DIE GAUSSSCHE GERADE

FRANK KLINKER

Zusammenfassung. Viele Aussagen der ebenen Geometrie lassen sich elegant mit Hilfe der linearen Algebra beweisen. Eine davon ist der Satz von Gauß über die Eigenschaften eines allgemeinen Vierecks.

Gegeben seien vier Punkte A, B, C und D in einer Ebene, von denen keine drei jeweils auf einer Geraden liegen. Diese Bedingung an die Punkte bezeichnen wir mit $\circledast$. Ferner bezeichnen $g(X,Y)$ und $M(X,Y)$, sowie $\vec{v}(X,Y)$ die Gerade durch die Punkte X und Y und den Mittelpunkt der Strecke zwischen X und Y, sowie den Richtungsvektor von X nach Y. Mit diesen Bezeichnungen seien

$$\begin{aligned} N &= g(A,C) \cap g(B,D)\,, \\ P &= g(A,D) \cap g(B,C)\,, \\ Q &= g(A,B) \cap g(C,D)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Dann gilt der folgende Satz 1.

Satz 1. *Die drei Punkte*

$$\begin{aligned} &M(A,B),\ M(D,C),\ M(N,P) \quad \textit{und} \\ &M(A,C),\ M(B,D),\ M(P,Q) \quad \textit{sowie} \\ &M(A,D),\ M(B,C),\ M(N,Q) \end{aligned} \tag{2}$$

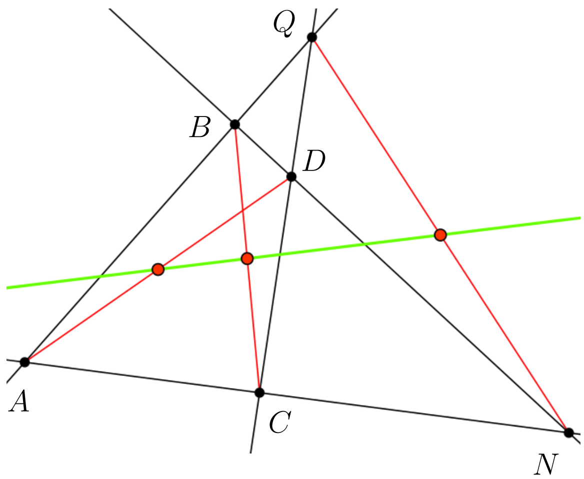
liegen jeweils auf einer Geraden, falls sie existieren, d.h. falls die jeweiligen Schnitte in (1) nicht leer sind.

Bemerkung 2. (1) Wie man an (1) und (2) sieht, ist das Problem symmetrisch bezüglich der Aufteilung der vier Punkte in zwei Paare und symmetrisch in diesen beiden Paaren: $\frac{1}{2}\binom{4}{2} = 3$. Wegen dieser Symmetrie reicht es, die Behauptung für eine der Fälle in (2) zu zeigen, und wir beschränken uns auf den letzten, siehe Abbildung 1.

(2) Unsere Bedingung $\circledast$ ist schwächer, als die Bedingung ein vollständiges Vierseit zu sein. Diese besagt, dass vier vorgegebene Geraden (die Seiten des von A,B,C,D gebildeten Vierecks) sich paarweise schneiden, wobei jedoch jeweils drei keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben dürfen. Aus diesem Grund benötigen wir die Einschränkung „[...] falls sie existieren, [...]“ in Satz 1. Die Aussage lässt sich aber auch retten, wenn einer oder

Email: frank.klinker@math.tu-dortmund.de .

Abbildung 1. Die Gaußsche Gerade



zwei der Schnittpunkte nicht existieren, d.h. wenn die Geraden parallel sind, siehe Bemerkungen 4 und 5.

Definition 3. Die Geraden in Satz 1 heißen Gaußsche Geraden.

Wir geben hier einen Beweis für Satz 1, der ausschließlich auf Hilfsmittel der linearen Algebra zurückgreift. Einen elementargeometrischen Beweis mit Hilfe affin-geometrischer Methoden findet man etwa in [Koecher und Krieg 2007, Kap. II §2.5 mit Kap. II §1.6] und genauso in [Gauß 1873, Seite 391-392].

