

DIE KEPLERSCHE FASSREGEL UND NUMERISCHE QUADRATURVERFAHREN

FRANK KLINKER

ZUSAMMENFASSUNG. Wir präsentieren hier einen Vorschlag für eine motivierende Einführung in die Volumenberechnung mittels Integralen und in die Theorie der Quadraturformeln. Der Übergang vom ersten zum zweiten Schwerpunkt geschieht dabei mit Hilfe einer ausführlichen Diskussion der Keplerschen Fassregel. Dieser Text richtet sich einerseits an Lehrende im Übergang zwischen Schule und Studium und andererseits an mathematikinteressierte Schülerinnen und Schüler mit Grundkenntnissen im Umgang mit Zahlenfolgen und in der Differentialrechnung.

INHALTSVERZEICHNIS

| | |
|--|----|
| 1. Flächen- und Volumenberechnung mit Hilfe von Integralen | 2 |
| 2. Die Keplersche Fassregel | 11 |
| 3. Interpolation und Interpolationsquadratur | 18 |
| 4. Gaußsche Quadraturformeln | 24 |
| Anhang A. Das Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt | 30 |
| Literatur | 31 |

Kapitel 1 und 2 basieren auf einer erprobten Lerneinheit im Rahmen des Wochenendseminars der Leipziger Schülergesellschaft für Mathematik in Bennewitz, Oktober 2000, [8]. Die aktuelle Version ist die erweiterte Ausarbeitung eines Seminars im Rahmen des Schülerzirkels der Fakultät für Mathematik der TU Dortmund, September 2009.

Email: mail@frank-klinker.de.

1. FLÄCHEN- UND VOLUMENBERECHNUNG MIT HILFE VON INTEGRALEN

Bei einfachen geometrischen Objekten können wir den Flächeninhalt oder das Volumen recht leicht berechnen, zum Beispiel den Flächeninhalt eines Rechteck oder Dreieckes und das Volumen eines Quaders oder einer Pyramide. Schwieriger wird schon die Herleitung einer einfachen Formel zur Bestimmung des Volumens gekrümmter Körper oder des Flächeninhalts gekrümmter Flächen, siehe Tabellen 1 und 2.

Im Folgenden wird eine Methode vorgestellt, die es ermöglicht Flächeninhalte bzw. Volumina komplizierter – aber in ihrer Art immer noch spezieller – geometrischer Objekte zu berechnen. Beschränken wir uns zunächst auf den Fall der Berechnung des Inhalts von Flächen.

| Fläche | Maße | Flächeninhalt |
|----------|--------|-----------------|
| Rechteck | a, b | ab |
| Dreieck | g, h | $\frac{1}{2}gh$ |
| Kreis | r | πr^2 |
| Ellipse | a, b | πab |

TABELLE 1. Bekannte Flächeninhalte

| Körper | Maße | Volumen |
|-----------|-----------|----------------------|
| Quader | a, b, c | abc |
| Prisma | G, h | Gh |
| Pyramide | G, h | $\frac{1}{3}Gh$ |
| Kugel | r | $\frac{4}{3}\pi r^3$ |
| Ellipsoid | a, b, c | $\frac{4}{3}\pi abc$ |

TABELLE 2. Bekannte Volumina

1.1. Flächenberechnung.

Die Objekte unserer Untersuchung in diesem Abschnitt werden Flächen sein, die eine „krumme“ Seite und drei „gerade“ Seiten haben. Genauer betrachten wir eine nicht-negative Funktion

$$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

auf einem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit Werten in den reellen Zahlen \mathbb{R} und schauen uns ihren Graphen in einem Koordinatensystem an, siehe Abbildung 1.

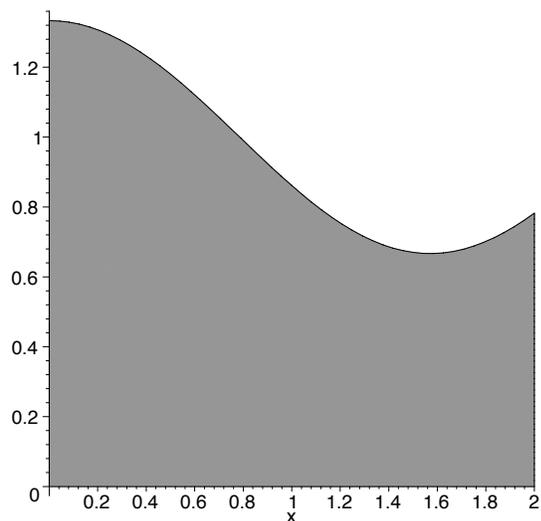


ABBILDUNG 1. Fläche unter einem Graphen

Definition 1.1. Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion. Den Flächeninhalt der Fläche, die von der x -Achse, den Graphen der Geraden $x = a$ und $x = b$ sowie vom Graphen der Funktion $f(x)$ berandet wird bezeichnen wir mit $\mathcal{A}_f(a, b)$, das ist die in Abbildung 1 eingefärbte Fläche.

Bei den Beispielen aus Tabelle 3 kennen wir das entstehende geometrische Objekt und können bekannte Formeln verwenden. Aber wie berechnen wir die Flächeninhalte aus Tabelle 4? Das bereitet uns sogar für die recht einfache Funktion aus der letzten Zeile schon Probleme.

| $f(x)$ | a | b | $\mathcal{A}_f(a, b)$ | |
|--|------|-----|-----------------------|-------------|
| c | 0 | b | bc | Rechteck |
| $\sqrt{a^2 - x^2}$ | $-r$ | r | $\frac{1}{2}\pi r^2$ | Halbkreis |
| $\frac{h}{g}x$ | 0 | g | $\frac{1}{2}gh$ | Dreieck |
| $b\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$ | $-a$ | a | $\frac{1}{2}ab$ | Halbellipse |

TABELLE 3. Die Ränder und Inhalte bekannter Flächen

Idee: Wir zerteilen das Intervall $[a, b]$ in kleinere Stücke, berechnen den Flächeninhalt über den entstehenden kleineren Intervallen und addieren alle Teile auf.

| $f(x)$ | a | b | $\mathcal{A}_f(a, b)$ |
|--------------|-----|-------|-------------------------------------|
| e^x | 0 | 1 | e |
| $\sin(x)$ | 0 | π | 2 |
| $\arctan(x)$ | 0 | 1 | $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$ |
| x^2 | 1 | 3 | $\frac{26}{3}$ |

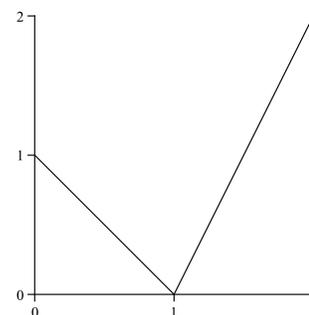
TABELLE 4. Flächeninhalte zu speziellen Rändern

Diese Idee liefert im Fall der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x-2 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

das Ergebnis

$$\mathcal{A}_f(0, 2) = \mathcal{A}_{1-x}(0, 1) + \mathcal{A}_{2x-2}(1, 2) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$



Durch diese Unterteilung in kleinere Flächen wird im Allgemeinen das Problem des einen „krummen“ Randes nicht beseitigt. Schauen wir uns daher die Abbildung 2 an. Eine sehr gute Näherung für den Inhalt dieser Fläche ist zweifellos

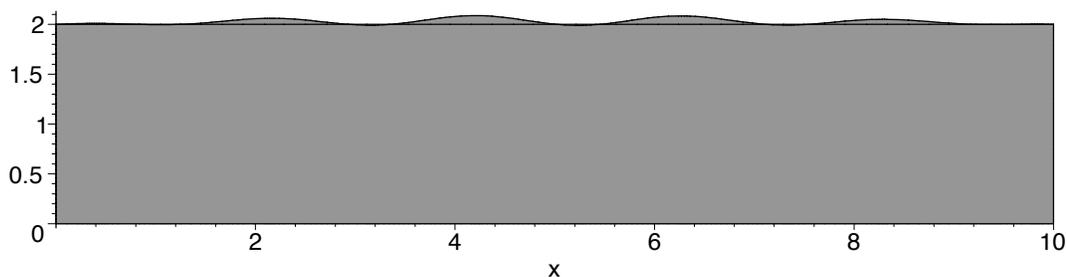


ABBILDUNG 2. Ein Graph mit kleinen Änderungen

$$\mathcal{A} \approx 2 \cdot 10 = 20.$$

Wir haben hier die zu berechnende Fläche durch ein Rechteck ersetzt und dessen Inhalt als Maß für den gesuchten Inhalt benutzt.

Diesen Ansatz verfolgen wir nun weiter. Wir zerlegen unsere Fläche in Teilflächen und für die entstehenden Teile benutzen wir Rechtecke als Näherungen, siehe Abbildung 3 – dabei hätten wir als Höhe der Rechtecke statt des Wertes am Mittelpunkt des Teilintervalls auch den Wert am rechten oder linken Rand nehmen können.

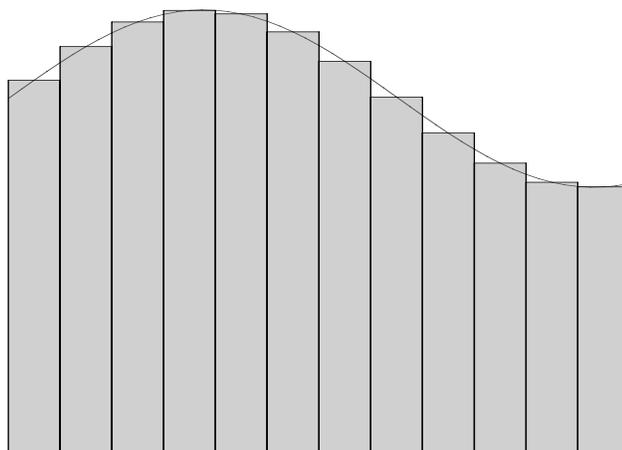


ABBILDUNG 3. Annäherung durch Rechteckflächen

Genauer zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in Teilintervalle

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

mit $x_0 = a$ und $x_n = b$. Die Zerlegung bezeichnen wir auch mit $Z(x_0, \dots, x_n)$ und nennen n die Länge der Zerlegung. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_f(a, b) &= \mathcal{A}_f(x_0, x_1) + \dots + \mathcal{A}_f(x_{n-1}, x_n) \\ &\approx f(x_1)(x_1 - x_0) + \dots + f(x_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Mit $\Delta x_i := x_i - x_{i-1}$ für $i = 1, \dots, n$, nähern wir also

$$\mathcal{A}_f(a, b) \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \quad (1)$$

Aber unser Ziel ist ja nicht eine Näherung – sei sie auch noch so gut – sondern der exakte Wert des gesuchten Flächeninhalts. Daher machen wir die folgende

Überlegung: Wenn man die Zerlegung immer feiner macht, d.h. die Länge der Teilintervalle immer weiter verkleinert, kann man dann erwarten, dass der Fehler, den man bei der Ersetzung des gesuchten Flächeninhalts durch die Rechtecksumme macht, immer kleiner wird?

