Frank Klinker

Grundlagen: Variablen, Terme und Gleichungen

Teil 2: Gleichungen

3 Terme gleichsetzen: Gleichungen

3.1 Gleichungen und ihre Lösungen

Wir können **Terme gleichsetzen**. Das liefert dann eine **Gleichung**.

Der Wahrheitsgehalt einer Gleichung (1)

▷ Eine Gleichung, in der keine Variablen auftreten, können wir daraufhin überprüfen, ob sie **wahr** oder **falsch** ist.

Beispiel 1.

- Gleichsetzen der Terme $8 \cdot 4$ und $16 \cdot 2$ liefert

  $$8 \cdot 4 = 16 \cdot 2$$

  und die erhaltene Gleichung ist **wahr**.

- Gleichsetzen der Terme $2^7 + 2^7$ und 2^8 liefert

  $$2^7 + 2^7 = 2^8$$

  und die erhaltene Gleichung ist **wahr**.

- Gleichsetzen der Terme $2^7 + 3^7$ und 5^7 liefert

  $$2^7 + 3^7 = 5^7$$

  und die erhaltene Gleichung ist **falsch**.

Der Wahrheitsgehalt einer Gleichung (2)

▷ Enthält eine Gleichung Variablen, dann ist die Frage, ob sie wahr oder falsch ist, zunächst nicht entscheidbar.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

- ▷ Erst wenn man die Variablen durch Werte ersetzt, kann man die Frage sinnvoll beantworten.
- ▷ Typischerweise ist es so, dass eine Gleichung lediglich für sehr spezielle Werte der Variable wahr ist.
- ▷ Eine Gleichung kann jedoch auch für alle Werte der Variablen wahr sein oder auch für keine Werte der Variablen wahr sein.

Die Werte für die Variablen, für die eine Gleichung wahr ist, nennen wir dann **die Lösungen der Gleichung**.

Bemerkung 2. In unseren Aufgaben und Beispielen treten (mit einer Ausnahme) höchstens zwei Variablen in den Gleichungen auf! Dabei spielen (auch mit einer Ausnahme) die Gleichungen mit einer Variablen die größte Rolle.

Beispiel 3.

- Gleichsetzen der Terme $\frac{4}{2}x$ und $2x$ liefert

  $$\frac{4}{2}x = 2x$$

  und die erhaltene Gleichung ist **für jede Wahl eines Wertes für x wahr**.

- Gleichsetzen der Terme $2z + 2$ und $2z$ liefert

  $$2z + 2 = 2z$$

  und die erhaltene Gleichung ist **für jede Wahl eines Wertes für z falsch**.

- Gleichsetzen der Terme $4x - 2$ und $2x$ liefert

  $$4x - 2 = 2x$$

  und die erhaltene Gleichung ist **nur für die Wahl $x = 1$ wahr**.

- Gleichsetzen der Terme $3t^2$ und $3t$ liefert

  $$3t^2 = 3t$$

  und die erhaltene Gleichung ist **nur für die Wahlen $t = 1$ und $t = 0$ wahr**.

- Gleichsetzen der Terme y und $3x$ liefert

  $$y = 3x$$

  und die erhaltene Gleichung ist **z. B. für die Wahlen $x = 0, y = 0$ oder $x = 1, y = 3$ oder $x = 20, y = 60$ wahr**.

- ▷ Enthält eine Gleichung eine oder mehr Variablen, so ist es in der Regel das Ziel, möglichst alle Lösungen anzugeben.
- ▷ Die Menge aller Lösungen einer Gleichung bezeichnen wir mit dem Symbol $\mathbb{L}$ und nennen diese Menge die **Lösungsmenge**.

Beispiel 4.

- Die Gleichung $\frac{4x}{2} = 2x$ ist für alle Werte wahr. Für die Lösungsmenge schreiben wir in diesem Fall

  $$\mathbb{L} = \mathbb{Q}$$

- Die Gleichung $2z + 2 = 2z$ besitzt keine Lösung. In diesem Fall ist die Lösungsmenge leer und wir schreiben

  $$\mathbb{L} = \emptyset$$

- Die Gleichung $4x - 2 = 2x$ hat nur die Lösung $x = 1$, also

  $$\mathbb{L} = \{1\}$$

- Die Gleichung $3t^2 = 3t$ hat nur die Lösungen $t = 1$ und $t = 0$, also

  $$\mathbb{L} = \{0, 1\}$$

- Die Gleichung $u^2 = -4$ hat keine Lösung, also

  $$\mathbb{L} = \emptyset$$

- Die Gleichung $\frac{2}{x-1} = \frac{x-1}{x+3}$ hat nur die Lösungen $x = -1$ und $x = 5$, also

  $$\mathbb{L} = \{-1, 5\}$$

- Die Gleichung $3^x(2x + 1) = 2^x(1 - x)$ hat nur die Lösung $x = 0$, also

  $$\mathbb{L} = \{0\}$$

3.2 Gleichungen umformen und manipulieren

- ▷ Wir haben bereits im vorigen Abschnitt gesehen, dass es in der Regel nicht so einfach ist, die Lösungen einer Gleichung zu 'sehen'.
- ▷ Durch 'Ausprobieren' finden wir in manchen Fällen Lösungen. Dabei bleibt jedoch meist die Frage offen, ob es noch weitere Lösungen gibt!
- ▷ Das Ziel ist es daher, eine Gleichung so zu manipulieren bzw. umzuformen, dass wir aus der manipulierten Gleichung möglichst alle Lösungen leichter ablesen können.
- ▷ Dabei müssen wir darauf achten, dass wir bei der durchgeführten Umformung keine Lösungen der Ausgangsgleichung verlieren oder neue Lösungen dazubekommen.
- ▷ Manipulationen/Umformungen, die die Lösungsmenge nicht ändern, heißen auch **Äquivalenzumformungen**.

Wie solche erlaubten Äquivalenzumformungen aussehen, werden wir an speziellen Gleichungsarten kennenlernen.