Eduard-Spranger-Berufskolleg
Berufskolleg und Berufliches Gymnasium der Stadt Hamm
für Technik, Informatik und Gestaltung

Fachkonferenz Mathematik/Naturwissenschaften

V. Kell • F. Klinker • J. Stümmler

Formelsammlung Mathematik

FHR/AHR am Berufskolleg

Formelsammlung Mathematik

FHR/AHR am Berufskolleg

Vera Kell [1], Dr. Frank Klinker [1,*], Jascha Sümmler [2]

[1] Eduard-Spranger-Berufskolleg, Hamm
[2] Berufskolleg Mitte der Stadt Essen

[*] Korrespondenzautor

Version: Oktober 2024

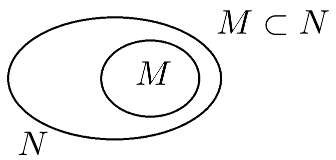
Inhaltsverzeichnis

1 Mengenlehre

1.1 Grundbegriffe der Mengenlehre

Eine **Menge** M ist eine Zusammenfassung von Objekten. Diese Objekte heißen **Elemente** der Menge.

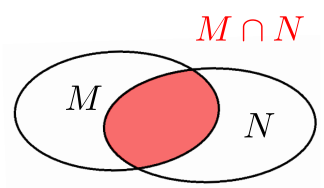
Bezeichnungen:

$\varnothing$	Die **leere Menge** $\varnothing$ ist die Menge, welche kein Element enthält.
$a \in M$	Das Element a ist in der Menge M enthalten.
$a \notin M$	Das Element a ist nicht in der Menge M enthalten.
$\#M$	Die Anzahl der Elemente in der Menge M.
$M \subset N$	M ist **Teilmenge** von N: $M \subset N$, wenn jedes Element aus M auch Element aus N ist. 

1.2 Mengenoperationen

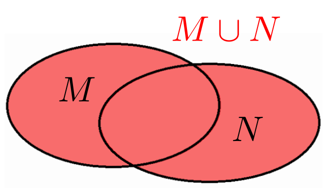
Die **Schnittmenge** $M \cap N$ besteht aus allen Elementen, die sowohl in M und in N enthalten sind:

$$\boxed{a \in M \cap N, \text{ wenn } a \in M \textbf{ und } a \in N}$$



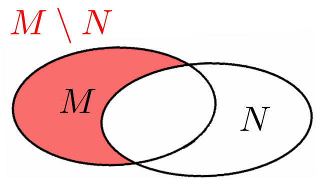
Die **Vereinigungsmenge** $M \cup N$ besteht aus allen Elementen, die in einer der Mengen M oder N enthalten sind:

$$\boxed{a \in M \cup N, \text{ wenn } a \in M \textbf{ oder } a \in N}$$



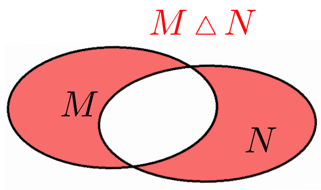
Die **Differenzmenge** $M \setminus N$ besteht aus allen Elementen, die in M enthalten sind, aber nicht in N:

$$\boxed{a \in M \setminus N \text{, wenn } a \in M \textbf{ und } a \notin N}$$



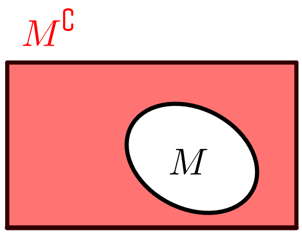
Die **symmetrische Differenzmenge** $M \triangle N$ besteht aus allen Elementen, die in einer der beiden Mengen M oder N enthalten sind, aber nicht in beiden gleichzeitig:

$$\boxed{a \in M \triangle N \text{, wenn } a \in M \cup N \textbf{ und } a \notin M \cap N}$$



Wenn M selbst Teilmenge einer größeren Menge ist, dann kann man die **Komplementmenge** $M^{\complement}$ (oder $\bar{M}$) bilden. Sie besteht aus allen Elementen, die nicht in M liegen:

$$\boxed{a \in M^{\complement} \text{, wenn } a \notin M}$$



Grundlegende Eigenschaften:

