Flächen mit der x -Achse. Hierbei ist entscheidend, ob der Graph der Funktion $f(x)$ "über" oder "unter" dem Graphen von $g(x)$ liegt.

- Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ und zwei zugehörige Stammfunktionen $F(x)$ und $G(x)$. Weiter sind zwei x -Werte $a < b$ gegeben, sodass der Graph von $f(x)$ zwischen a und b ganz oberhalb oder ganz unterhalb des Graphen von $g(x)$ liegt.

Dann lässt sich der Flächeninhalt $A(a, b)$ der Fläche, die zwischen a und b von den Graphen der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ eingeschlossen wird, mit

Hilfe der Werte der Stammfunktionen an a und b berechnen:

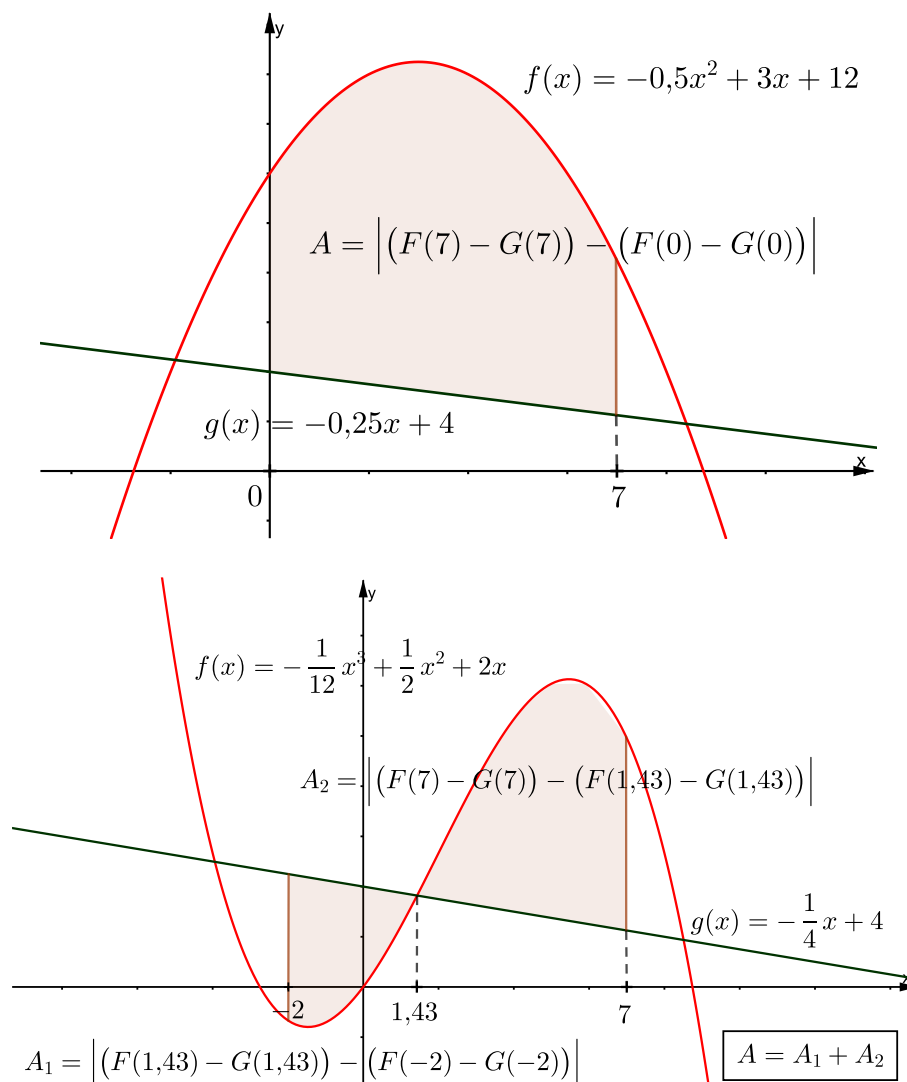
$$\begin{aligned} A(a, b) &= |(F(b) - F(a)) - (G(b) - G(a))| \\ &= |(F(b) - G(b)) - (F(a) - G(a))| \end{aligned}$$

Siehe auch Abb. 5 (oben).

- Besteht die Fläche zwischen dem Graphen von f und dem von $g(x)$ aus mehreren Teilen, dann muss man für alle Teilflächen die Rechnung aus dem ersten Punkt durchführen, und anschließend alle Teilstücke addieren, siehe Abb. 5 (unten).

Dazu muss man in der Regel die x -Werte der Schnittpunkte von $f(x)$ und $g(x)$ berechnen.