Die Antwort wird sicher von den Eigenschaften der betrachteten Funktion f abhängig sein. Aber beschränken wir uns hier auf „schöne“ Funktionenⁱ, dann liefert die Anschauung die Antwort

Ja!

Wir wollen diese Behauptung hier nicht weiter formalisieren oder gar beweisen, sondern uns das Verfahren an einem Beispiel verdeutlichen.

ⁱ Zu den „schönen“ Funktionen gehören insbesondere die stetigen Funktionen, auf die wir uns ab jetzt beschränken.

Beispiel 1.2. Auf dem Intervall $[a, b]$ betrachten wir die Funktion

$$f(x) = x^2$$

und für das Intervall die äquidistante Zerlegung der Länge n

$$Z\left(a, a + \frac{b-a}{n}, a + 2\frac{b-a}{n}, \dots, a + (n-1)\frac{b-a}{n}, b\right).$$

Wir haben also

$$x_i = a + i \frac{b-a}{n} \quad \text{für } i = 0, \dots, n$$

und berechnen

$$f(x_i) = x_i^2 = \left(a + i \frac{b-a}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{2a(b-a)}{n}i + \frac{(b-a)^2}{n^2}i^2$$

sowie

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x_i - a - (i-1)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{x^2}(a, b) &\approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i \\ &\approx \sum_{i=1}^n \left(a^2 + \frac{2a(b-a)}{n}i + \frac{(b-a)^2}{n^2}i^2 \right) \frac{b-a}{n} \\ &\approx \frac{a^2(b-a)}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{2a(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{(b-a)^3}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 \\ &\approx a^2(b-a) + \frac{2a(b-a)^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(b-a)^3}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\ &\approx a^2(b-a) + a(b-a)^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^3}{3} \left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right) \\ &\approx \frac{b^3 - a^3}{3} - \frac{(a+b)(b-a)^2}{2n} + \frac{(b-a)^3}{6n^2}. \end{aligned}$$

In diesem letzten Ausdruck lassen wir nun die Zerlegung immer feiner werden und schauen uns das Ergebnis an. Wir bilden also den Grenzwert der rechten Seite für große n . Dabei nutzen wir insbesondere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Das liefert dann

$$\mathcal{A}_{x^2}(a, b) \approx \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{3}a^3.$$

Für $a = 1$ und $b = 3$ ergibt sich der Wert der letzten Zeile von Tabelle 4, nämlich $\frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \frac{26}{3}$. Aber ist das wirklich der exakte Flächeninhalt?

- Bemerkungen 1.3.**
1. Bei der Grenzwertbildung durch immer weitere Verfeinerung der Zerlegung beschränkt man sich in der Regel nicht auf äquidistante Zerlegungen.
 2. Punkt 1. sagt uns allerdings nicht, ob dieser Grenzwert, falls er existiert, etwas mit dem gesuchten Flächeninhalt $\mathcal{A}_f(a, b)$ zu tun hat.
 3. An der Formel für das Integral von $f(x) = x^2$ in den Grenzen von a bis b aus dem obigen Beispiel fällt Folgendes auf: Die Funktion $g(x) = \frac{1}{3}x^3$ erfüllt neben $\mathcal{A}_f(a, b) \approx g(b) - g(a)$ außerdem die Identität $g'(x) = f(x)$.
 4. So eine Funktion aus Punkt 3. ist eindeutig bis auf eine additive Konstante. D.h. ist $g(x)$ eine Funktion mit $g'(x) = f(x)$, so ist jede andere Funktion mit eben dieser Eigenschaft von der Form $\tilde{g}(x) = g(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Die Punkte 1. und 3. motivieren die folgenden zwei Definitionen.

Definition 1.4. Existiert der Grenzwert der Summe auf der rechten Seite von (1) für beliebige Zerlegungen und liefert immer den gleichen Wert, so macht man das in einer neuen Schreibweise deutlich:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\text{Zerlegungen} \\ \text{von } [a, b]}} \sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i.$$

Die linke Seite liest man als „Integral von f in den Grenzen von a bis b “.

Definition 1.5. Ist $f(x)$ eine Funktion, dann nennt man eine Funktion $g(x)$ mit $g'(x) = f(x)$ eine Stammfunktion zu f .

Die Punkte 1. bis 3. aus der vorigen Bemerkung zusammen mit den beiden letzten Definitionen gipfeln in dem folgenden Satz.

Satz 1.6 (Flächensatz). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion und $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f also $g'(x) = f(x)$. Dann sind der Flächeninhalt $\mathcal{A}_f(a, b)$ und das Integral $\int_a^b f(x)dx$ verbunden über*

$$\mathcal{A}_f(a, b) = \int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a).$$

Bemerkungen 1.7.

1. Die obige Konstruktion und damit der Satz 1.6 besitzt eine Verallgemeinerung auf Funktionen mit auch negativem Wertebereich und heißt dann *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*, siehe z.B. [6, 79.1].

Man kann den Wert $\int_a^b f(x)dx$ dann jedoch nicht mehr ohne weiteres als Flächeninhalt interpretieren.

2. In der Regel ist es schwer eine Stammfunktion $g(x)$ zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ zu finden und oft ist dies in einer geschlossenen Form auch gar nicht möglich, so z.B. für die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$. Das ist die so genannte Gaußsche Glockenkurve, deren Graph auf dem 10 DM Schein abgebildet war, siehe Abbildung 4.



ABBILDUNG 4. Der 10 DM Schein der Jahre 1990-2001

Mit dieser Bemerkung ist die kleine Einführung in die Flächenberechnung abgeschlossen. Uns geht es hier nicht um die Einführung der Integralrechnung und insbesondere nicht um die Rechenregeln, die notwendig sind, um zu vorgegebenen Funktionen Stammfunktionen zu finden. Vielmehr sollte nur der konstruktive Ansatz erläutert werden, der die Flächenberechnung mit der Integralrechnung verbindet. Auf diesen Ansatz aufbauend wenden wir uns nun der Volumenberechnung zu.

1.2. Volumenberechnung.

Wie bei den Flächen werden wir uns auch bei den Körpern auf verhältnismäßig spezielle Körperformen beschränken – den sogenannten Rotationskörpern. Diese denken wir uns erzeugt durch die Rotation des Graphen einer nicht-negativen Funktion

$$f[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

um die x -Achse, siehe Abbildung 5. Man nennt die Funktion, bzw. ihren Graphen, dann auch die Erzeugende des Rotationskörpers.

Definition 1.8. Das Volumen des Rotationskörpers mit erzeugender Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{V}_f(a, b)$.

Die Idee zur Bestimmung von $\mathcal{V}_f(a, b)$ leihen wir uns von der Flächenberechnung: Wir nutzen einfachere geometrische Objekte zur Näherung des gesuchten Wertes und

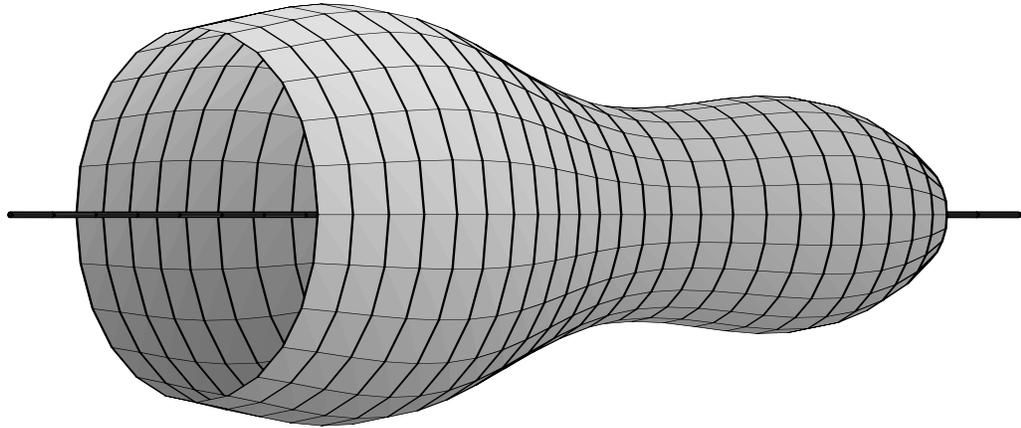


ABBILDUNG 5. Ein Rotationskörper

„optimieren“ diesen durch einen Grenzprozess. Die geometrischen Objekte sind hier Zylinder. Wir wählen eine Zerlegung $Z(x_0, \dots, x_n)$ des Intervalls $[a, b]$ und lassen die gemäß des Verfahrens des vorherigen Abschnitts entstehenden Rechtecke um die x -Achse rotieren, siehe Abbildung 6. Dann bestimmen wir ihr Volumen und nutzen die Summe aller Zylindervolumina als Näherungswert für das Volumen des Rotationskörpers.