- Für alle Mengen M gilt $\emptyset \subset M$ und $M \subset M$.
- $M = N$ gilt genau dann, wenn $M \subset N$ und $N \subset M$.
- $M \cap \emptyset = \emptyset$, $M \cup \emptyset = M$
- $M \cap (N \cup R) = (M \cap N) \cup (M \cap R)$
- $M \cup (N \cap R) = (M \cup N) \cap (M \cap R)$
- $M \setminus (N \cap R) = (M \setminus N) \cup (M \setminus R)$
- Ist $M \cap N = \emptyset$, dann ist $M \setminus N = M$ und $N \setminus M = N$.
- $M \triangle N = \big(M \setminus N\big) \cup \big(N \setminus M\big) = \big(M \cup N\big) \setminus \big(N \cap M\big)$
- $M \setminus N = M \cap N^{\complement}$

- $M \cup N = (M \cap N) \cup (M \cap N^\complement) \cup (M^\complement \cap N)$

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(M)$ einer Menge M besteht aus allen Teilmengen der Menge M:

$$\boxed{\mathcal{P}(M) = \{N \mid N \subset M\}}$$

Die Elemente der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ sind selbst Mengen.

Eigenschaften:

- $\varnothing, M \in \mathcal{P}(M)$
- $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$
- Sind $N, R \in \mathcal{P}(M)$, dann sind auch $N \cap R, N \cup R, N \setminus R \in \mathcal{P}(M)$.
- Ist $\#M = n$, dann ist $\#\mathcal{P}(M) = 2^n$.

1.3 Die Zahlenbereiche

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$	$0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 1001, \ldots$
Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$	$\ldots, -550, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, 1200, \ldots$
Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$	Brüche; abbrechende und periodische Dezimalzahlen
Reelle Zahlen $\mathbb{R}$	Alle Zahlen der Zahlengerade; alle Dezimalzahlen

Hinzu kommen die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, siehe Abschnitt 13.
Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Wichtige Mengen im Umgang mit Funktionen sind die Teilmengen der reellen Zahlen. Darunter haben die **Intervalle** eine herausragende Bedeutung.
Man unterscheidet abgeschlossene, offene und halboffene Intervalle, je nachdem ob beide Randpunkte, kein Randpunkt oder ein Randpunkt zum Intervall gehören.
Dabei sind $+\infty$ und $-\infty$ als offene Ränder ausdrücklich zugelassen.

Für $a, b \in \mathbb{R}$ schreibt man:

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} && \text{abgeschlossen} \\
]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} && \text{offen} \\
]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} && \text{halboffen} \\
[a, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} && \text{halboffen} \\
]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} && \text{halboffen} \\
]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} && \text{offen} \\
[a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} && \text{halboffen} \\
]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} && \text{offen}
\end{aligned}$$

Weitere geläufige Bezeichnungen für die letzten vier Intervalle sind

$$]-\infty, b] = \mathbb{R}^{\leq b}, \quad]-\infty, b[= \mathbb{R}^{<b}, \quad [a, +\infty[= \mathbb{R}^{\geq a}, \quad]a, +\infty[= \mathbb{R}^{>a}.$$

Als weitere Schreibweisen nutzt man $\mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^{>0}$ und $\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^{\geq 0}$.

2 Grundlegende Arithmetik, Algebra und Geometrie

2.1 Klammerrechnung

Für alle reellen Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln im Umgang mit Klammern:

Distributivgesetz

$\boxed{a \cdot (b \pm c) = ab \pm ac}$ $\quad$ $\boxed{(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd}$

Binomische Formeln

$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$ $\quad$ $\boxed{(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2}$

2.2 Bruchrechnung

Ein **Bruch** ist eine Zahl der Form $\boxed{\frac{a}{b}}$.

Dabei sind $a \in \mathbb{Z}$ und $b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ zwei Zahlen, die vom **Bruchstrich** getrennt werden.
a heißt **Zähler** und b heißt **Nenner** des Bruchs $\frac{a}{b}$. Der Bruch $\frac{a}{b}$ entspricht der Dezimalzahl, die man bei der Berechnung von $a : b$ erhält.