Abbildung 5: Die Fläche zwischen den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$



3 Das Integral einer Funktion

Da die Differenz zweier Werte einer Stammfunktion $F(x)$ einer zu gegebenen Funktion $f(x)$ eine besondere Bedeutung zu haben scheint, bekommt diese einen eigenen Begriff:

Das Integral einer Funktion $f(x)$

Gegeben sei die Funktion $f(x)$ für die Werte $a \leq x \leq b$ und $F(x)$ sei eine Stammfunktion von $f(x)$.

Das **Integral der Funktion $f(x)$ in den Grenzen von a und b** ist definiert durch

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

und ist unabhängig von der gewählten Stammfunktion.

Die Berechnung der Flächeninhalte kann man mit dem Integral wie folgt formulieren:

Bemerkung 10. Für eine Funktion $f(x)$ bezeichnet $A(a, b)$ den Flächeninhalt zwischen den x -Werten $a < b$ und der Fläche zwischen dem Graphen von $f(x)$ und der x -Achse

1. Für eine positive Funktion $f(x)$ ist

$$A(a, b) = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Ist $f(x)$ nicht positiv, sondern wechselt zwischen a und b an den Stellen $x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k$ das Vorzeichen, dann ist

$$A(a, b) = \left| \int_a^{x_1} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \right| + \dots + \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_k}^b f(x) dx \right|$$

Bemerkung 11. Für zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ bezeichnet $A(a, b)$ den von den Graphen eingeschlossenen Flächeninhalt zwischen den x -Werten $a < b$

1. Ist zwischen a und b stets $f(x) \geq g(x)$ ist

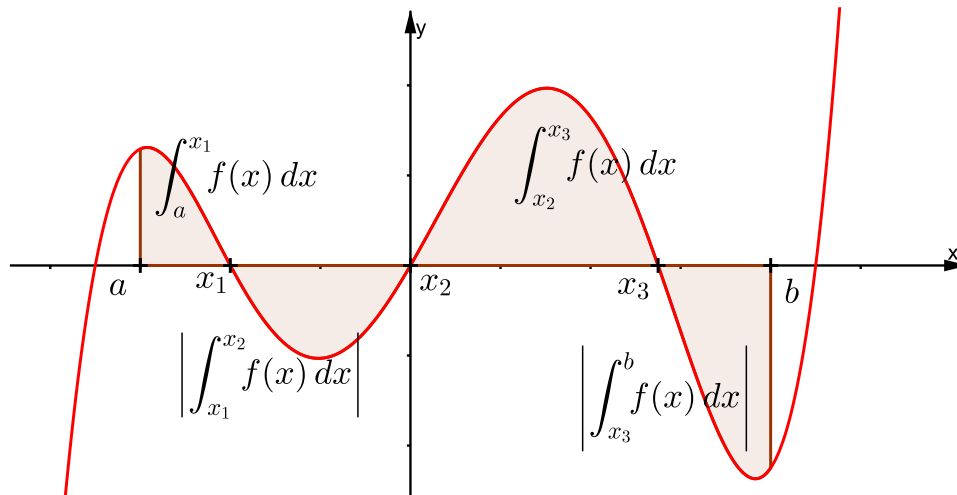
$$A(a, b) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx.$$

2. Gilt nicht überall $f(x) \geq g(x)$, sondern $f(x)$ und $g(x)$ schneiden sich zwischen a und b an den Stellen $x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k$, dann ist

$$\begin{aligned} A(a, b) = & \left| \int_a^{x_1} f(x) dx - \int_a^{x_1} g(x) dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x) dx \right| \\ & + \dots + \left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(x) dx \right| + \left| \int_{x_k}^b f(x) dx - \int_{x_k}^b g(x) dx \right| \end{aligned}$$

Bemerkung 10 ist ein Spezialfall von Bemerkung 11. Das sieht man, wenn man die x -Achse mit Hilfe der Funktion $g(x) = 0$ beschreibt.

Abbildung 6: Zu Bemerkung 10.2



4 Zusammenfassung und Ausblick

- Wir haben hier das Integral einer Funktion $f(x)$ mit Hilfe einer gegebenen Stammfunktion $F(x)$ eingeführt.
- Wir haben anhand von Beispielen gesehen, dass das Integral (im wesentlichen) den Flächeninhalt der Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ angibt.
- Wir haben vorweggenommen, dass wir die Fläche immer so berechnen können.

Wir werden uns in einem späteren Abschnitt folgender Umkehrung dieser Idee widmen:

- Mit Hilfe des Flächeninhalts der Fläche unter dem Graphen einer Funktion $f(x)$, werden wir eine neue Funktion definieren
- Von dieser neuen Funktion zeigen wir, dass es eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.
- Das liefert uns dann die Begründung dafür, dass wir die Fläche unter einem Graphen tatsächlich immer mit einer Stammfunktion berechnen können.