Frank Klinker

Zusammengesetze Funktionen

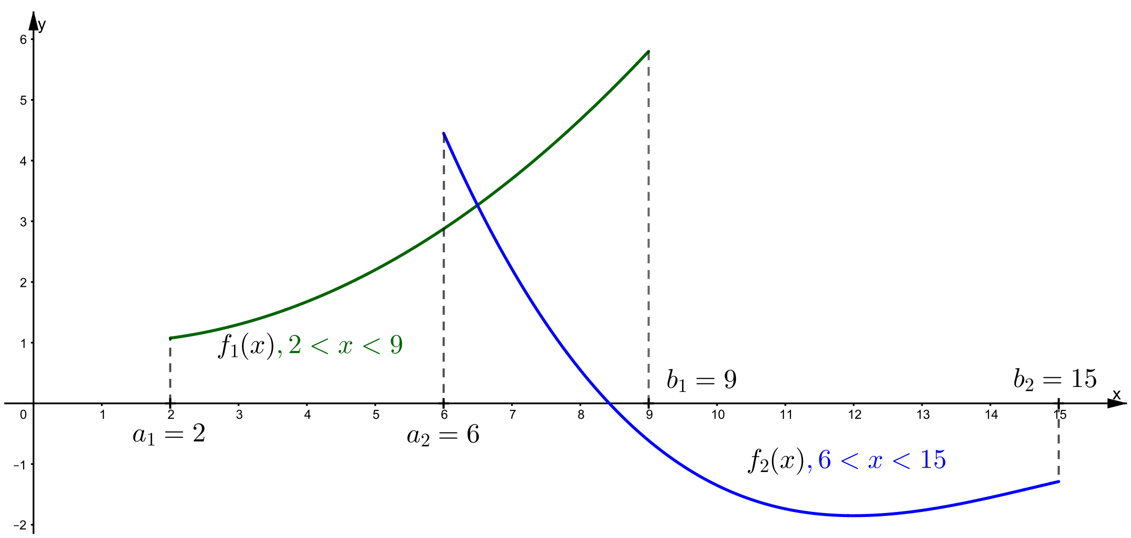
Teil 1: Sprünge und Sprungfreiheit

1 Was ist eine zusammengesetzten Funktion

Wir sehen uns zwei Funktionen[1] $f_1(x)$ und $f_2(x)$ an, deren Definitionsbereiche sich überlappen, d. h.:

Es gibt Zahlen $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$, sodass $f_1(x)$ für $a_1 < x < b_1$ und $f_2(x)$ für $a_2 < x < b_2$ definiert ist. Dann sind beide Funktionen gleichzeitig für $a_2 < x < b_1$ definiert, siehe Abb. 1.

Abbildung 1: Zwei Funktionen mit überlappenden Definitionsbereichen



Bemerkung 1. Sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ganzrationale Funktionen, dann sind sie auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Damit überlappen sich die Definitionsbereiche natürlich auch auf ganz $\mathbb{R}$.

> **Zusammengesetzte Funktionen**
>
> Wir sehen uns zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ an, deren Definitionsbereiche sich wie oben überlappen. Weiter ist x_0 eine Stelle aus dem gemeinsamen Definitionsbereich von $f_1(x)$ und $f_2(x)$.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

[1]Dabei können wir uns etwa zwei ganzrationale Funktionen vorstellen.

Dann heißt $f(x)$ **an der Stelle x_0 aus den Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zusammengesetzt**, wenn

$$f(x) = f_1(x) \ \text{ für } \ x \leq x_0 \ \text{ und } \ f(x) = f_2(x) \ \text{ für } \ x > x_0$$

Wir schreiben dann

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für } \ x \leq x_0 \\ f_2(x) & \text{für } \ x > x_0 \end{cases} .$$