Wir bezeichnen die Aufpunktvektoren zu den Punkten bezüglich A mit kleinen Buchstaben, also $\vec{v}(A,A) = \vec{a} = 0$, $\vec{v}(A,B) = \vec{b}$, $\vec{v}(A,N) = \vec{n}$, etc. Ferner seien ohne Beschränkung $\vec{b}$ und $\vec{d}$ linear unabhängig. Dann ist insbesondere $\vec{c} = \beta\vec{b} + \delta\vec{d}$ für zwei Skalare β, δ. Insbesondere sind $\beta + \delta = 1$ und $\beta\delta = 0$ wegen der Bedingung $\circledast$ ausgeschlossen.

Mit diesen Bezeichnungen sind dann

$$\vec{n} = \left\{\vec{b} + \tau(\vec{d} - \vec{b}) \,|\, \tau \in \mathbb{R}\right\} \cap \left\{\sigma\vec{c} \,|\, \sigma \in \mathbb{R}\right\}, \tag{3}$$

$$\vec{q} = \left\{\vec{d} + \tau(\vec{d} - \vec{c}) \,|\, \tau \in \mathbb{R}\right\} \cap \left\{\sigma\vec{b} \,|\, \sigma \in \mathbb{R}\right\}. \tag{4}$$

Wir zeigen im Folgenden, dass der dritte der Punkte $M(A,D)$, $M(B,C)$ und $M(N,Q)$ auf der Geraden durch die ersten beiden liegt. Es ist

$$\begin{aligned}
\vec{v}(A, M(A,D)) &= \frac{1}{2}\vec{d}, \\
\vec{v}(A, M(B,C)) &= \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = \frac{1+\beta}{2}\vec{b} + \frac{\delta}{2}\vec{d},
\end{aligned}$$

womit die Gerade durch die Punkte die Form

$$\mathfrak{g} = \left\{ \frac{1}{2}\vec{d} + \tau(\vec{b} + \vec{c} - \vec{d}) \mid \tau \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{1}{2}\vec{d} + \tau\big((1+\beta)\vec{b} + (\delta - 1)\vec{d}\big) \mid \tau \in \mathbb{R} \right\} \quad (5)$$

gegeben ist. Zu zeigen ist also

$$\frac{1}{2}(\vec{n} + \vec{q}) \in \mathfrak{g}\,.$$

<u>Berechnung von $\vec{n}$:</u>

$$\begin{aligned} & \vec{b} + \tau(\vec{d} - \vec{b}) = \sigma\vec{c} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{b} + \tau\vec{d} - \tau\vec{b} = \sigma\beta\vec{b} + \sigma\delta\vec{d} \\ \Leftrightarrow\ & (1 - \tau - \beta\sigma)\vec{b} + (\tau - \delta\sigma)\vec{d} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \tau + \beta\sigma = 1 \quad \wedge \quad \tau - \delta\sigma = 0 \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn $\delta + \beta \neq 0$, und die Lösung ist dann $\tau = \dfrac{\delta}{\beta + \delta}$ und $\sigma = \dfrac{1}{\beta + \delta}$. Im Fall, dass $\beta + \delta = 0$ ist, ist die Gerade $g(A, C)$ parallel zur Geraden $g(B, D)$ und der Schnittpunkt N existiert nicht. Im anderen Fall ergibt sich

$$\vec{n} = \frac{1}{\beta + \delta}(\beta\vec{b} + \delta\vec{d})\,. \quad (6)$$

<u>Berechnung von $\vec{q}$:</u>

$$\begin{aligned} & \vec{d} + \tau(\vec{d} - \vec{c}) = \sigma\vec{b} \\ \Leftrightarrow\ & \vec{d} + \tau\vec{d} - \tau\beta\vec{b} - \tau\delta\vec{d} = \sigma\vec{b} \\ \Leftrightarrow\ & (-\sigma - \tau\beta)b + (1 + \tau - \tau\delta)d = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (\delta - 1)\tau = 1 \quad \wedge \quad \sigma + \tau\beta = 0\,. \end{aligned}$$