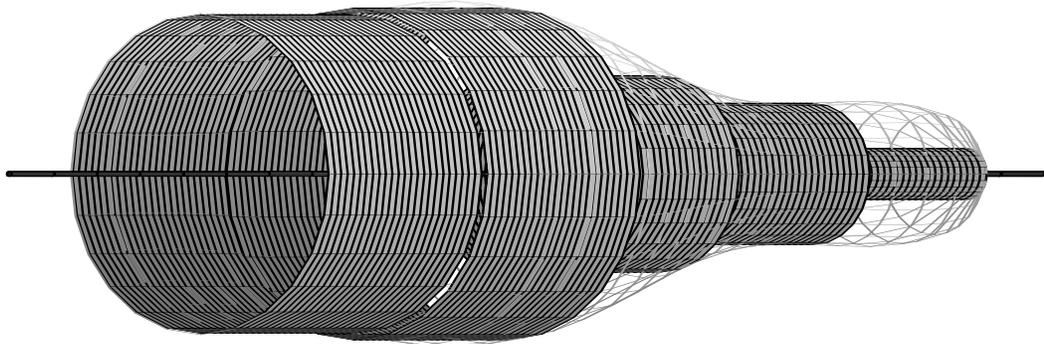


ABBILDUNG 6. Annäherung durch Zylinder

Analog zu den Flächen erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_f(a, b) &= \mathcal{V}_f(a, b) + \dots + \mathcal{V}_f(a, b) \\
 &\approx \pi(f(x_1))^2(x_1 - x_0) + \dots + \pi(f(x_n))^2(x_n - x_{n-1}) \\
 &\approx \pi(f(x_1))^2\Delta x_1 + \dots + \pi(f(x_n))^2\Delta x_n \\
 &\approx \pi \sum_{i=1}^n f^2(x_i)\Delta x_i
 \end{aligned}$$

Es fällt auf, dass dieser Ausdruck fast so aussieht wie der entsprechende Term bei der Flächenberechnung. Bevor wir dieses aber vertiefen, wollen wir den nun noch durchzuführenden Grenzprozess zur Berechnung des Volumens wieder an einem Beispiel deutlich machen. Wir wählen hier zur Illustration ein uns schon bekanntes Beispiel, nämlich die Halbkugel mit Radius r , deren Volumen $\frac{2}{3}\pi r^3$ ist.

Beispiel 1.9. Zur Berechnung der Halbkugel wählen wir die Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

auf dem Intervall $[0, r]$ und dazu eine äquidistante Zerlegung der Länge n :

$$Z \left(0, \frac{r}{n}, \frac{2r}{n}, \dots, \frac{(n-1)r}{n}, r \right).$$

Damit gilt dann $x_i = \frac{ir}{n}$ für $0 \leq i \leq n$ sowie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{r}{n}$ für $1 \leq i \leq n$ und somit

$$f^2(x_i) = (\sqrt{r^2 - x_i^2})^2 = r^2 - \left(\frac{ir}{n}\right)^2 = r^2 \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right).$$

Für den Näherungswert gilt dann

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\sqrt{r^2-x^2}}(0, r) &\approx \pi \sum_{i=1}^n f^2(x_i) \Delta x_i \approx \pi \sum_{i=0}^n r^2 \left(1 - \frac{i^2}{n^2}\right) \frac{r}{n} \\ &\approx \pi r^3 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=0}^n 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=0}^n i^2 \right) \approx \pi r^3 \left(1 - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \right) \\ &\approx \pi r^3 \left(1 - \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6n^3} \right) \approx \pi r^3 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right) \\ &\approx \pi r^3 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{6n^2} \right). \end{aligned}$$

Wir machen wieder den Grenzprozess $n \rightarrow \infty$, nutzen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ und erhalten als Wert das Volumen der Halbkugel, nämlich wie erwartet

$$\mathcal{V}_{\sqrt{r^2-x^2}}(0, r) = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

Wir haben in diesem Beispiel also wieder den Grenzwert der Summe über die Zerlegungen berechnet. Nur wurden diesmal nicht die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ summiert, sondern die Funktionswerte der Funktion $f^2(x)$. Somit liefert der Flächensatz (1.6) direkt die folgenden Aussage.

Satz 1.10 (Volumensatz). *Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-negative Funktion. Dann gilt für das Volumen $\mathcal{V}_f(a, b)$ des Körpers, der bei der Rotation des Graphen von f um die x -Achse entsteht*

$$\mathcal{V}_f(a, b) = \pi \mathcal{A}_{f^2}(a, b) = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Ist $\tilde{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f^2 , also $\tilde{g}'(x) = f^2(x)$, so gilt

$$\mathcal{V}_f(a, b) = \pi(\tilde{g}(b) - \tilde{g}(a)).$$

Beispiel 1.11. Für das Volumen der Halbkugel brauchten wir also „nur“ das Quadrat der Funktion $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, also $f^2(x) = r^2 - x^2$, in den Grenzen von 0 bis r zu integrieren. Wie man durch Ableiten sofort sieht, ist $\tilde{g}(x) = r^2x - \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion zu $f^2(x)$. Mit dem zweiten Teil des Volumensatzes gilt

$$\mathcal{V}_{\sqrt{r^2-x^2}}(0, r) = \pi(\tilde{g}(r) - \tilde{g}(0)) = \pi\left(r^2r - \frac{1}{3}r^3 - 0\right) = \frac{2}{3}\pi r^3$$

und das ist abermals der bekannte Wert.

2. DIE KEPLERSCHE FASSREGEL

Das Verfahren, mit dem zu Anfang des siebzehnten Jahrhunderts die Volumina von Fässern bestimmt wurden, ist das Messverfahren mittels Visierrute. Die Visierrute ist ein Stab mit einer Skala, auf der die entsprechenden Volumeneinheiten markiert sind. Dieser Stab wird durch das in der Mitte einer Fassdaube befindliche Spundloch schräg nach unten bis zum Anschlag an der gegenüberliegenden Daube eingeführt. An der Markierung wird nun der Inhalt des Fasses abgelesen, siehe Abbildung 7.

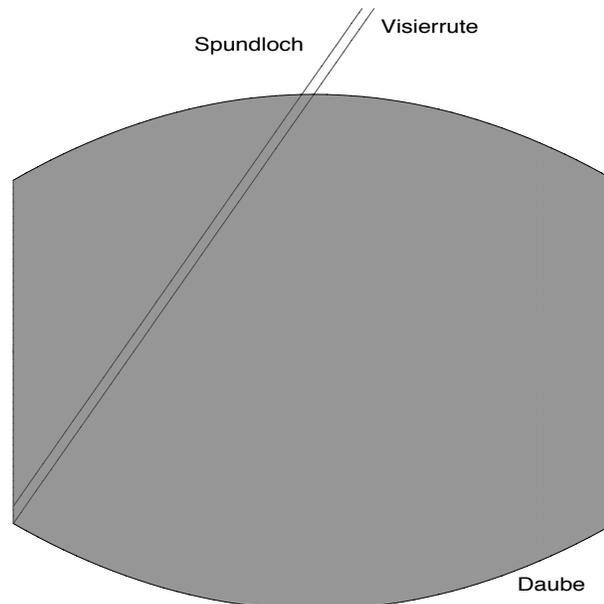


ABBILDUNG 7. Messen mittels Visierrute

Bei diesem Messverfahren wird die Geometrie des Fasses nicht berücksichtigt. Genau dieser Umstand war es, der Kepler zu einer mathematischen Analyse veranlasste. Dass

die fehlende Berücksichtigung der Fassformen zu Ungenauigkeiten in der Volumenbestimmung führt, zeigt die Abbildung 8. Wie wir in der Tabelle 5 ausrechnen, ist das Volumen des rechten Fasses ($h = 4.2, r = 1.0, R = 2.4$) größer als das des linken ($h = 4.2, r = 1.6, R = 1.8$). Man beachte, dass die Visierlänge d bei beiden Fässern die Gleiche ist, denn es gilt die Gleichung

$$d^2 = \frac{h^2}{4} + (R + r)^2.$$

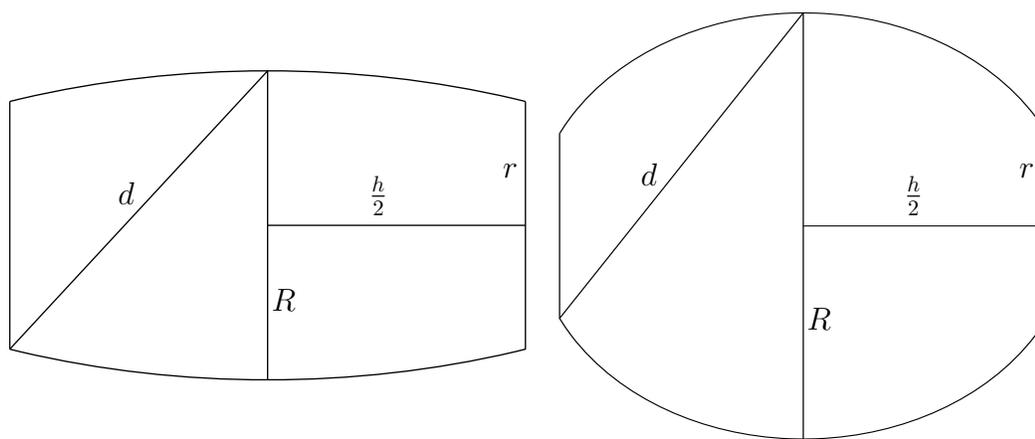


ABBILDUNG 8. Verschiedene Fassformen

In diesem Abschnitt werden wir die Idee Keplers zur Herleitung „seiner“ Formel zur Bestimmung von Fassvolumina – die Keplersche Fassregel – erläutern und wir werden diese Herleitung nachvollziehen. Dann werden wir ihre Genauigkeit überprüfen, indem wir anhand verschiedener Fassformen deren exaktes Volumen, das wir gemäß des vorigen Abschnitts berechnen können, mit den Werten der Keplerschen Näherung vergleichen werden.

