Frank Klinker

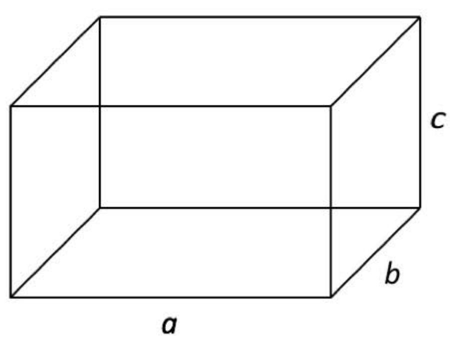
Berechnung von Volumen und Oberflächen

1 Grundlegende Begriffe

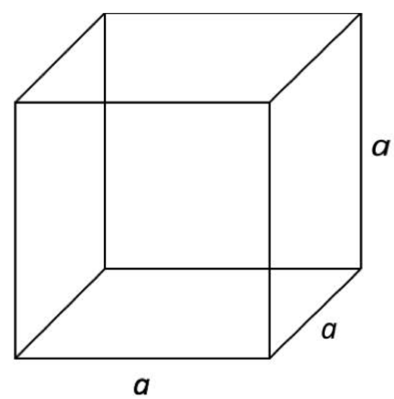
Wir befassen uns mit **Quadern**, **Würfeln** und Körpern, die daraus zusammengesetzt sind.

Von diesen wollen wir die **Oberfläche** und das **Volumen** bestimmen.

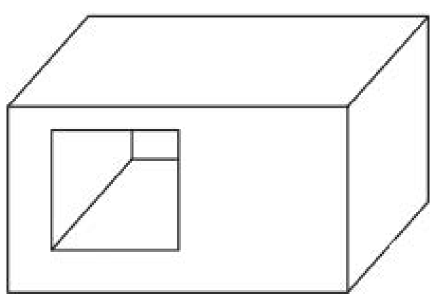
Quader

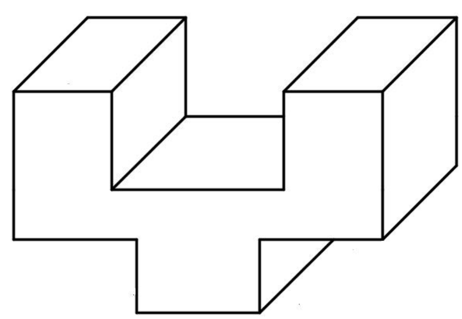


Würfel



Zusammengesetzte Körper





- Ein Körper besteht aus seinen **Seitenflächen**, seinen **Kanten** und seinen **Ecken**.
- Ein Quader oder ein Würfel haben

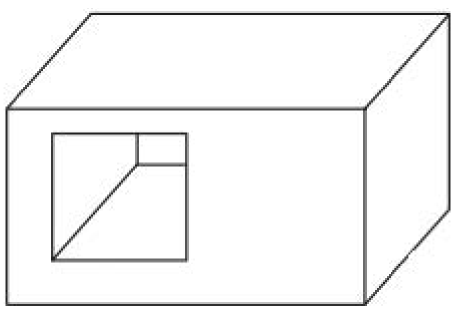
Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

- 6 Seitenflächen
- 12 Kanten
- 8 Ecken

- Bei einem allgemeinen Quader
  - sind alle Seitenflächen Rechtecke.
  - sind gegenüberliegende Seitenflächen gleich.
  - sind parallele Kanten gleich lang.
- Ein Würfel ist ein Quader, dessen Kantenlängen alle gleich lang sind.
- Bei einem Würfel
  - sind alle Seitenflächen Quadrate.
  - haben alle Seitenflächen den gleichen Flächeninhalt.
  - sind alle Kanten gleich lang.

Beispiel:

Der folgende zusammengesetzte Körper besteht aus einem Quader, aus dem ein Quader herausgeschnitten wurde.



Der Körper besitzt 10 Seitenflächen, 24 Kanten und 16 Ecken

Oberfläche eines Körpers

- Die **Oberfläche** O eines Körpers ist die Summe aller Flächeninhalte seiner Seitenflächen.
- Die Einheit der Oberfläche ist damit $mm^2, cm^2, dm^2, m^2, a, ha$, oder km^2.

Volumen eines Körpers

Das **Volumen** V eines Körpers ist die Menge Flüssigkeit, die wir in den Körper einfüllen können.

Die Einheit des Volumens ist mm^3 (Kubikmillimeter), cm^3 (Kubikzentimeter), dm^3 (Kubikdezimeter), m^3 (Kubikmeter), und km^3 (Kubikkilometer).

