Frank Klinker

Grundlagen zu Wachstums- und Zerfallsprozessen

1 Wachstums- und Zerfallsprozesse allgemein

- Ein Wachstumsprozess wird stets durch eine monoton steigende Funktion $f(t)$ beschrieben.

  Ein Zerfallsprozess wird stets durch eine monoton fallende Funktion $f(t)$ beschrieben.

- Gibt es die Ableitung $f'(t)$, so beschreibt $f(t)$ einen Wachstumsprozess, wenn $f'(t) \geq 0$, und einen Zerfallsprozess, wenn $f'(t) \leq 0$.

2 Spezielle Wachstumsprozesse

2.1 Lineares Wachstum

Das einfachste Modell um Wachstum zu beschreiben ist das **lineare Wachstum**. Dieses lässt sich auf zwei Arten charakterisieren

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt ein lineares Wachstum, wenn es eine Zahl $a > 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $t_1 \leq t_2$

$$f(t_2) - f(t_1) = a(t_2 - t_1)$$

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt ein lineares Wachstum, wenn es eine Zahl $a > 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte t

$$f(t+1) = f(t) + a$$

Ein lineares Wachstum wird stets durch eine lineare Funktion mit negativer Steigung $a < 0$ beschrieben:

$$f(t) = at + c$$

wobei der $f(0) = c$ der Anfangswert des Wachstums ist.

Das lineare Wachstum ist stets unbeschränkt.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

2.2 Exponentielles Wachstum

Neben dem linearen Wachstum ist das **exponentielle Wachstum** ein in natürlichen Prozessen vorkommendes Phänomen.

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt ein exponentielles Wachstum, wenn es eine Zahl $a > 1$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte t

$$f(t+1) = a \cdot f(t)\,.$$

Ein exponentielles Wachstum wird stets durch eine Exponentialfunktion beschrieben:

$$f(t) = c\,e^{\ln(a)\cdot t} = c\,a^t$$

wobei $f(0) = c$ der Anfangswert des Wachstums ist. Den positiven Wert $\ln(a)$ nennen wir auch den **Steigungswert** des exponentiellen Wachstums.

Das exponentielle Wachstum ist stets unbeschränkt.

Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion e^x ist der **natürliche Logarithmus** ln. Das bedeutet, *der Logarithmus* ln *hebt die Funktion* e^x *auf*

$$\ln(e^x) = x \quad \text{und} \quad e^{\ln(x)} = x\,,$$

analog zu die Wurzel $\sqrt{}$ hebt die Funktion x^2 auf

$$\sqrt{x^2} = x \quad \text{und} \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

Man kann den ln nutzen, um Gleichungen zu lösen die exponentielle Ausdrücke enthalten. Z. B.

∗ $e^{2x} = 7$

$$\begin{aligned} e^{2x} &= 7 && \mid \ln \\ 2x &= \ln(7) && \mid : 2 \\ x &= \ln(7) : 2 \approx 0{,}973 \end{aligned}$$

∗ $20 - 18e^{-0{,}03t} = 19$

$$\begin{aligned} 20 - 18e^{-0{,}03t} &= 19 && \mid -20 \\ -18e^{-0{,}03t} &= -1 && \mid : (-18) \\ e^{-0{,}03t} &= \tfrac{1}{18} && \mid \ln \\ -0{,}03t &= \ln\left(\tfrac{1}{18}\right) && \mid : (-0{,}03) \\ t &= -\frac{\ln\left(\frac{1}{18}\right)}{0{,}03} \approx 96{,}348 \end{aligned}$$

2.3 Potenzwachstum

Eine Verallgemeinerung des linearen Wachstums ist das **Potenzwachstum**

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt ein Potenzwachstum, wenn es eine natürliche Zahl n gibt, sodass für alle Zeitpunkte $t_1 < t_2$

$$f(t_2) - f(t_1) = a(t_2^n - t_1^n)$$

Ein Potenzwachstum hat stets die Form

$$f(t) = at^n + c$$

wobei $c = f(0)$ der Anfangswert des Wachstumsprozesses ist.

Für $n = 1$ erhält man das lineare Wachstum und für $t = 2$ spricht man von quadratischem Wachstum.

Potenzwachstum ist stets unbeschränkt.

2.4 Polynomielles Wachstum

Als **polynomielles Wachstum** beschreibt man eine weitere Verallgemeinerung des Potenzwachstums. Hier wird das Wachstum durch ein Polynom beschrieben.

Hier muss man mit dem Definitionsbereich vorsichtiger sein, z. B.:

* $f(t) = t^2 - 2t + 3$ beschreibt nur für $t \geq 1$ einen Wachstumsprozess.
* $f(t) = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2$ beschreibt nur für $0 \leq t \leq 4$ einen Wachstumsprozess.

Im ersten Fall ist das Wachstum nicht beschränkt. Im zweiten Fall ist es beschränkt durch die Einschränkung des Definitionsbereiches.

2.5 Realistisches Wachstum

Ein realistisches Wachstum ist nicht rein exponentiell, sondern setzt sich aus verschiedenen Teilen zusammen.

Oft ist es so, dass das Wachstum nicht unbeschränkt weiterläuft, sondern es stellt sich ein Grenzwert ein, der durch äußere Rahmenbedingungen vorgegeben ist (Ladevorgang eines Akkus, Infektion einer Population mit einem Virus etc.)