Ein Bruch entspricht immer entweder einer **abbrechenden** oder **periodischen Dezimalzahl**. Umgekehrt lässt sich jede abbrechende oder periodische Dezimalzahl als Bruch darstellen.
Alle Brüche zusammen bilden die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$.
Für $a \in \mathbb{Z}$ wird der Bruch $\frac{a}{1}$ mit der ganzen Zahl a identifiziert.
Brüche ändern ihren Wert nicht, wenn man sie **erweitert** oder **kürzt**:

Erweitern:	$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ für $c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$
Kürzen:	$\frac{a}{b} = \frac{a : c}{b : c}$ für $c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, welches a und b teilt

Rechenregeln im Umgang mit Brüchen:

$$\boxed{\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}}$$

Spezialfälle:

$$\boxed{\frac{a}{b} \cdot c = c \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b} \quad \text{für } c \in \mathbb{Z}} \qquad \boxed{\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c} \quad \text{für } c \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}}$$

Der **Kehrwert** eines Bruches $\frac{a}{b}$ ist der Bruch $\frac{b}{a}$.

Es gilt insbesondere $\boxed{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1}$

2.3 Potenzrechnung

Potenzschreibweise: $\boxed{a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}}$

a^n heißt **Potenz**. Dabei heißt $a \in \mathbb{R}$ die **Basis** und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ der **Exponent**.
Die folgenden Rechenregeln heißen **Potenzgesetze**:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \qquad \boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}} \qquad \boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n} \qquad \boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$$

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}} \qquad \boxed{a^0 = 1} \qquad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

2.4 Anwendung: Maßvorsätze

Im Zusammenhang mit technischen und physikalischen Größen stößt man oft auf sehr große oder sehr kleine Zahlen. Verwendetet Größenbereiche sind da z. B.

$0{,}000000013\,F$	(elektrische Kapazität)
$12500000\,\Omega$	(elektrischer Widerstand)
$8500000000\,W$	(Leistung deutscher Offshore-Windparks, 2023)
$0{,}00000000008\,m$	(typischer Atomradius)
$9460000000000000\,m$	(ein Lichtjahr)

Zur besseren Handhabbarkeit und Vergleichbarkeit solcher Größen nutzt man für die Zehnerpotenzen spezielle **Maßvorsätze** (oder **Präfixe**), die man den Einheiten voranstellt. Diese Maßvorsätze sind:

Präfix	Q	R	Y	Z	E	P	T	G	M	k	h	da
Name	Quetta	Ronna	Yotta	Zetta	Exa	Peta	Tera	Giga	Mega	Kilo	Hekto	Deka
Zehnerpotenz	10^{30}	10^{27}	10^{24}	10^{21}	10^{18}	10^{15}	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{1}

Präfix	d	c	mm	μ	n	p	f	a	z	y	r	q
Name	Dezi	Zenti	Milli	Mikro	Nano	Piko	Fempto	Atto	Zepto	Yokto	Ronto	Quekto
Zehnerpotenz	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}	10^{-18}	10^{-21}	10^{-24}	10^{-27}	10^{-30}

Die oben genannten Beispiele werden damit zu

$13 \cdot 10^{-9}\,F = 13\,nF$	(elektrische Kapazität)
$12{,}5 \cdot 10^{6}\,\Omega = 12{,}5\,M\Omega$	(elektrischer Widerstand)
$8{,}5 \cdot 10^{9}\,W = 8{,}5\,GW$	(Leistung deutscher Offshore-Windparks, 2023)
$80 \cdot 10^{-12}\,m = 80\,pm$	(typischer Atomradius)
$9{,}46 \cdot 10^{15}\,m = 9{,}46\,Pm$	(ein Lichtjahr)

2.5 Wurzelrechnung

Quadratwurzel aus $a \geq 0$	$\sqrt{a} = c$ mit $c^2 = a,\ c \geq 0$
Dritte Wurzel aus $a \in \mathbb{R}$	$\sqrt[3]{a} = c$ mit $c^3 = a$
***n*-te Wurzel** aus $\begin{cases} a \geq 0 & (n \in \mathbb{N} \text{ gerade}) \\ a \in \mathbb{R} & (n \in \mathbb{N} \text{ ungerade}) \end{cases}$	$\sqrt[n]{a} = c$ mit $\begin{cases} c^n = a,\ c \geq 0 \\ c^n = a \end{cases}$

Verbindung zwischen Wurzeln und Potenzen:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

Die **Rechenregeln für Wurzeln** oder **Wurzelgesetze**:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}} \quad \boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}} \quad \boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}} \quad \boxed{\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$$

2.6 Logarithmusrechnung

$$\boxed{\log_a(b) \text{ ist diejenige Zahl } x \text{, für die } a^x = b \text{ ist}}$$