Die im Alltag gebräuchligsten Einheiten sind dm^3 und cm^3. Deshalb gibt es dafür eigene Namen:

$dm^3 = \ell$ (Liter)

$cm^3 = ml$ (Milliliter)

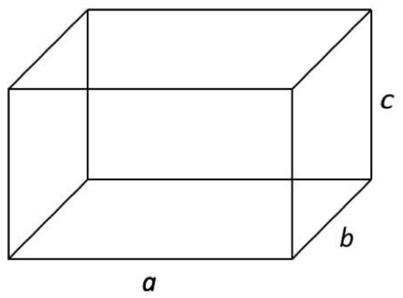
- Das Volumen $1\,mm^3$ entspricht dem Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $1\,mm$.
- Das Volumen $1\,cm^3 = 1\,m\ell$ entspricht dem Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $1\,cm$.
- Das Volumen $1\,dm^3 = 1\,\ell$ entspricht dem Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $1\,dm$.
- Das Volumen $1\,m^3$ entspricht dem Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $1\,m$.
- Das Volumen $1\,km^3$ entspricht dem Volumen eines Würfels mit der Kantenlänge $1\,km$.

Die **Umrechnung von Volumen** geschieht mit den Übergangsfaktoren 1000 bzw 1000000000:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{mm^3} \arrow[r, bend right, ":1000"'] & \boxed{cm^3 = m\ell} \arrow[l, bend right, "\cdot 1000"'] \arrow[r, bend right, ":1000"'] & \boxed{dm^3 = \ell} \arrow[l, bend right, "\cdot 1000"'] \arrow[r, bend right, ":1000"'] & \boxed{m^3} \arrow[l, bend right, "\cdot 1000"'] \arrow[r, bend right, ":1000000000"'] & \boxed{km^3} \arrow[l, bend right, "\cdot 1000000000"']
\end{tikzcd}$$

2 Berechnung der Oberfläche vom Quader und Würfel

2.1 Der Quader

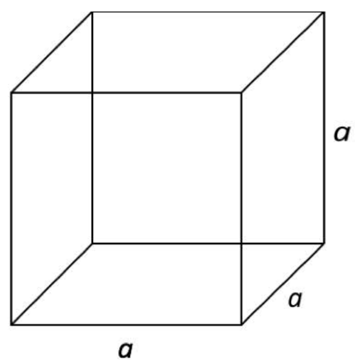


Oberfläche: $O = a \cdot b + a \cdot b + a \cdot c + a \cdot c + b \cdot c + b \cdot c$

$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

Volumen $V = a \cdot b \cdot c$

2.2 Der Würfel



Oberfläche: $O = a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a + a \cdot a$

$O = 6 \cdot a \cdot a$

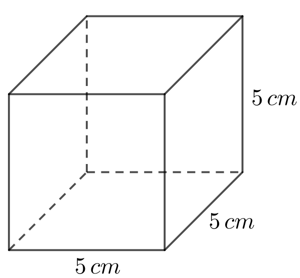
$O = 6 \cdot a^2$

Volumen $V = a \cdot a \cdot a$

$V = a^3$

2.3 Beispiele

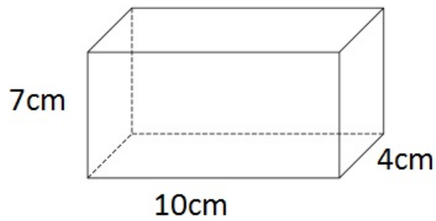
Aufgabe 1.



$$\begin{aligned} V &= 5\,cm \cdot 5\,cm \cdot 5\,cm \\ &= 5 \cdot 5 \cdot 5\,cm^3 \\ &= \underline{\underline{125\,cm^3 = 0,125\,\ell}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O &= 6 \cdot 5\,cm \cdot 5\,cm \\ &= 6 \cdot 5 \cdot 5\,cm^2 \\ &= \underline{\underline{150\,cm^2 = 1,5\,dm^2}} \end{aligned}$$

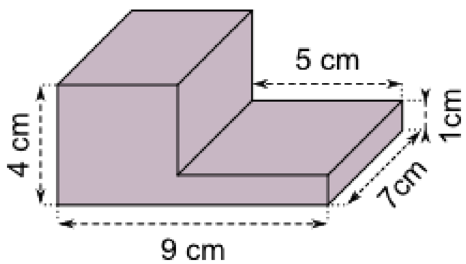
Aufgabe 2.



$$\begin{aligned} V &= 7\,cm \cdot 10\,cm \cdot 4\,cm \\ &= 7 \cdot 10 \cdot 4\,cm^3 \\ &= \underline{\underline{280\,cm^3 = 0,28\,\ell}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} O &= 2 \cdot (7\,cm \cdot 10\,cm + 7\,cm \cdot 4\,cm + 10\,cm \cdot 4\,cm) \\ &= 2 \cdot (7 \cdot 10 + 7 \cdot 4 + 10 \cdot 4)\,cm^2 \\ &= \underline{\underline{276, cm^2 = 2,76\,dm^2}} \end{aligned}$$

Aufgabe 3.