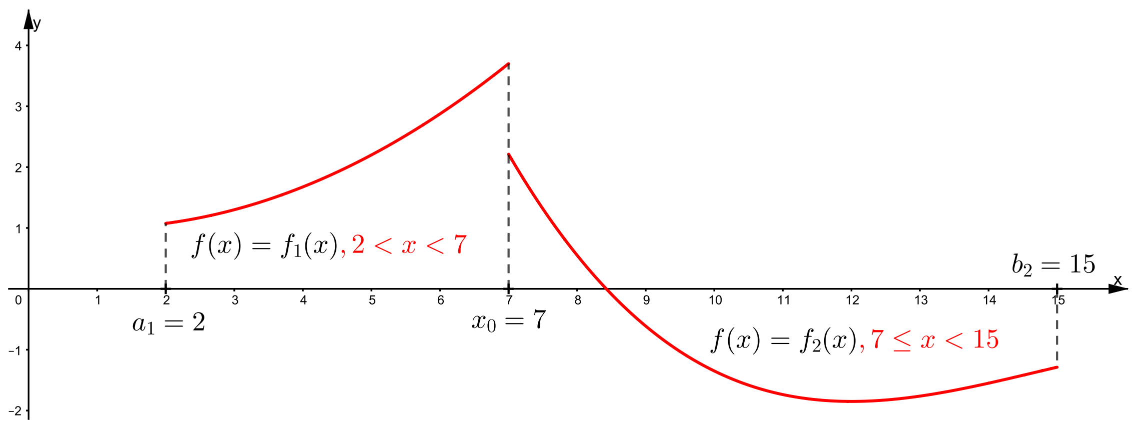
Die Stelle x_0, an der die Teilfunktionen zusammengesetzt sind, nennen wir auch die **Verklebestelle**.

Beispiel 2. Wir sehen uns die beiden Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ aus Abb. 1 an. Die Definitionsbereiche überlappen sich bei $6 < x < 9$.

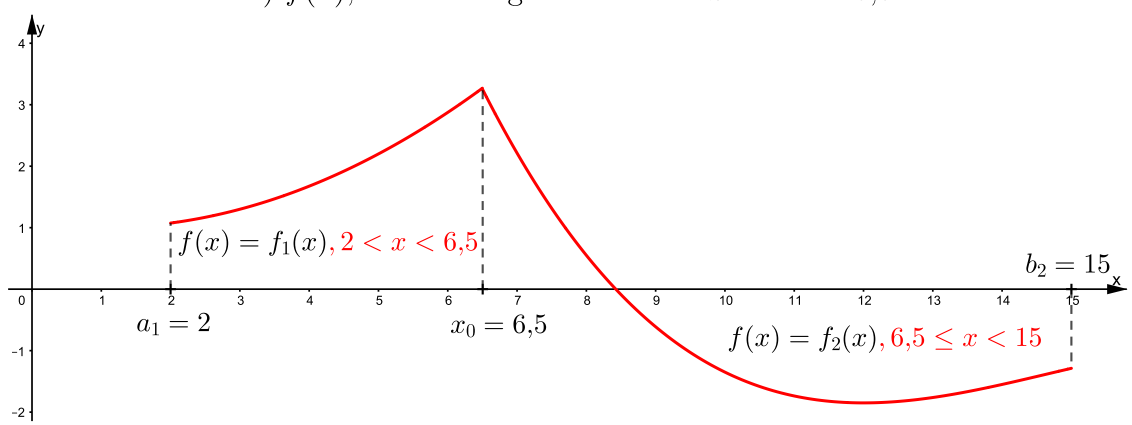
Wir wählen zunächst $x_0 = 7$ und erhalten die an dieser Stelle zusammengesetzte Funktion $f(x)$ aus Abb. 2a. Wählen wir stattdessen $x_0 = 6{,}5$ so erhalten wird die zusammengesetzte Funktion $f(x)$ aus Abb. 2b.

Abbildung 2: Zu Beispiel 2

a) $f(x)$, zusammengesetzt an der Stelle $x = 7$



b) $f(x)$, zusammengesetzt an der Stelle $x = 6{,}5$



2 Sprungfrei zusammengesetzte Funktionen

Wie wir an den Graphen der zusammengesetzten Funktionen in Abb. 2 bereits gesehen haben, gibt es zwei sehr unterschiedliche Typen: Es gibt Funktionen, die an der Verklebestelle einen **Sprung** besitzen, und solche, die an dieser Stelle keinen Sprung haben, also **sprungfrei** sind:

Die Charakterisierung dieser Funktionen ist denkbar einfach:

> **Sprungfreie Funktionen und Funktionen mit Sprung**
>
> Wir sehen uns eine Funktion $f(x)$ an, die an der Stelle x_0 aus den Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zusammengesetzt ist:
>
> $$f(x) = f_1(x) \text{ für } x < x_0 \text{ und } f(x) = f_2(x) \text{ für } x \geq x_0$$
>
> - Diese zusammengesetzte Funktion heißt **sprungfrei**, wenn
>
> $$f_1(x_0) = f_2(x_0)$$
>
>   D. h. die beiden Teilfunktionen haben an der Verklebestelle den gleichen Funktionswert.
>
> - Diese Funktion besitzt einen **Sprung**, wenn
>
> $$f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$$
>
>   D. h. die beiden Teilfunktionen haben an der Verklebestelle unterschiedliche Funktionswerte.