Die Idee Keplers ist es, das Fass durch zwei Kegelstümpfe zu ersetzen, die längs der gemeinsamen Grundfläche zusammengesetzt werden, siehe Abbildung 9. Das Volumen eines Kegelstumpfes mit oberem Radius r , unterem Radius R und Höhe h ist

$$\mathcal{V}_{\text{KS}} = \frac{\pi}{3} R^2 \left(h + \frac{hr}{R-r} \right) - \frac{\pi}{3} r^2 \frac{hr}{R-r} = \frac{\pi}{3} h \frac{R^3 - r^3}{R-r} = \frac{\pi}{3} h (R^2 + Rr + r^2),$$

und damit ergibt sich das Fassvolumen des Fasses mit äußerem Radius r , innerem Radius R und Höhe h näherungsweise zu

$$\mathcal{V}_{\text{Fass}} \approx 2\mathcal{V}_{\text{KS}} = \frac{2\pi}{3} h (R^2 + Rr + r^2).$$

Der Wert auf der rechten Seite ist gemäß Konstruktion kleiner als das gesuchte. Deshalb vergrößern wir diesen Wert, indem wir das Produkt rR durch das größere Produkt R^2 ersetzen. Das verkleinert in der Regel den Fehler, den man bei der Näherung des

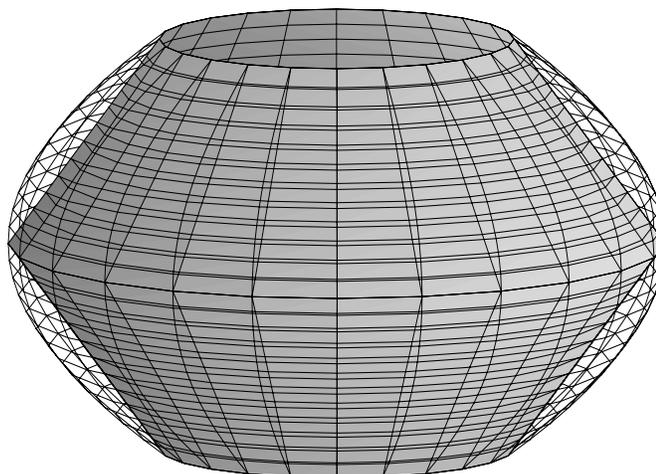


ABBILDUNG 9. Annäherung durch Kegelstümpfe

(bauchigen) Fasses durch die Kegelstümpfe macht. Wir bekommen also als Näherung für das Fassvolumen die

Keplersche Fassregel 2.1.

$$\mathcal{V}_{\text{Fass}} \approx \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2).$$

Betrachten wir das Fass als Rotationkörper mit erzeugender Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, so ist $f(a) = r = f(b)$ und $f(\frac{a+b}{2}) = R$ sowie $b - a = h$. In seinem Buch *Neue Stereometrie der Fässer* [7, S. 46] wählte Kepler als Erzeugende des Fasses Teile von Kegelschnitten. Dieser Begriff umfasst Kreise, Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln, siehe Abbildung 10. Er wählte dabei speziell Hyperbeln, da diese zum Rand des Fasses am schnellsten

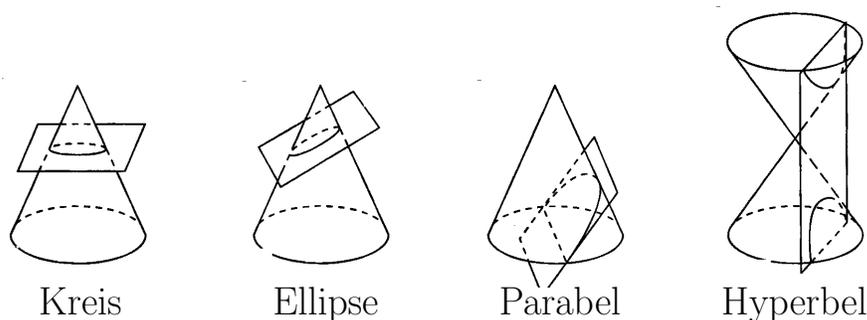


ABBILDUNG 10. Kegelschnitte

abflachen, und somit die Fassringe gut befestigt werden können, siehe [7, S 46]. Diese Form entspricht jedoch nicht nicht einem realistischen Fass. Bei diesen werden die

einzelnen Daubenbretter konisch geschnitten und dann mit Hilfe der Ringeisen in Form gezwungen. Bei der industriellen Fertigung werden alle für das Fass benötigten Dauben gemeinsam mit Hilfe einer sogenannten Glockenpresse zu einem Fass gebogen. Dabei entsteht ein allgemeiner Biegekörper statt eines Kegelschnitts. Für mehr Details zum Biegen von Holz und zur praktischen Fassherstellung siehe [5].

Nehmen wir an, dass sich die Daube wie ein ideales Biegeteil verhält, und das Biegen geschieht, indem man die Mitte der Daube fixiert und die beiden Enden mit einer konstanten Kraft senkrecht zur Materialachse versieht. Dann verhält sich die Krümmung der Kurve, der das Biegeteil folgt, idealerweise umgekehrt proportional zum Abstand vom Kraftansatzpunkt, siehe z.B. [3, S. 122]. Die Kurve mit dieser Eigenschaft heißt Klothoide. Beide Hälften der Daube verhalten sich somit wie Teile einer solchen Klothoide – jeweils der rote und blaue Kurventeil in Abbildung 11. Das Fass erhält man dann nach Rotation um die schwarze Achse wobei die Radien jeweils in Grün eingefügt sind.

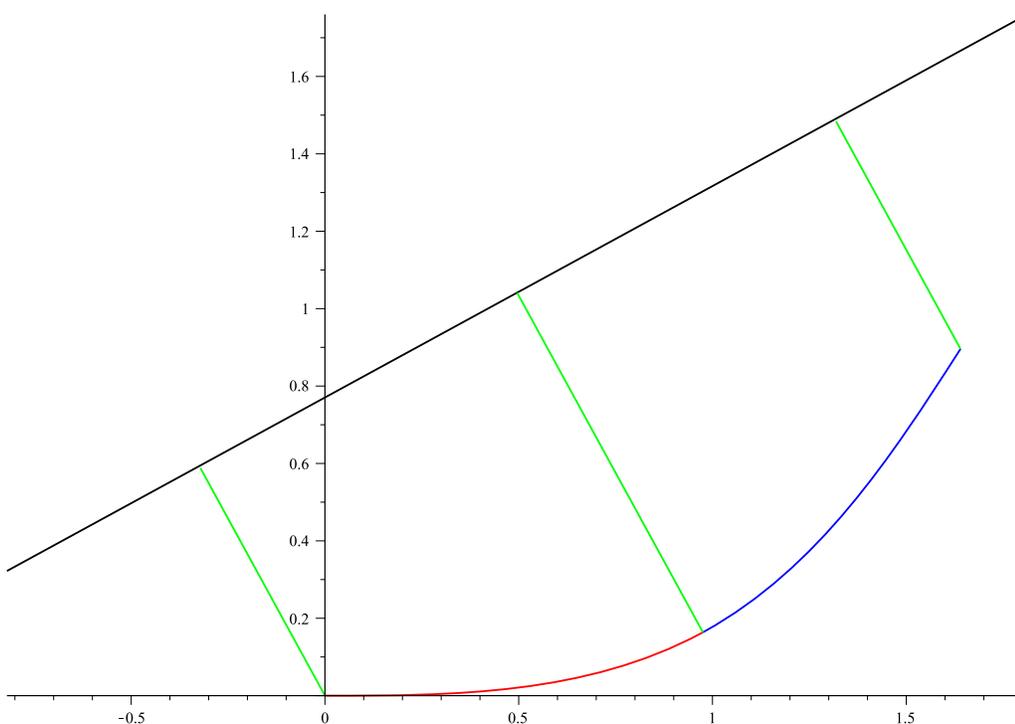


ABBILDUNG 11. Fassdauben als Klothoidenabschnitte

Da Holz in der Regel nicht die Eigenschaft eines idealen Biegeteils besitzt, sondern sich die Zugspannungen wesentlich stärker auswirken als die Schubspannungen, benutzt man zum Biegen Zugbänder. Das verschiebt die neutrale Faser im Material in Richtung

des Bandes, so dass Zugspannungen nicht so starke Auswirkungen auf die Verformung haben, und somit ein frühes Reißen des Holzes vermieden werden kann.

Um die Genauigkeit der Keplerschen Fassregel zu überprüfen, betrachten wir einige Fassformen, bei denen die Zugbänder Teile von Ellipsen und Kreisen sind.

Dazu betrachten zunächst ein sehr spezielles Fass. Es entsteht aus einem Ellipsoiden, an dem man oben und unten senkrecht zur Symmetrieachse jeweils einen Schnitt durchgeführt hat, siehe Abbildung 12. Das heißt, die Erzeugende ist der obere Ellipsenbogen.

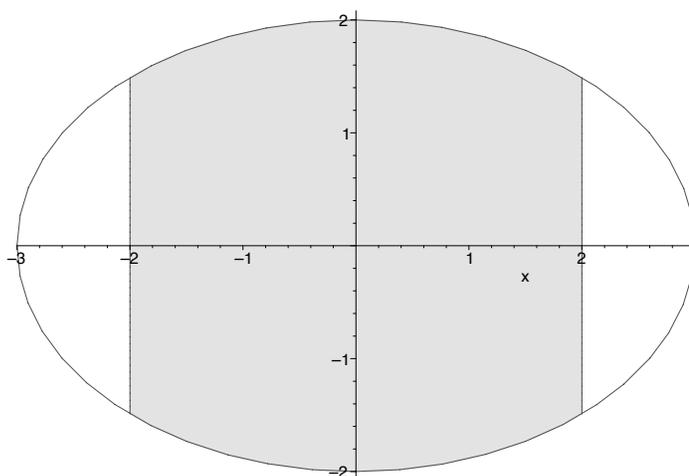


ABBILDUNG 12. Fassdauben als Ellipsenabschnitte

Die Gleichung einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und den Halbachsen α und β hat stets die Gestalt

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{x^2}{\beta^2} = 1.$$

Die Funktion dessen Graph den oberen Teil der Ellipse beschreibt, erhält man durch Auflösen der obigen Gleichung nach y und Nutzen des positiven Vorzeichens

$$f(x) = \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{\beta^2}}.$$

Die Funktion ist dann auf dem dem Intervall $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ definiert. Die Halbachsen α und β sind von den Maßen des Fasses abhängig und berechnen sich in unserem Fall aus den Bedingungen $f(\frac{h}{2}) = r$ und $f(0) = R$. Das bedeutet

$$\begin{aligned} f(0) &= \alpha = R, \\ f\left(\frac{h}{2}\right) &= \alpha \sqrt{1 - \frac{h^2}{4\beta^2}} = r. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung liefert sofort $\alpha = R$ und die zweite liefert damit

$$R^2 - \frac{R^2 h^2}{4\beta^2} = r^2 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{4\beta^2} = \frac{R^2 - r^2}{h^2 R^2} \quad \text{oder} \quad \beta^2 = \frac{R^2}{R^2 - r^2} \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

Somit gilt für die Erzeugende

$$f(x) = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 - r^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} x^2}$$

Das exakte Volumen des so entstandenen Fasses bestimmen wir nun mit Hilfe von Satz 1.10. Wir müssen also den Wert

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{Fass}} &= \mathcal{V}_f\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right) = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^2(x) dx \\ &= \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(R^2 - \frac{R^2 - r^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} x^2 \right) dx \end{aligned}$$

berechnen. Wie man durch Ableiten erkennt ist $\tilde{g}(x)$ mit

$$\tilde{g}(x) = R^2 x - \frac{1}{3} \frac{R^2 - r^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} x^3$$

eine Stammfunktion zu $f^2(x)$, so dass sich wegen des zweiten Teils von Satz 1.10 das Volumen des Fasses zu

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{Fass}} &= \pi \left(\tilde{g}\left(\frac{h}{2}\right) - \tilde{g}\left(-\frac{h}{2}\right) \right) = 2\pi \tilde{g}\left(\frac{h}{2}\right) \\ &= 2\pi \left(R^2 \frac{h}{2} - \frac{1}{3} \frac{R^2 - r^2}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} \left(\frac{h}{2}\right)^3 \right) \\ &= 2\pi \left(R^2 \frac{h}{2} - \frac{1}{3} (R^2 - r^2) \frac{h}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \pi h (2R^2 + r^2) \end{aligned}$$

ergibt. Wie man also sieht, ist die Keplersche Fassregel für diese Fassform exakt.