Man spricht $\log_a(b)$ als **Logarithmus von** b **zur Basis** a.
Es gilt:

$$\boxed{\log_a(a^n) = n} \quad \boxed{\log_a(1) = 0} \quad \boxed{\log_a(a) = 1}$$

Logarithmengesetze:
Logarithmen zur gleichen Basis:

$$\boxed{\log_a(b \cdot c) = \log_a(b) + \log_a(c)} \qquad \boxed{\log_a(b : c) = \log_a(b) - \log_a(c)}$$

$$\boxed{\log_a(b^n) = n \cdot \log_a(b)}$$

Logarithmen zu unterschiedlichen Basen:

$$\boxed{\log_b(c) = \frac{\log_a(c)}{\log_a(b)}}$$

Bezeichnungen für Logarithmen zu speziellen Basen:

Dekadischer Logarithmus	**Dualer Logarithmus**	**Natürlicher Logarithmus**
$\lg(b) = \log_{10}(b)$	$\operatorname{ld}(b) = \log_2(b)$	$\ln(b) = \log_e(b)$

Hier bezeichnet $e = 2{,}718281828459\ldots$ die **Eulersche Zahl**.

2.7 Lösungen linearer Gleichungen

Bei einer **linearen Gleichung** $ax + b = 0$ muss stets $a \neq 0$ sein.

$$\boxed{\text{Es gibt genau eine Lösung } x = -\frac{b}{a}}$$

2.8 Lösungen quadratischer Gleichungen

Bei einer **quadratischen Gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ muss stets $a \neq 0$ sein. Alle Lösungen der quadratischen Gleichungen berechnet man mit

$$\boxed{p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}}$$

Es können folgende Fälle auftreten:

$p^2 > 4q$	genau zwei Lösungen	$x_\pm = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (**pq-Formel**)
$p^2 = 4q$	genau eine Lösung	$x = -\frac{p}{2}$
$p^2 < 4q$	keine Lösung	

2.9 Prozentrechnung

G: **Grundwert**
p: **Prozentsatz** in %
W: **Prozentwert**

Basisformel: $\boxed{W = G \cdot \frac{p}{100}}$

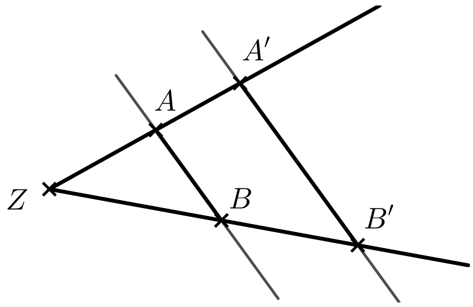
Abgleitete Formeln: $G = 100 \cdot \frac{W}{p}$ und $p = 100 \cdot \frac{W}{G}$

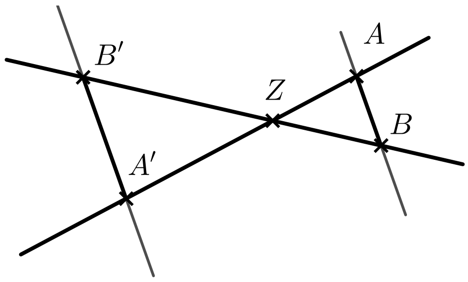
2.10 Kongruenz, Ähnlichkeit und die Strahlensätze

Zwei Dreiecke heißen **kongruent**, wenn die Seitenlängen des einen mit den Seitenlängen des anderen übereinstimmen.
Zwei Dreiecke sind genau dann kongruent, wenn Sie durch Verschiebung, Drehung und/oder Achsenspiegelung auseinander hervorgehen.

Zwei Dreiecke heißen **ähnlich**, wenn die Winkel des einen mit den Winkeln des anderen übereinstimmen.
Zwei Dreiecke sind genau dann ähnlich, wenn Sie durch Verschiebung, Drehung, Achsenspiegelung und/oder zentrischer Streckung auseinander hervorgehen.
Zwei kongruente Dreiecke sind ähnlich.

Aus der Ähnlichkeit von Dreiecken folgen die **Strahlensätze**:





Werden zwei Strahlen von parallelen Geraden gekreuzt, dann gelten folgende Verhältnisgleichungen, die **Strahlensätze** heißen:

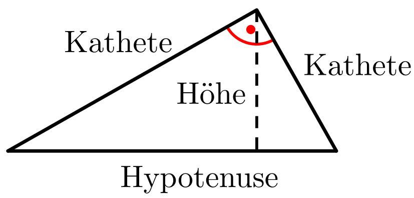
$$\boxed{\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZB'}}} \qquad \boxed{\frac{\overline{ZA}}{\overline{ZA'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}}$$

2.11 Die Satzgruppe des Pythagoras

Die Satzgruppe des Pythagoras beschreibt in **rechtwinkligen Dreiecken** Beziehungen zwischen

- den Katheten,
- der Hypotenuse,
- den Hypotenusenabschnitten und
- der Höhe.