Bemerkung 3.
- Die obige Charakterisierung liefert direkt ein Rechenkriterium zur Entscheidung, ob ein Sprung vorliegt oder nicht, siehe Beispiel 4.
- Ebenso ist die Charakterisierung über die Funktionswerte geeignet, sprungfreie zusammengesetzte Funktionen zu konstruieren, siehe Beispiel 5.

Beispiel 4.
a) $f(x)$ ist an der Stelle $x = -2$ zusammengesetzt aus $f_1(x) = x + 1$ für $x < -2$ und $f_2(x) = 2x + 2$ für $x \geq -2$, also

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{für } x < -2 \\ 2x + 2 & \text{für } x \geq -2 \end{cases}.$$

Es ist $f_1(-2) = -1$ und $f_2(-2) = -2$. Damit hat $f(x)$ einen Sprung, siehe Abb. 3.

b) $g(x)$ ist an der Stelle $x = 1$ zusammengesetzt aus $g_1(x) = -x^3 - 2x^2 + 4x$ für $x \leq< 1$ und $g_2(x) = x^2 - 3x + 3$ für $x > 1$, also

$$g(x) = \begin{cases} -x^3 - 2x^2 + 4x & \text{für } x \leq 1 \\ x^2 - 3x + 3 & \text{für } x > 1 \end{cases}.$$

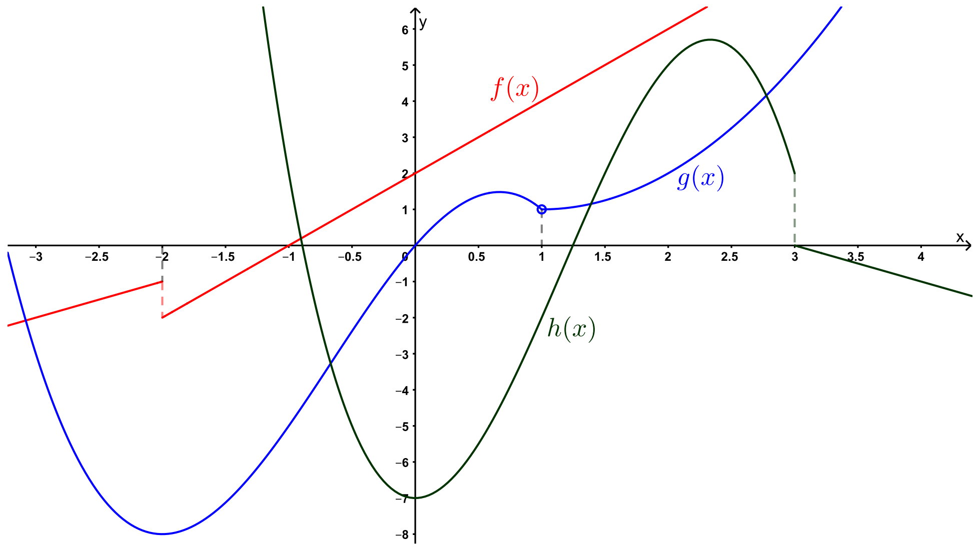
Es ist $g_1(1) = 1$ und $g_2(1) = 1$. Damit ist $g(x)$ sprungfrei, siehe Abb. 3.

c) $h(x)$ ist an der Stelle $x = 3$ zusammengesetzt aus $h_1(x) = -2x^3 + 7x^2 - 7$ für $x < 3$ und $h_2(x) = -x + 3$ für $x \geq 3$, also

$$h(x) = \begin{cases} -2x^3 + 7x^2 - 7 & \text{für } x < 3 \\ -x + 3 & \text{für } x \geq 3 \end{cases}.$$

Es ist $h_1(3) = 2$ und $h_2(2) = 0$. Damit hat $h(x)$ einen Sprung, siehe Abb. 3.