Der Fall $\delta = 1$ entspricht – analog zu oben – dem Fall, dass $g(A, B)$ und $g(C, D)$ parallel sind, weshalb Q nicht existiert. Im Fall $\delta \neq 1$ sind $\tau = \dfrac{1}{\delta - 1}$ und $\sigma = \dfrac{\beta}{1 - \delta}$, sodass

$$\vec{q} = \frac{\beta}{\delta - 1}\vec{b}\,. \quad (7)$$

Zusammen gilt

$$\frac{1}{2}(\vec{n} + \vec{q}) = \left(\frac{\beta}{2(1 - \delta)} + \frac{\beta}{2(\beta + \delta)}\right)\vec{b} + \frac{\delta}{2(\beta + \delta)}\vec{d} \quad (8)$$

und es bleibt die Lösbarkeit von

$$\frac{1}{2}(\vec{n} + \vec{q}) = \frac{1}{2}\vec{d} + \tau\big((1 + \beta)\vec{b} + (\delta - 1)\vec{d}\big) \quad (9)$$

zu zeigen. Diese ist aber gegeben, denn (9) ist äquivalent zu

$$\left(\frac{\beta}{1 - \delta} + \frac{\beta}{\beta + \delta} - 2\tau(1 + \beta)\right)\vec{b} + \left(-1 + \frac{\delta}{\beta + \delta} + 2\tau(1 - \delta)\right)\vec{d} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\tau(1+\beta) = -\frac{\beta}{1-\delta} - \frac{\beta}{\beta+\delta} \quad \wedge \quad 2\tau(1-\delta) = 1 - \frac{\delta}{\beta+\delta} = 0$$
$$\Leftrightarrow 2\tau = \frac{\beta}{(\beta+\delta)(1-\delta)}\,.$$

Bemerkung 4. Die Bedingung $\circledast$ an die Punkte A, B, C, D, bedeutet, dass die vier Punkte ein nicht ausgeartetes Viereck bilden, und dass mindestens einer der drei Punkte in (1) existiert. Man kann nun drei Fälle unterscheiden:

(a) Die Existenz von allen drei Schnittpunkten bedeutet, dass das Viereck generisch ist, also ein vollständiges Viereck.
(b) Die Existenz von genau zwei der drei Schnittpunkte bedeutet, dass das Viereck ein echtes Trapez ist.
(c) Die Existenz von nur einem der drei Schnittpunkte bedeutet, dass das Viereck ein Parallelogramm ist.

Die Parallelität von jeweils zwei Seiten in dem Viereck, die sich in (b) und (c) durch die Abwesenheit der Schnittpunkte widerspiegelt, hat man schon in den Rechnungen an der Nichtlösbarkeit der Gleichungssysteme gesehen. In Fall (b) lässt sich die Aussage durch Hinzunahme eines uneigentlichen Punktes retten. In diesem Fall fallen zwei der drei Geraden in Satz 1 zusammen und stimmen mit der Mittelparallelen der zwei parallelen Seiten des Trapezes überein. In Fall (c) kann man nun lediglich für zwei der beiden Geraden in Satz 1 die Aussage durch Hinzunahme zweier uneigentlicher Punkte retten.

Bemerkung 5. Lässt man die Bedingung $\circledast$ fallen, so kann man zwei Fälle unterscheiden:

(a) Genau drei der vier Punkte liegen auf einer Geraden. Dann ist das geometrische Objekt ein Dreieck und jeweils zwei der drei Punkte in Satz 1 fallen zusammen. In diesem Fall stimmt die Aussage des Satzes, was man auch daran erkennt, dass z.B. in den obigen Rechnungen, die wegen $\circledast$ ausgenommenen Werte $\beta + \delta = 1$ und $\beta\delta = 0$ keine Probleme machen.
(b) Liegen alle vier Punkte auf einer Geraden, so auch die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken. In diesem Fall sind die Schnittpunkte in (1) nicht eindeutig definiert. Wählt man sie jedoch beliebig, so ist auch dann die Aussage aus Satz 1 erfüllt.

Literatur

[Gauß 1873] Gauß, Carl Friedrich: *Werke, Vierter Band*. Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1873.

[Koecher und Krieg 2007] Koecher, Max und Krieg, Aloys: *Ebene Geometrie*. Springer Verlag, 3. Aufl. 2007.