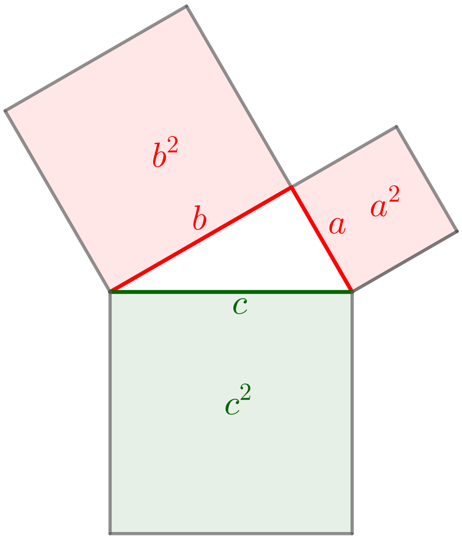
Bezeichnungen:



Der Satz des Pythagoras:

Die Summe der Quadrate über den Katheten entspricht dem Quadrat über der Hypotenuse:

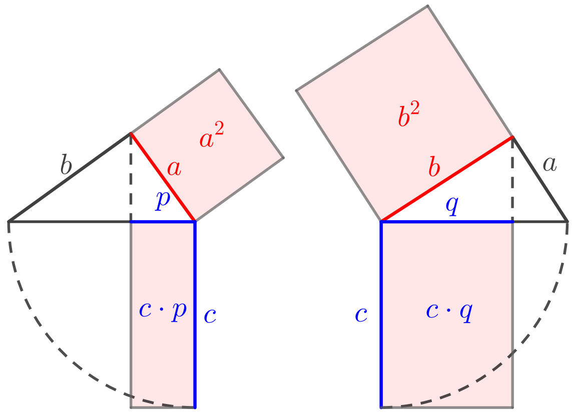
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



Der Kathetensatz:

Das Quadrat über einer Kathete entspricht dem Rechteck aus zugehörigem Hypotenusenabschnitt und Hypotenuse:

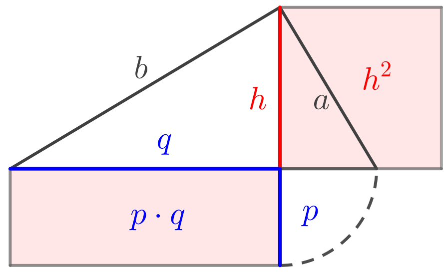
$$\boxed{a^2 = c \cdot p} \qquad \boxed{b^2 = c \cdot q}$$



Der Höhensatz:

Das Quadrat über der Höhe entspricht dem Rechteck aus den zwei Hypotenusenabschnitten:

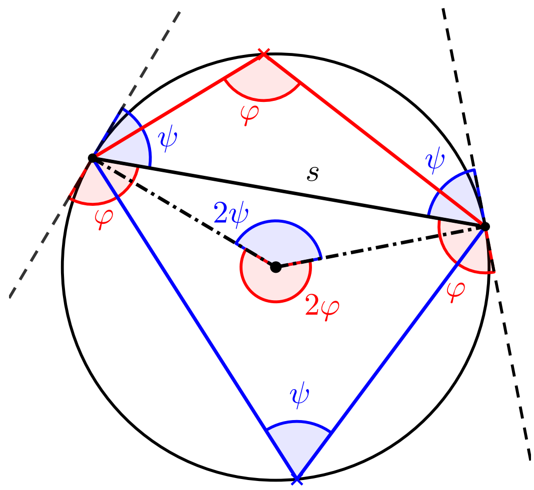
$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$



2.12 Der Satz des Thales und der Umfangswinkelsatz

Der Umfangswinkelsatz:

Alle Dreiecke über der Sehne s eines Kreises haben den selben **Umfangswinkel** φ oder $\psi = 180° - \varphi$, je nachdem, ob der Mittelpunkt des Kreises innerhalb oder außerhalb des Dreiecks liegt, das aus Sehne und Umfangspunkt gebildet wird.