Als weiteres Beispiel nehmen wir an, dass Dauben mithilfe eines Zugbandes in Form von Kreisabschnitten hergestellt wurden, zur Erläuterung siehe Abbildung 13.

Die Kreisgleichung eines Kreises mit Mittelpunkt (m, n) und Radius ρ ist

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = \rho^2.$$

Wie aus der Abbildung 13 ersichtlich ist, hat unser Kreis den Mittelpunkt $(m = 0, n = -(\rho - R))$ und unsere Kreisgleichung wird zu

$$x^2 + (y + (\rho - R))^2 = \rho^2.$$

Lösen wir das nach y auf und nutzen das positive Vorzeichen, also

$$(y + (\rho - R))^2 = \rho^2 - x^2 \quad \text{oder} \quad y + (\rho - R) = \sqrt{\rho^2 - x^2},$$

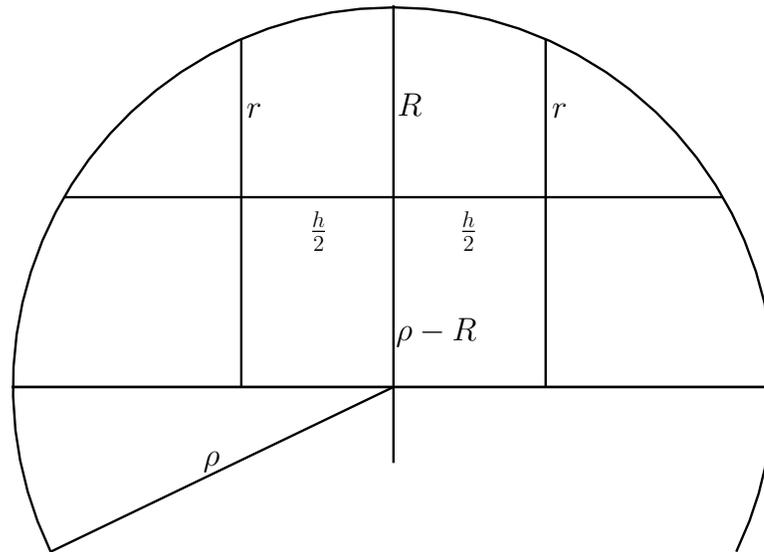


ABBILDUNG 13. Fassdauben als Kreisabschnitte

so erhalten wir die Erzeugende des Fasses

$$f(x) = \sqrt{\rho^2 - x^2} - (\rho - R).$$

Aus der Bedingung $f(\frac{h}{2}) = r$ bekommen wir

$$\sqrt{\rho^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} - (\rho - R) = r$$

und somit den fehlenden Radius

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} &= \rho + (r - R) \\ \rho^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 &= (\rho + (r - R))^2 \\ \rho^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 &= \rho^2 + 2(r - R)\rho + (r - R)^2 \\ \left(\frac{h}{2}\right)^2 &= 2\rho(R - r) - (R - r)^2 \\ \frac{(R - r)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2(R - r)} &= \rho. \end{aligned}$$

Um die Formeln nicht allzu unübersichtlich werden zu lassen, werden wir diesen Wert nicht mehr in f einsetzen, sondern werden die Abkürzung ρ beibehalten. Da wir zur Bestimmung des Volumens des Fasses gemäß Satz 1.10 das Quadrat von $f(x)$ benötigen

berechnen wir das zuerst:

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left(\sqrt{\rho^2 - x^2} - (\rho - R) \right)^2 \\ &= \rho^2 - x^2 - 2(\rho - R)\sqrt{\rho^2 - x^2} + (\rho - R)^2 \\ &= (\rho^2 + (\rho - R)^2) - x^2 - 2(\rho - R)\sqrt{\rho^2 - x^2}. \end{aligned}$$

Wie man durch Ableiten nachprüft ist

$$\tilde{g}(x) = (\rho^2 + (\rho - R)^2)x - \frac{1}{3}x^3 - (\rho - R) \left(x\sqrt{\rho^2 - x^2} + \rho^2 \arcsin \left(\frac{x}{\rho} \right) \right)$$

eine Stammfunktion zu $f^2(x) = (\rho^2 + (\rho - R)^2) - x^2 - 2(\rho - R)\sqrt{\rho^2 - x^2}$. Damit können wir nach Satz 1.10 rechnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\text{Fass}} &= \mathcal{V}_f \left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \right) = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f^2(x) dx \\ &= \pi \left(\tilde{g} \left(\frac{h}{2} \right) - \tilde{g} \left(-\frac{h}{2} \right) \right) = 2\pi \tilde{g} \left(\frac{h}{2} \right) \\ &= \pi (\rho^2 + (\rho - R)^2)h - \frac{\pi}{12}h^3 - \pi(\rho - R) \left(h\sqrt{\rho^2 - \frac{h^2}{4}} + 2\rho^2 \arcsin \left(\frac{h}{2\rho} \right) \right) \end{aligned}$$

mit $\rho = \frac{(R-r)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2(R-r)}$.

Diesem Ausdruck sieht man nun nicht mehr direkt an, ob die Keplersche Fassregel hier eine gute Näherung ist. Um das zu überprüfen, werden wir exemplarisch für einige Fassmaße (h, r, R) den obigen exakten Wert $\mathcal{V}_{\text{Fass}}$ mit dem Wert der Näherung $\mathcal{V}_{\text{Kepler}} = \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2)$ vergleichen, siehe Tabelle 5.

Anhand dieser Werte sehen wir, dass die Anwendung der Keplerschen Fassregel als Näherungsformel zur Berechnung von Fassvolumen zumindest nicht unbegründet ist.

3. INTERPOLATION UND INTERPOLATIONSQUADRATUR

Wie sind wir bei der Herleitung der Keplerschen Fassregel vorgegangen?

Wir haben einen krummen Rand – den Fassrand – durch einen neuen einfacheren ersetzt – Kegelstümpfe – und dann das einfacherer Volumen berechnet. Da dieses Volumen kleiner ist als das eigentlich gesuchte, haben wir den zu kleinen Wert noch nach oben abgeschätzt. Das Ergebnis war die Keplersche Fassregel 2.1.

Das Volumen eines Fasses mit Höhe h , Innenradius R und Außenradius r ist näherungsweise gegeben durch

$$\mathcal{V}_{\text{Fass}}(h, R, r) \approx \pi \frac{h}{3} (2R^2 + r^2). \quad (2)$$

| h | r | R | ρ | $\mathcal{V}_{\text{Fass}}$ | $\mathcal{V}_{\text{Kepler}}$ |
|-------|------|------|--------|-----------------------------|-------------------------------|
| 4.20 | 1.60 | 1.80 | 11.13 | 40 | 40 |
| 4.20 | 1.00 | 2.40 | 2.28 | 55 | 55 |
| 4.80 | 2.40 | 3.60 | 7.27 | 160 | 159 |
| 4.00 | 3.00 | 4.00 | 2.50 | 173 | 172 |
| 5.60 | 2.00 | 4.00 | 2.96 | 207 | 211 |
| 6.40 | 3.00 | 3.60 | 8.83 | 233 | 234 |
| 8.00 | 2.00 | 4.00 | 5.00 | 298 | 302 |
| 9.60 | 2.00 | 4.00 | 6.76 | 354 | 362 |
| 12.00 | 4.00 | 8.00 | 6.50 | 1835 | 1810 |
| 20.00 | 6.00 | 9.00 | 18.17 | 4106 | 4147 |

TABELLE 5. Vergleichswerte $\mathcal{V}_{\text{Fass}}$ und $\mathcal{V}_{\text{Kepler}}$

Wir haben gesehen, dass die Formel exakt ist für Fässer, die als „geknappte Ellipsoide“ hergestellt werden. Für realistische Fasskonstruktionen, bei denen die Dauben Kreissegmente sind, war die Näherung nicht exakt, jedoch sehr gut.

Wir wollen nun das Verfahren der nährungsweisen Berechnung von Integralen – insbesondere also zur Bestimmung von Flächeninhalten oder Volumina – genauer beleuchten.

3.1. Interpolationsquadratur.

Nehmen wir an, dass das Fass durch Rotation des Graphen einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ um die x -Achse erzeugt wird. Bei uns lief dieser Graph dann durch die Punkte $(-\frac{h}{2}, r)$, $(0, R)$, und $(\frac{h}{2}, r)$. Das Volumen erhielten wir dann, indem wir die Fläche unter dem Graphen zu $f^2(x)$ mit π multipliziert haben.

Wie wir gleich sehen werden, haben wir zum Erhalt der Keplerschen Fassregel eigentlich das Folgende gemacht:

Wir haben den Graphen von $f^2(x)$, der durch die Punkte $(-\frac{h}{2}, r^2)$, $(0, R^2)$, und $(\frac{h}{2}, r^2)$ verläuft durch den Graphen des eindeutigen(!) quadratischen Polynoms durch eben diese Punkte ersetzt. Die Berechnung des Inhalts der Fläche unter dessen Graphen liefert dann die Keplersche Fassregel.

Das quadratische Polynom durch die drei Punkte $(-\frac{h}{2}, r^2)$, $(0, R^2)$ und $(\frac{h}{2}, r^2)$ ist durch

$$p(x) = \frac{4}{h^2}(r^2 - R^2)x^2 + R^2$$

gegeben. Eine Stammfunktion von p ist $q(x) = \frac{4}{3h^2}(r^2 - R^2)x^3 + R^2x$ und der Flächeninhalt unter dem Graphen von p ist damit

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} p(x)dx = \left[\frac{4}{3h^2}(r^2 - R^2)x^3 + R^2x \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{h}{3}(2R^2 + r^2)$$

und stimmt mit (2) überein.