Volumen (1. Lösungidee: Ein kleiner Quader wird aus einem großen herausgeschnitten)

Maße des großen Quaders: $4\,cm$, $7\,cm$ und $9\,cm$.

Sein Volumen ist damit

$$V_{\text{groß}} = 4\,cm \cdot 7\,cm \cdot 9\,cm = \underline{252\,cm^3 = 0,252\ell}\,.$$

Maße des kleinen Quaders: $5\,cm$, $7\,cm$ und $4\,cm - 1\,cm = 3\,cm$.

Sein Volumen ist also

$$V_{\text{klein}} = 5\,cm \cdot 7\,cm \cdot 3\,cm = \underline{105\,cm^3 = 0,105\ell}\,.$$

Das gesuchte Volumen ist schließlich

$$V = V_{\text{groß}} - V_{\text{klein}} = 252\,cm^3 - 105\,cm^3 = \underline{\underline{147\,cm^3 = 0,147\ell}}\,.$$

Volumen (2. Lösungsidee: Zusammengesetzt aus zwei Quadern)

Maße des ersten Quaders: $4\,cm$, $7\,cm$ und $9\,cm - 5\,cm = 4\,cm$.

Sein Volumen ist damit

$$V_1 = 4\,cm \cdot 7\,cm \cdot 4\,cm = \underline{112\,cm^3 = 0,112\ell}\,.$$

Maße des zweiten Quaders: $5\,cm$, $7\,cm$ und $1\,cm$.

Sein Volumen ist also

$$V_2 = 5\,cm \cdot 7\,cm \cdot 1\,cm = \underline{35\,cm^3 = 0,035\ell}\,.$$

Das gesuchte Volumen ist schließlich

$$V = V_{\text{groß}} - V_{\text{klein}} = 112\,cm^3 + 35\,cm^3 = \underline{\underline{147\,cm^3 = 0,147\ell}}\,.$$

Oberfläche

Die Oberfläche setzt sich aus 8 Seitenflächen zusammen.

Von diesen Seitanflächen sind 6 Rechtecke. Die 2 weiteren Seitenflächen (Vorder- und Rückseite) setzen sich jeweils aus 2 Rechtecken zusammen.

Wir berechnen zunächst den Flächeninhalt der 6 Rechtecke.

- Seitenfläche 1 hat die Seitenlängen $7\,cm$ und $1\,cm$. Sein Flächeninhalt ist

  $$O_1 = 7\,cm \cdot 1\,cm = \underline{7\,cm^2}$$

- Seitenfläche 2 hat die Seitenlängen $7\,cm$ und $5\,cm$. Sein Flächeninhalt ist

  $$O_2 = 7\,cm \cdot 5\,cm = \underline{35\,cm^2}$$

- Seitenfläche 3 hat die Seitenlängen $7\,cm$ und $4\,cm - 1\,cm = 3\,cm$. Sein Flächeninhalt ist

  $$O_3 = 7\,cm \cdot 3\,cm = \underline{21\,cm^2}$$

- Seitenfläche 4 hat die Seitenlängen $7\,cm$ und $9\,cm - 5\,cm = 4\,cm$. Sein Flächeninhalt ist

  $$O_4 = 7\,cm \cdot 4\,cm = \underline{28\,cm^2}$$

- Seitenfläche 5 hat die Seitenlängen $7\,cm$ und $4\,cm$. Sein Flächeninhalt ist

  $$O_5 = 7\,cm \cdot 4\,cm = \underline{28\,cm^2}$$

- Seitenfläche 6 hat die Seitenlängen $7\,cm$ und $9\,cm$. Sein Flächeninhalt ist

  $$O_6 = 7\,cm \cdot 9\,cm = \underline{63\,cm^2}$$

Vorder- und Rückseite sind gleich und setzen sich jeweils aus zwei Rechtecken zusammen. Seitenlängen erstes Rechteck: $5\,cm$ und $1\,cm$, Seitenlängen zweites Rechteck: $4\,cm$ und $9\,cm - 5\,cm = 4\,cm$. Vorder-und Rückseite zusammen haben also den Flächeninhalt

$$O_7 = 2 \cdot \big(5\,cm \cdot 1\,cm + 4\,cm \cdot 4\,cm\big) = 2 \cdot (5 + 16)\,cm^2 = \underline{42\,cm^2}$$

Die Oberfläche hat schließlich den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} O &= O_1 + O_2 + O_3 + O_4 + O_5 + O_6 + O_7 \\ &= 7\,cm^2 + 35\,cm^2 + 21\,cm^2 + 28\,cm^2 + 28\,cm^2 + 63\,cm^2 + 42\,cm^2 \\ &= \underline{\underline{224\,cm^2}} \end{aligned}$$