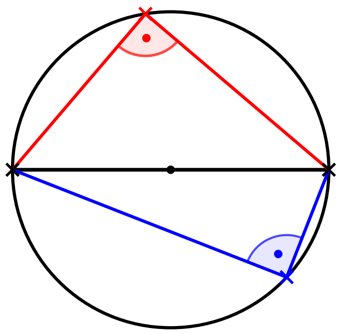
Die **Sehnen-Tangentenwinkel** ist genauso groß wie der Umfangswinkel.

Der **Mittelpunktswinkel** ist doppelt so groß wie der Umfangswinkel.
Der **Satz des Thales** ist der wichtige Spezialfall des Umfangswinkelsatzes zu den Winkeln $\varphi = \psi = 90°$:

Satz des Thales:

Alle Dreiecke, die den Durchmesser eines Kreises als Hypotenuse besitzen und deren dritter Punkt auf dem Kreis liegt, sind rechtwinklig.

Umgekehrt liegen die Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt in der Mitte der Hypotenuse liegt.



3 Lineare Gleichungssysteme

3.1 Lineare Gleichungssysteme

Ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** hat folgende allgemeine Form:

$$\boxed{\begin{aligned} a_{1,1}\cdot x_1 + a_{1,2}\cdot x_2 + \ldots + a_{1,n}\cdot x_n &= b_1 \\ a_{2,1}\cdot x_1 + a_{2,2}\cdot x_2 + \ldots + a_{2,n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}\cdot x_1 + a_{m,2}\cdot x_2 + \ldots + a_{m,n}\cdot x_n &= b_m \end{aligned}}$$

Im Fall von m Gleichungen und n Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spricht man von einem $m \times n$**-LGS**
Die $a_{i,j}$ heißen **Koeffizienten** und die b_i **rechte Seite** des LGS.
Im Fall $m = n$ spricht man von einem **quadratischen LGS** der Größe $n \times n$.
Eine **Lösung eines** $m \times n$**-LGS** ist ein n-Tupel von Zahlen, für das alle m Gleichungen erfüllt sind, wenn man die Variablen durch diese Zahlen ersetzt.

3.2 Dreieckform und Rückwärts-Einsetzen

Ein quadratisches LGS liegt in **spezieller Dreieckform** vor, wenn es die folgende Gestalt hat

$$\boxed{\begin{aligned} a_{1,1}\cdot x_1 + a_{1,2}\cdot x_2 + \ldots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,2}\cdot x_2 + \ldots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{n,n}x_n &= b_n \\ \\ \text{wobei alle Diagonalkoeffizienten } a_{1,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,n} &\neq 0 \end{aligned}}$$

Lässt sich ein quadratisches LGS in spezielle Δ-Form überführen, dann hat das LGS genau eine Lösung.

Diese Lösung erhält man in n Schritten durch **Rückwärts-Einsetzen**:

1. Schritt: Man bestimmt aus der letzten Gleichung die Lösung für x_n

2. Schritt: Man bestimmt aus der zweitletzten Gleichung mit x_n die Lösung für x_{n-1}

3. Schritt: Man bestimmt aus der drittletzten Gleichung mit x_n, x_{n-1} die Lösung für x_{n-2}

$\vdots$

$n-1$. Schritt: Man bestimmt aus der zweiten Gleichung mit $x_3, \ldots, x_n$ die Lösung für x_2

n. Schritt: Man bestimmt aus der ersten Gleichung mit $x_2, \ldots, x_n$ die Lösung für x_1

3.3 Der Gauß-Algorithmus

Folgende drei elementare Umformungen (**Gaußschritte**) ändern die Lösungen eines LGS nicht:

Typ 1: Zeilentausch

Typ 2: Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl ungleich Null oder Division einer Gleichung durch eine Zahl ungleich Null

Typ 3: Addieren einer Gleichung zu einer anderen oder Subtraktion einer Gleichung von einer anderen

Man die Umformungen vom Typ 2 und Typ 3 in folgender Form gleichzeitig anzuwenden:

Typ 4: Addieren des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen oder Subtraktion des Vielfachen einer Gleichung von einer anderen

Mit Hilfe der Umformungen vom Typ 1 bis Typ 4 lässt sich ein LGS vereinfachen und gegebenenfalls in die spezielle Δ-Form überführen.
Man spricht vom **Gauß-Algorithmus** oder einfach vom **Additionsverfahren**)