Verallgemeinerung: Wir schauen uns die obige Situation nun etwas allgemeiner an. Es sei dazu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eineⁱⁱ Funktion und $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ der Länge zwei. Es seien weiter $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$ und $f(x_2) = y_2$ die Funktionswerte an den Stellen dieser Zerlegung. Dann ist das eindeutigeⁱⁱⁱ quadratische Polynom durch die Punkte (x_0, y_0) , (x_1, y_1) und (x_2, y_2) durch

$$p(x) = y_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \quad (3)$$

gegeben. Wählt man die Zerlegung äquidistant, also $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 =: h$ oder $x_i = x_0 + ih$, so wird das Polynom zu

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{2h^2} \left(y_0(x - x_0 - h)(x - x_0 - 2h) - 2y_1(x - x_0)(x - x_0 - 2h) \right. \\ &\quad \left. + y_2(x - x_0)(x - x_0 - h) \right) \\ &= \frac{1}{2h^2} \left((x - x_0)^2(y_0 - 2y_1 + y_2) - h(x - x_0)(3y_0 - 4y_1 + y_2) + 2h^2y_0 \right). \end{aligned}$$

Integriert man das nun von x_0 bis x_2 so liefert das

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_0+2h} p(x)dx \\ &= \frac{1}{2h^2} \left[\frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{3}(x - x_0)^3 - \frac{h(3y_0 - 4y_1 + y_2)}{2}(x - x_0)^2 + 2h^2y_0x \right]_{x_0}^{x_0+2h} \\ &= \frac{1}{2h^2} \left(\frac{y_0 + 2y_1 + y_2}{3}(2h)^3 - \frac{h(3y_0 + 4y_1 + y_2)}{2}(2h)^2 + 4h^3y_0 \right) \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \end{aligned}$$

In dieser allgemeineren Form nennt man die Keplersche Fassregel auch die

Simpsonregel:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)}$$

mit $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(\frac{a+b}{2})$ und $y_2 = f(b)$ sowie $h = \frac{b-a}{2}$.

ⁱⁱ Wir beschränken uns nun nicht mehr auf nicht-negative Funktionen.

ⁱⁱⁱ Siehe auch Bemerkung 3.3.

Das Verfahren lässt sich verfeinern, indem man das Intervall $[a, b]$ in $2k$ -äquidistante Teilstücke $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2k-1} < x_{2k} = b$ mit $x_i = x_0 + ih$ und $h = \frac{b-a}{n}$ zerlegt. Dann wendet man jeweils für $i = 0, \dots, k-1$ auf $x_{2i} < x_{2i+1} < x_{2i+2}$ die Simpsonregel an und summiert die Ergebnisse. Es ergibt sich dann mit $y_i := f(x_i)$ die

Summierte Simpsonregel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \dots + 2y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})$$

Statt wie bei der Simpsonregel den Funktionsgraphen nach Festlegung von drei Punkten durch eine Parabel zu ersetzen, kann man ihn auch einfacher durch die Festlegung zweier Punkte durch eine Gerade ersetzen.

In diesem Fall ist die Näherungsformel für das Integral natürlich sehr viel leichter zu bestimmen, da man nur die Fläche eines Parallelogramms zu berechnen hat. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion, dann lautet die Zerlegung in diesem Fall $a = x_0 < x_1 = b$ und wir erhalten mit $y_0 = f(a)$, $y_1 = f(b)$ und $h = b - a$ die

Sehnentrapezregel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$

Auch hier lässt sich direkt eine summierte Variante angeben. Dazu sei $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ eine äquidistante Zerlegung, also $x_i = x_0 + ih$ mit $h = \frac{b-a}{n}$. Wir ersetzen nun für $i = 0, \dots, n-1$ den Graph über $x_i < x_{i+1}$ durch eine Gerade, berechnen gemäß der Sehnentrapezregel und summieren alle Teile auf. Wir erhalten dann mit $y_i = f(x_i)$ die

Summierte Sehnentrapezregel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Genauso, wie wir das für zwei (Sehnentrapezregel) bzw drei Stützstellen (Simpsonregel) gemacht haben, können wir den Graphen von f über vier Stützstellen durch ein Polynom dritten Grades ersetzen und die gleiche Prozedur durchführen. Auch hier gibt es eine summierte Version, die dann aber eine durch drei teilbare Anzahl an Stützstellen benötigt. Mit den üblichen Bezeichnungen erhaltenen wir so die

Newtonsche 3/8-Regel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)$$

sowie die

Summierte Newtonsche 3/8-Regel:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + 2y_3 + 3y_4 \dots + 3y_{3k-1} + y_{3k})$$

Die oben gewonnenen Rechenregeln für die Näherungswerte der Integrale fassen wir auch unter dem Begriff (*summierte*) *Quadraturformeln* zusammen. Wie sich die summierten Quadraturformeln verbessern, wenn man die Anzahl der Stützstellen erhöht, dass zeigt Tabelle 6. Dabei bedeutet $R_n(f)$ den Fehler, den man macht, wenn man das Integral durch die rechte Seite der obigen Formeln ersetzt, also

$$R_n(f) = \left| \int_a^b f(x)dx - (\text{Quadraturformel mit } n \text{ Stützstellen}) \right|.$$

Die rechte Spalte gibt an, zu welcher Potenz von n der Fehler proportional ist, nicht den genauen Fehler. Erhöht man n , so geben also die Simpsonregel und die Newtonsche

| | $R_n(f)$ |
|----------------------|-----------------|
| Sehnentrapezregel | $\frac{1}{n^2}$ |
| Simpsonregel | $\frac{1}{n^4}$ |
| Newtonsche 3/8-Regel | $\frac{1}{n^4}$ |

TABELLE 6

3/8-Regel schneller einen guten Näherungswert für das Integral als die Sehnentrapezregel. Allerdings liefert das Ersetzen des Graphen von $f(x)$ durch kubische Polynome keine Verbesserung gegenüber dem Ersetzen durch Parabeln, denn beide Fehler sind proportional zu $\frac{1}{n^4}$.

Bemerkung 3.1. Als Maß für die Güte einer Quadraturformel, kann man überprüfen für welche Funktionen $f(x)$ die Formel den exakten Wert liefert. Man sagt dann auch $f(x)$ wird exakt integriert. Eine Zahl, die sich gut vergleichen läßt, ist der maximale Grad eines Polynoms, dass sich mit der jeweiligen Quadraturformel noch exakt integrieren läßt. Da die Sehnentrapezregel, die Simpsonregel bzw. die Newtonsche 3/8-Regel mit Hilfe von Polynomen der Ordnung eins, zwei bzw. drei konstruiert wurden, lassen sich diese auch exakt integrieren. Bei der Sehnentrapezregel und der Newtonschen 3/8-Regel läßt sich dieser Grad, also eins bzw. drei, nicht verbessern. Der folgende Satz zeigt, dass im Gegensatz dazu die Simpsonregel besser ist.

Satz 3.2. Die Simpsonregel, also die Quadratur mit Hilfe von quadratischen Polynomen bei Stützstellenverteilung $(a, \frac{a+b}{2}, b)$, integriert Polynome bis zum Grad 3 exakt.

Der Beweis läßt sich leicht durch Einsetzen von $f(x) = x^3$ führen.

Wir werden auf diese Eigenschaft der Simpsonregel später zurückkommen, siehe Abschnitt 4.

3.2. Lagrange Interpolationspolynome.

Die Konstruktion des eindeutigen quadratischen Polynoms in (3) wollen wir nun ein wenig verallgemeinern. Die Ausgangssituation dafür ist die Folgende: Gegeben sind $n + 1$ Punkte in der Ebene $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ mit $x_i \neq x_j$ für alle $i, j = 1, \dots, n$. Gesucht ist ein Polynom $p(x)$ vom Grad höchstens n , dass an den Stellen x_i den Wert y_i annimmt, also $p(x_i) = y_i$ (d.h. der Graph von $p(x)$ läuft durch die $n + 1$ Punkte).

Bemerkung 3.3. Das Interpolationspolynom ist eindeutig, denn angenommen es gäbe ein weiteres solches Polynom, dann hätte die Differenz aus beiden $n + 1$ Nullstellen, und ist als Polynom vom Grad höchstens n das Nullpolynom.

Definition/Bemerkung 3.4 (Lagrange-Interpolationspolynom). Gegeben seien $n + 1$ reelle Zahlen $x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n$. Die Funktion

$$L_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{4}$$

$$= \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \dots \cdot \frac{x - x_{n-1}}{x_i - x_{n-1}} \cdot \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

↑
der i -te Faktor fehlt

ist ein Polynom vom Grad n und erfüllt

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = i \\ 0 & \text{falls } k \neq i \end{cases}.$$

Dieses Polynom heißt i -tes *Lagrange-Polynom* zu den Stützstellen x_0, \dots, x_n .

Zu den Werten $x_0 < \dots < x_n$ seien nun noch Werte y_0, \dots, y_n gegeben. Dann ist das Polynom

$$p(x) := \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

vom Grad n und erfüllt $p(x_k) = y_k$ für $0 \leq k \leq n$. $p(x)$ heißt das *Lagrange-Interpolationspolynom* durch die Punkte (x_i, y_i) .

Die Definition kann man jetzt benutzen, um Interpolationsquadraturen höherer Ordnung herzuleiten. Das ist jetzt aber nicht unser Ziel. Wir wollen im nächsten Abschnitt stattdessen Quadraturverfahren entwickeln, die die Güte der Interpolation im Sinne der Bemerkung 3.1 verbessern.

4. GAUSSSCHE QUADRATURFORMELN

4.1. Legendre-Polynome.

Wir werden zunächst eine Folge von Polynomen definieren, die für sich schon bemerkenswerte Eigenschaften hat, siehe Satz 4.2. Wir werden dann sehen, dass diese Polynome bei der Diskussion von Quadraturverfahren eine entscheidende Rolle spielen.

Definition/Bemerkung 4.1 (Legendre-Polynome). Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Funktion

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left((x^2 - 1)^n \right) \quad (5)$$

ein Polynom n -ten Grades, denn $(x^2 - 1)^n$ ist ein Polynom $2n$ -ten Grades und dessen n -te Ableitung also eines vom Grad n . $P_n(x)$ heißt *Legendre-Polynom n -ter Ordnung*, siehe Abbildung 14 für kleine n . Der Leitkoeffizient von P_n ist $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$, denn $(x^2 - 1)^n = x^{2n} + q(x)$ mit q vom Grad kleiner als $2n$ und $\frac{d^n x^{2n}}{dx^n} = \frac{(2n)!}{n!} x^n$.