Dieser Teil des Wachstums lässt sich in einem gewissen Rahmen durch eine Funktion vom Typ

$$f(t) = b - ce^{-at} \quad \text{mit} \quad a, b, c > 0$$

beschreiben.

Diese Funktion hat die folgenden wichtigen Eigenschaften:

- Da die Teilfunktion ce^{-at} immer positiv ist, ziehen wir in $f(t)$ von b immer etwas ab. Damit ist
$$f(t) < b \text{ für alle Werte } t$$
- Da die Funktion ce^{-at} mit steigenden t-Werten immer kleiner wird, nähert sich $f(t)$ für steigende t-Werte immer mehr dem Wert b an.

  Noch genauer: Es ist zwar $f(t)$ immer kleiner als b, aber jeder y-Wert, der kleiner ist als b, etwa $b - s$, wird von $f(t)$ überschritten, wenn man nur t groß genug wählt:

  Für alle kleinen Werte $s > 0$ findet man ein t, sodass $f(t) > b - s$.

Der Wert b ist dann der **Grenzwert** der Funktion $f(t)$ und man schreibt
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = b\,.$$

Das kann man auch quantifizieren.

Wie das geht, zeigen wir an dem Beispiel $f(t) = 350 - 50e^{-0{,}005t}$.

Wir wissen, dass $f(t) < 350$ ist. Wir suchen nun t-Werte, sodass $f(t) > 349{,}99999$:

$$\begin{aligned}
350 - 50e^{-0{,}005t} &> 349{,}99999 && \Big|\, -349{,}99999 \,\Big|\, +50e^{-0{,}005t} \\
0{,}00001 &> 50e^{-0{,}005t} && \Big|\, :50 \\
0{,}0000002 &> e^{-0{,}005t} && \Big|\, \ln \\
\ln(0{,}0000002) &> \ln\left(e^{-0{,}005t}\right) && \\
-15{,}425 &> -0{,}005t && \Big|\, +15{,}425 \,\Big|\, +0{,}005t \\
0{,}005t &> 15{,}425 && \Big|\, :0{,}005 \\
t &> 3085 &&
\end{aligned}$$

Das heißt, für $t > 3085$ ist $f(t) > 349{,}99999$.

3 Spezielle Zerfallsprozesse

Die hier behandelten speziellen Zerfallsprozesse unterscheiden sich von den analogen speziellen Wachstumsprozessen durch das Vorzeichen der Steigung (linearer Fall), des Vorzeichens des Steigungsfaktors (exponentieller Fall) oder durch das Vorzeichen des Exponenten (Potenzfall):

3.1 Linearer Zerfall

Auch der **lineare Zerfall** lässt sich auf zwei Arten charakterisieren:

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt einen linearen Zerfall, wenn es eine Zahl $a < 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $0 \leq t_1 \leq t_2$

$$f(t_2) - f(t_1) = a(t_2 - t_1)$$

* Ein Prozess $f(t)$ beschreibt einen linearen Zerfall, wenn es eine Zahl $a < 0$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $t \geq 0$

$$f(t + 1) = f(t) + a$$

Ein linearer Zerfall wird stets durch eine lineare Funktion mit negativer Steigung $a < 0$ beschrieben:

$$f(t) = at + c$$

wobei der $f(0) = c$ der Anfangswert des Wachstums ist.

Der lineare Zerfall ist nach unten nicht beschränkt.

3.2 Exponentieller Zerfall

Der **exponentielle Zerfall** ist wie folgt charakterisiert:

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt einen exponentiellen Zerfall, wenn es eine Zahl $0 < a < 1$ gibt, sodass für alle Zeitpunkte $t \geq 0$

$$f(t + 1) = a \cdot f(t)\,.$$

Ein exponentieller Zerfall wird stets durch eine Exponentialfunktion beschrieben:

$$f(t) = c\, e^{\ln(a) \cdot t} = c\, a^t$$

wobei $f(0) = c$ der Anfangswert des Wachstums ist. In diesem Fall ist der Steigungswert negativ, also $\ln(a) < 0$.

Der exponentielle Zerfall ist durch den Wert 0 nach unten beschränkt und hat diesen Wert als Grenzwert, d.h.

- $f(t) > 0$ für alle Werte t
- Für alle kleinen Werte $s > 0$ findet man ein t, sodass $(t) < s$.

3.3 Potenzzerfall

Der **Potenzzerfall** ist wie folgt charakterisiert:

- Ein Prozess $f(t)$ beschreibt ein Potenz-Wachstum, wenn es eine Zahl $a > 0$ und eine natürliche Zahl n gibt, sodass für alle Zeitpunkte $t_1 < t_2$

$$f(t_2) - f(t_1) = a(t_2^{-n} - t_1^{-n})$$

Ein Potenzzerfall hat stets die Form

$$f(t) = \frac{a}{t^n} + c\,.$$

Der Potenzzerfall ist nur für $t > 0$ erklärt. Für $n = 1$ spricht man von hyperbolischem Zerfall und für $t = 2$ auch von quadratischem Zerfall.

Der Wert c beschreibt den Grenzwert des Zerfalls und für ihn gilt

- $f(t) > c$ für alle Werte t.
- Für alle kleinen Werte $s > 0$ findet man ein t, sodass $f(t) > c + s$.