Abbildung 3: Die zusammengesetzten Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ aus Beispiel 4



Beispiel 5. In den folgenden Beispielen sind jeweils zwei Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sowie eine Stelle $x = x_0$ gegeben. In der Beschreibung der Funktionen kommt ein Parameter vor. Dieser soll so gewählt werden, dass die aus $f_1(x)$ und $f_2(x)$ an der Stelle $x = x_0$ zusammengesetzte Funktion sprungfrei ist:

a) $f_1(x) = -x^3 - 3x^2 + 3$ für $x < -2$ und $f_2(x) = ax + 2$ für $x \geq -2$. Für die Sprungfreiheit benötigen wir $f_1(-2) = f_2(-2)$. Es ist

$$f_1(-2) = -1 \quad \text{und} \quad f_2(-2) = -2a + 2$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$-1 = -2a + 2 \iff -3 = -2a \iff \boxed{a = 1{,}5}$$

Das heißt, die Wahl $f_2(x) = 1{,}5x + 2$ gibt eine sprungfreie Funktion $f(x)$, siehe Abb. 4.

b) $f_1(x) = x^2 - ax + 1$ für $x < 2{,}5$ und $f_2(x) = -2x + a$ für $x \geq 2{,}5$. Für die Sprungfreiheit benötigen wir $f_1(2{,}5) = f_2(2{,}5)$. Es ist

$$f_1(2{,}5) = 7{,}25 - 2{,}5a \quad \text{und} \quad f_2(2{,}5) = -5 + a$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

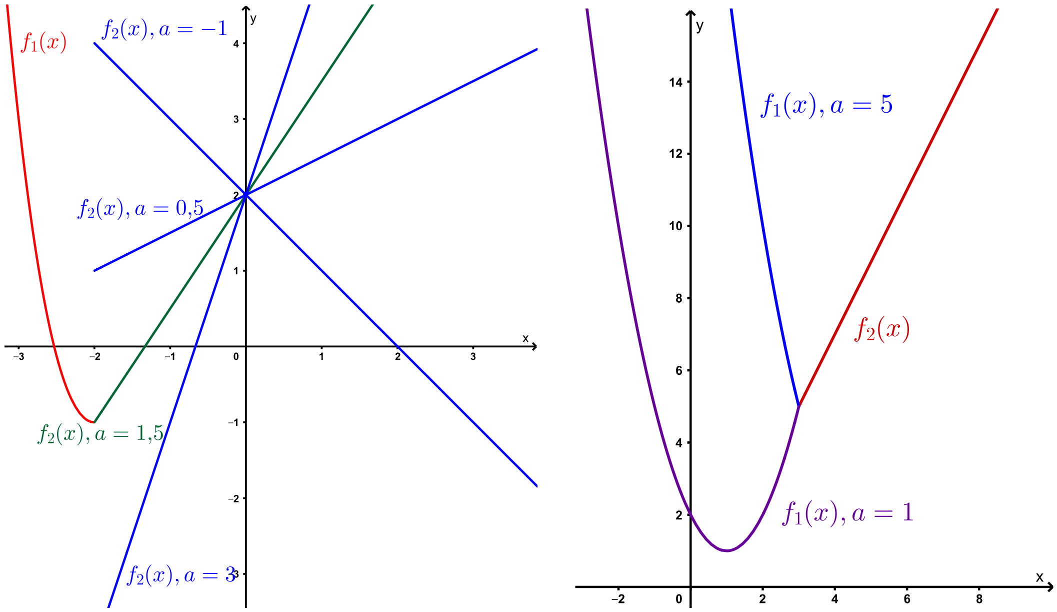
$$7{,}25 - 2{,}5a = -5 + a \iff 12{,}25 = 3{,}5a \iff \boxed{a = 3{,}5}$$

Das heißt, die Wahlen $f_1(x) = x^2 - 3{,}5x + 1$ und $f_2(x) = -2x + 3{,}5$ geben eine sprungfreie Funktion $f(x)$.

Abbildung 4: Einige zusammengesetzte Funktionen aus Beispiel 5

zu a): $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für $a = -1$, $a = 0{,}5$, $a = 1{,}5$ und $a = 3$

zu c): $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für $a = 1$ und $a = 5$



c) $f_1(x) = (x-a)^2 + 2$ für $x < 3$ und $f_2(x) = 2x - 1$ für $x \geq 3$. Für die Sprungfreiheit benötigen wir $f_1(3) = f_2(3)$. Es ist

$$f_1(3) = (3-a)^2 + 1 \text{ und } f_2(3) = 5$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir

$$\begin{aligned}(3-a)^2 + 1 = 5 &\iff (3-a)^2 = 4 \iff 3 - a = 2 \text{ oder } 3 - a = -2 \\ &\iff \boxed{a = 1} \text{ oder } \boxed{a = 5}\end{aligned}$$

In Beispiel c) gibt es also zwei mögliche sprungfreie Lösungen, siehe Abb. 4.