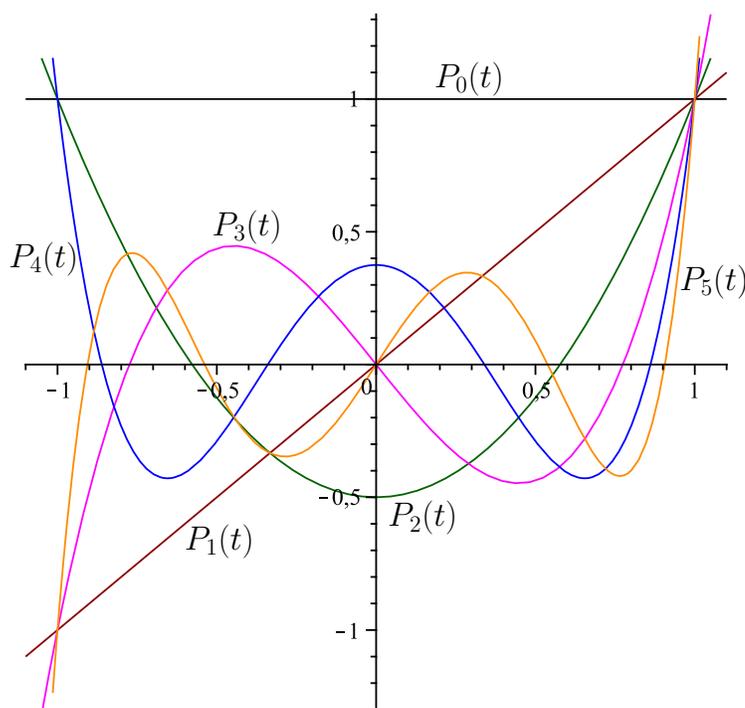


ABBILDUNG 14. Legendre Polynome $0 \leq n \leq 5$

Satz 4.2 (Eigenschaften der Legendre-Polynome). 1. Für kleine n lauten die Legendre-Polynome $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, $P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$ etc.
 2. $P_{2k}(x)$ ist eine gerade Funktion und $P_{2k+1}(x)$ ist eine ungerade Funktion. Außerdem gilt $P_k(1) = 1$.

3. Da die Polynome $P_0(x), \dots, P_n(x)$ alle unterschiedlichen Grad haben, sind sie linear unabhängig. Damit läßt sich insbesondere jedes Polynom $p(x)$ vom Grad n als Linearkombination der Polynome $P_0(x), \dots, P_n(x)$ darstellen. Das heißt, es gibt reelle Zahlen a_0, \dots, a_n , so dass $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$.

4. $\int_{-1}^1 x^k P_n(x) dx = 0$ für alle $k < n$.

5. $\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1} & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n \end{cases}$. Damit lassen sich die Koeffizienten aus Punkt 3. gemäß $a_k = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 p(x) P_k(x) dx$ berechnen.

6. Die Polynome $P_k(x)$ lassen sich mit Hilfe des Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren konstruieren, indem man es auf die Polynome $1, x, x^2, \dots$ anwendet, siehe Satz A.1. Das zu verwendende Skalarprodukt ist dabei

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^1 p(x) q(x) dx.$$

Man nennt diese Polynome deshalb auch Orthogonalpolynome.

7. $P_n(x)$ hat genau n einfache Nullstellen im Intervall $[-1, 1]$.

Beweise. Punkt 1. rechnet man einfach aus, Punkt 2. folgt direkt aus der Definition und die Begründung für Punkt 3. steht schon dort.

Punkt 4. zeigt man mit Hilfe partieller integration und der Tatsache, dass die Funktion $\frac{d^m}{dx^m} ((x^2 - 1)^n)$ für $m < n$ and den Stellen $x = \pm 1$ verschwindet. Das gilt wegen

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dx^m} ((x^2 - 1)^n) &= \frac{d^m}{dx^m} ((x - 1)^n (x + 1)^n) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{d^k}{dx^k} ((1 - x)^n) \frac{d^{m-k}}{dx^{m-k}} ((1 + x)^n) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{n!}{(n - k)!} \frac{n!}{(n - m + k)!} (1 - x)^{n-k} (1 + x)^{n-m+k} \end{aligned} \quad (6)$$

und weil in jedem der Summanden wegen der Bedingung $m < n$ ein Faktor $(x - 1)$ und $(x + 1)$ auftaucht.

Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^k \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} dx &= \overbrace{\left[x^k \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} \right]_{-1}^1}^{=0, \text{ wegen der Bemerkung nach (6)}} - k \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} \\ &= -k \int_{-1}^1 x^{k-1} \frac{d^{n-1} (x^2 - 1)^n}{dx^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^2 k(k-1) \int_{-1}^1 x^{k-2} \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}} \\
&\vdots \\
&= (-1)^k k! \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}(x^2-1)^n}{dx^{n-k}}
\end{aligned}$$

So weit klappt die Rechnung für alle $k \leq n$. Für $k < n$, also $n - k > 0$, gilt weiter

$$\begin{aligned}
&= (-1)^k k! \left[\frac{d^{n-k-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-k-1}} \right]_{-1}^1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Das ist der Beweis für 4. und somit für den unteren Fall von 5.

Der erste Fall von 5. benötigt 4. und die obere Rechnung für den Fall $k = n$, denn

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 P_n(x)P_n(x)dx &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^3} \int_{-1}^1 x^n \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n} dx \\
&= \frac{(2n)!(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2-1)^n dx \\
&= \frac{(2n)!(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \left(\left[x(x^2-1)^n \right]_{-1}^1 - 2n \int_{-1}^1 x^2(x^2-1)^{n-1} dx \right) \\
&= \frac{(2n)!(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} (-1)2n \int_{-1}^1 x^2(x^2-1)^{n-1} dx \\
&= \frac{(2n)!(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(-1)^2 2^2 n(n-1)}{3} \int_{-1}^1 x^4(x^2-1)^{n-2} dx \\
&\vdots \\
&= \frac{(2n)!(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(-1)^n 2^n n!}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \int_{-1}^1 x^{2n} dx \\
&= \frac{(2n)!}{2^n n!} \frac{2^n n!}{(2n)!} \int_{-1}^1 x^{2n} dx \\
&= \frac{1}{2n+1} \left[x^{2n+1} \right]_{-1}^1 \\
&= \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

Für $m = n$ ist in (6)

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n) \Big|_{x=1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 n! (1-x)^{n-k} (1+x)^k \Big|_{x=1} \\ &= \binom{n}{n}^2 n! 0^0 2^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}^2 n! 0^{n-k} 2^k = 2^n n!, \end{aligned}$$

also $P_n(1) = 1$. Das beweist den zweiten Teil von 2. Der erste Teil von 2. folgt aus der Tatsache, dass die Ableitung einer geraden Funktion ungerade ist und umgekehrt. Jetzt ist aber $(x^2 - 1)^n$ für alle n stets eine gerade Funktion.

Punkt 6. folgt aus Punkt 5. wegen der Eindeutigkeit der Orthogonalpolynome, zumindest bis auf Normierung. Zur Herleitung der Rodriguez-Formel (5) aus der Orthogonalität siehe auch [9].

Neben Punkt 4. ist Punkt 7. der, der uns später besonders interessieren wird. Der Beweis von 7. ist etwas komplizierter, da hier nicht eine „einfache“ Rechnung das Resultat liefert. Trotzdem wollen wir den Beweis hier durchführen.

Es seien x_{n1}, \dots, x_{nn} die Nullstellen des Polynoms $P_n(x)$ (dabei dürfen auch welche übereinstimmen und sie müssen nicht alle reell sein!). Dann gilt bis auf einen Vorfaktor $P_n(x) \approx (x - x_{n1})(x - x_{n2}) \dots (x - x_{nn})$ und wegen $\int_{-1}^1 P_n(x) P_0(x) dx = 0$ schließlich $\int_{-1}^1 (x - x_{n1}) \dots (x - x_{nn}) dx = 0$. Wegen der letzten Identität gibt es also mindestens eine reelle Nullstelle mit Vorzeichenwechsel in dem Intervall $[-1, 1]$, also mit ungeradzahlgiger Vielfachheit. Es sei nun $\{x_{nv_1}, \dots, x_{nv_k}\} \subset \{x_{n1}, \dots, x_{nn}\}$ die Menge aller Nullstellen mit Vorzeichenwechsel in $[-1, 1]$, wobei jedoch mehrfache Nullstellen nur einmal gezählt werden. Dann ist $k \leq n$ und das Polynom $q(x) := (x - x_{nv_1})(x - x_{nv_2}) \dots (x - x_{nv_k})$ ist genau vom Grad k . Das Polynom $q(x)P_n(x)$ hat nur Nullstellen ohne Vorzeichenwechsel, es gilt also $q(x)P_n(x) \geq 0$ (oder ≤ 0). Damit ist dann aber auch $\int_{-1}^1 q(x)P_n(x) dx \neq 0$ was einen Widerspruch zu Punkt 4. liefert, wenn nicht schon der Grad von q gleich n war. In diesem Fall ist dann $\{x_{nv_1}, \dots, x_{nv_k}\} = \{x_{n1}, \dots, x_{nn}\}$ und alle Nullstellen von $P_n(x)$ sind reell, liegen in $[-1, 1]$ und sind einfach.

4.2. Gaußsche Quadraturformeln.

Alle Quadraturformeln aus Kapitel 3 haben die Form $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n \omega_k f(x_k)$, wobei die x_k die äquidistanten Stützstellen waren und die Gewichte ω_k jeweils bestimmt wurden. Wir haben gesehen, dass die verschiedenen Formeln für Polynome bis zu einem gewissen Grad exakt waren. So war zum Beispiel die Simpsonregel für Polynome bis zu einem Grad von drei exakt.

Wir beschränken uns zunächst auf das Intervall mit $a = -1$ und $b = 1$ und variieren den Ansatz für die Quadraturformel dahingehend, dass nicht nur die Gewichte als zu

bestimmen angesehen werden, sondern auch die Stützstellen, also:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n \omega_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) \quad (7)$$

mit noch zu bestimmenden Stützstellen $x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ und Gewichten $\omega_0^{(n)}, \dots, \omega_n^{(n)}$. Insgesamt haben wir so $2(n+1)$ Parameter zur Verfügung, die angepaßt werden können. Ein Polynom vom Grad m hat $m+1$ Koeffizienten, so dass wir erwarten können, dass die obere Schranke der exakt zu integrierenden Polynome durch $m+1 \leq 2(n+1)$ oder $m \leq 2n+1$ gegeben ist. Wir verfolgen nun genau diese Idee und fordern, dass alle Polynome vom Grad $2n+1$ exakt integriert werden.

Sei nun $p(x)$ ein Polynom vom Grad höchstens $2n+1$. Die Exaktheit der Quadraturformel liefert dann

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{k=0}^n \omega_k^{(n)} p(x_k^{(n)}).$$

Es seien nun $L_k(x)$ die Lagrange Polynome zu den noch nicht bekannten Stützstellen $x_k^{(n)}$ für $k = 0, \dots, n$ und es sei ferner

$$p^\times(x) := \sum_{k=0}^n p(x_k^{(n)}) L_k(x).$$

das Lagrange Interpolationspolynom zu den Punkten $(x_k^{(n)}, p(x_k^{(n)}))$. Dann hat das Polynom $p(x) - p^\times(x)$ Nullstellen an den Stützstellen $x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ und ist vom Grad höchstens $2n+1$. Es läßt sich deshalb schreiben als

$$p(x) - p^\times(x) = (x - x_1^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)}) q(x)$$

mit einem Polynom $q(x)$ vom Grad höchstens $(2n+1) - (n+1) = n$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \omega_k^{(n)} p(x_k^{(n)}) &= \int_{-1}^1 p(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\int_{-1}^1 L_k(x) dx \right) p(x_k^{(n)}) + \int_{-1}^1 (x - x_1^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)}) q(x) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Formel (8) soll nun für alle Polynome $p(x)$ wahr sein, also insbesondere auch für diejenigen, die in den Stützstellen verschwinden. Dafür liefert (8) die folgende Bedingung für die Polynome $q(x)$ vom Grad kleiner oder gleich n :

$$0 = \int_{-1}^1 (x - x_1^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)}) q(x) dx. \quad (9)$$

Erinnern wir uns nun an die Eigenschaft 4. der Legendre-Polynome, so sehen wir, dass (9) für die folgende Wahl der Stützstellen erfüllt ist:

Die Wahl der Stützstellen $x_k^{(n)}$: Es sei $P_{n+1}(x)$ das $(n+1)$ -te Legendre-Polynom. Wir wählen als Stützstellen die $n+1$ Nullstellen $-1 \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} \leq 1$,

siehe auch Punkt 7. der Eigenschaften der Legendrepolynome. Diese erfüllen wegen Eigenschaft 4. aus Satz 4.2 nun (9).

Die Wahl der Gewichte $\omega_k^{(n)}$: Formel (8) liefert bei der obigen Wahl der Stützstellen

$$\int_{-1}^1 p(x)dx = \sum_{k=0}^n \left(\int_{-1}^1 L_k(x)dx \right) p(x_k^{(n)}).$$

Exaktheit der Quadraturformel ist somit für die Gewichtswahl

$$\omega_k^{(n)} := \int_{-1}^1 L_k(x)dx \quad (10)$$

gegeben, wobei die $L_k(x)$ die Lagrange polynome zu den gegebenen Stützstellen sind, also zu den Nullstellen $x_0^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ von $P_{n+1}(x)$.

Diese Gewichte sind alle positiv, denn es gilt

$$\omega_i^{(n)} = \sum_{k=0}^n \omega_k^{(n)} \underbrace{(L_k(x_i^{(n)}))^2}_{\begin{cases} 1 & \text{falls } k = i \\ 0 & \text{falls } k \neq i \end{cases}} = \int_{-1}^1 L_k^2(x)dx > 0.$$

Dabei gilt der vorletzte Schritt, da für das Polynom $L_k^2(x)$ vom Grad $2n < 2n + 1$ die Quadraturformel exakt ist.

Definition 4.3. Die Quadraturformel, die wir durch unsere Wahl der Gewichte und Stützstellen erhalten haben, heißt auch *Gauß-Legendre Quadratur*.

4.3. Abschließende Bemerkungen.

- Die Beschränkung auf das Intervall $[-1, 1]$ ist keine wirkliche Beschränkung. Durch die lineare Transformation $t = 2 \frac{x-a}{b-a} - 1$ können wir jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ auf das Intervall $[-1, 1]$ transformieren.
- Es gibt Variationen dieser Quadraturformel. Zum Beispiel lässt sich in das zu berechnende Integral eine nicht-negative Gewichtsfunktion $\omega(x)$ einbauen, also $\int_a^b \omega(x)f(x)dx$. Wir können statt des abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ auch offene oder unbeschränkte Intervalle zulassen. Das liefert dann andere Orthogonalpolynome und daher andere Stützstellen. Tabelle 7 gibt eine Übersicht über einige übliche Wahlen für Gewichtsfunktionen und Intervalle. Zum weiteren Lesen empfehlen wir zum Beispiel die Bücher [1, 10] Die Eigenschaften der Legendre-Polynome aus Satz 4.2, gelten mit leichten Änderungen auch im allgemeineren Fall. So liegen etwa die Nullstellen stets im betrachteten Intervall.
- Wir können bei der Quadratur einige der Stützstellen von vornherein festlegen. Fixieren wir etwa einen Randpunkt so nennt man das Quadraturverfahren auch Gauß-Radau-Quadratur. Fixieren wir sogar beide Randpunkte des Intervalls, dann spricht man von Gauß-Lobatto-Quadratur. Diese Festlegungen senken

| Intervall | $\omega(x)$ | Name |
|---------------------|--------------------------|------------------------|
| $[-1, 1]$ | 1 | Legendre-Polynome |
| $[0, \infty)$ | e^{-x} | Laguerre-Polynome |
| $(-\infty, \infty)$ | e^{-x^2} | Hermite-Polynome |
| $[-1, 1]$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | Tschebyscheff-Polynome |

TABELLE 7. Klassische Orthogonalpolynome

jedoch den Maximalgrad der exakt integrierbaren Polynome um eins für jede fixierte Stützstelle, siehe [4] oder [2].

Insbesondere erhalten wir die Simpson-Regel, wenn wir die Gauß-Legendre Quadratur für $n = 2$ durchführen und beide Randstellen fixieren. Wir erhalten dann als Maximalgrad $2n + 1 - 2 = 3$, was wir auch in Satz 3.2 gesehen hatten

ANHANG A. DAS ORTHOGONALISIERUNGSVERFAHREN NACH GRAM-SCHMIDT

Das Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt hat das Ziel, in der linearen Hülle einer vorgegebenen Menge von Vektoren eine Menge von zueinander orthogonalen Vektoren zu finden. Dazu habe man aus der Startmenge schon eine Menge $\{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$ linear unabhängiger Vektoren ausgewählt. Wie wir daraus orthogonale Vektoren konstruieren, sagt der folgende Satz.

Satz A.1 (Orthogonalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt). *Es sei (V, \langle, \rangle) ein Vektorraum mit Skalarprodukt und $\{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\} \subset V$ eine linear unabhängige Teilmenge. Dann wird durch die Vorschrift*

$$v_1 := \frac{1}{\|w_1\|} w_1$$

$$v_\ell := \frac{1}{\left\| w_\ell - \sum_{k=1}^{\ell-1} \langle w_\ell, v_k \rangle v_k \right\|} \left(w_\ell - \sum_{k=1}^{\ell-1} \langle w_\ell, v_k \rangle v_k \right), \quad \ell = 2, 3, \dots \quad (11)$$

eine orthonormale Menge $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$ konstruiert. Für alle $k \geq 1$ gilt insbesondere $\text{span}\{w_1, w_2, \dots, w_k\} = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$.

Beweis. Für alle $j \geq 1$ hat v_j die Länge Eins.

Wir zeigen nun, dass für alle m die endliche Menge $\{v_1, \dots, v_m\}$ orthogonal ist. Damit ist es dann auch die Menge $\{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\}$. Der Nachweis erfolgt per Induktion über m

Für $m = 1$ ist die Menge $\{v_1\}$ orthogonal.

Als Induktionsannahme (IA) sei nun $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$ orthogonal.

Zu zeigen bleibt, dass mit der Induktionsannahme v_m orthogonal zu allen Vektoren aus $\{v_1, \dots, v_{m-1}\}$ ist. Sei dazu $\ell < m$. Dann ist

$$\begin{aligned} \langle v_m, v_\ell \rangle &= \left\langle w_m - \sum_{k=1}^{m-1} \langle w_m, v_k \rangle v_k, v_\ell \right\rangle \\ &= \langle w_m, v_\ell \rangle - \sum_{k=1}^{m-1} \langle w_m, v_k \rangle \underbrace{\langle v_k, v_\ell \rangle}_{=\delta_{k\ell} \text{ (IA)}} = \langle w_m, v_\ell \rangle - \langle w_m, v_\ell \rangle = 0. \end{aligned}$$

Die Aussage über die linearen Hüllen folgt direkt aus der Konstruktion.

LITERATUR

- [1] George E. Andrews, Richard Askey und Ranjan Roy: *Special Functions*. Cambridge University Press, 1999
- [2] Peter Deuffhard und Andreas Hohmann: *Numerische Mathematik I - Eine algorithmisch orientierte Einführung*. Walter de Gruyter & Co., 2. Aufl., 1993
- [3] Christian Gerthsen, Hans O. Kneser und Helmut Vogel: *Physik*. Springer-Verlag, 16. Aufl., 1989
- [4] Günther Hämmerlin und Karl-Heinz Hoffmann: *Numerische Mathematik*. Springer-Verlag, 4. Aufl., 1994
- [5] Uwe Heisel und Otto Eggert: Holzbiegen: Ein umweltfreundliches altes und zugleich modernes Produktionsverfahren. *HK Holz- und Kunststoffverarbeitung* no. 1 (1994) 56-59
- [6] Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*. B. G. Teubner GmbH, 15. Aufl., 2003
- [7] Johannes Kepler: *Neue Stereometrie der Fässer*. Engelmann, Leipzig 1908. Übersetzung des lateinischen Originals von R. Klug, *Nova Stereometria*, 1615
- [8] Frank Klinker. *Die Keplersche Fassregel*: Erschienen in *Mathematik-Seminar des Freistaates Sachsen zur Vorbereitung auf die Deutschland-Mathematikolympiade, Sayda 2001*. Leipzig, 2001
- [9] Norbert Sieber und Hans-Jürgern Sebastian: *Spezielle Funktionen*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 3. Aufl., 1988
- [10] Gabor Szegő: *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society, Fourth Edition, 1975