3.4 Lösungsstruktur kleiner quadratischer LGS

3.4.1 Lösungsstruktur von 2×2-LGS

Fall 1	**Fall 2**	**Fall 3**
$\begin{aligned} 2x - 5y &= 3 \\ 3y &= -19 \end{aligned}$	$\begin{aligned} x - 3y &= -1 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 3x + y &= 3 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$
spezielle Δ-Form genau eine Lösung (durch rückwärts Einsetzen)	'allgemeine' Δ-Form keine Lösung (letzte Gleichung nicht lösbar)	'allgemeine' Δ-Form unendlich viele Lösungen

3.4.2 Lösungsstruktur von 3×3-LGS

Fall 1	**Fall 2a**	**Fall 2b**
$\begin{aligned} -3x - 8y - 3z &= -3 \\ -3y - 6z &= 6 \\ 3z &= -3 \end{aligned}$	$\begin{aligned} -3x - 8y - 3z &= -3 \\ -5y + 12z &= -12 \\ 0 &= 2 \end{aligned}$	$\begin{aligned} -3x - 8y - 3z &= -3 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$
spezielle Δ-Form genau eine Lösung (durch rückwärts Einsetzen)	'allgemeine' Δ-Form keine Lösung (letzte Gleichung nicht lösbar)	'allgemeine' Δ-Form keine Lösung (letzte Gleichung nicht lösbar)

Fall 3a	**Fall 3b**
$\begin{aligned} -3x - 8y - 3z &= -3 \\ -5y + 12z &= -12 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} -3x - 8y - 3z &= -3 \\ 0 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$
'allgemeine' Δ-Form unendlich viele Lösungen	'allgemeine' Δ-Form unendlich viele Lösungen

4 Folgen und Reihen

4.1 Grundbegriffe zu Folgen und Reihen

Eine **Zahlenfolge** oder kurz **Folge** ist eine geordnete unendliche Menge von Zahlen $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$.
Man schreibt für eine Folge abkürzend (a_n), also $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$.
Die Zahlen a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, heißen **Folgenglieder**.

Eine **Reihe** ist eine spezielle Folge $(s_n) = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$. Ihre Folgenglieder s_k sind Summen der Folgenglieder einer Folge (a_n). Für $k = 0, 1, 2 \ldots$ ist

$$s_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\,,$$

4.2 Arithmetische und geometrische Folgen und Reihen

	explizite Definition	**rekursive Definition**
Arithmetische Folge	$a_k = a_0 + k \cdot d$	$a_k = a_{k-1} + d$
Geometrische Folge	$a_k = a_0 \cdot q^k$	$a_k = a_{k-1} \cdot q$

Arithmetische Reihe	$s_k = \frac{k+1}{2} \cdot (a_0 + a_k)$
Geometrische Reihe	$s_k = a_0 \cdot \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$

4.3 Grenzwert einer konvergenten Zahlenfolge

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = g \iff \begin{cases} \text{Für alle } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } n_\epsilon, \text{ sodass} \\ |a_n - g| < \epsilon \text{ für alle } n > n_\epsilon \end{cases}}$$

Man sagt: Für $n > n_\epsilon$ liegen alle Folgenglieder a_n in der **ϵ-Umgebung** von g. Besitzt (a_n) einen **Grenzwert** $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, dann heißt die Folge **konvergent**, andernfalls heißt sie **divergent**.

4.4 Grenzwert der geometrischen Reihe

Die geometrische Reihe (s_n) mit $s_k = a_0 \sum\limits_{i=0}^{k} q^i$ konvergiert nur, wenn $-1 < q < 1$ ist. Es gilt:

$$\boxed{|q| < 1 \implies \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a_0}{1-q}}$$

4.5 Schranken von Zahlenfolgen

S_u heißt **untere Schranke** der Zahlenfolge $(a_n) \iff a_n \geq S_u$ für alle n

S_o heißt **obere Schranke** der Zahlenfolge $(a_n) \iff a_n \leq S_o$ für alle n

Hat (a_n) eine $\left\{\begin{matrix}\text{untere Schranke}\\ \text{obere Schranke}\end{matrix}\right\}$, dann heißt (a_n) $\left\{\begin{matrix}\textbf{nach unten beschränkt}\\ \textbf{nach oben beschränkt}\end{matrix}\right\}$

4.6 Monotonie von Zahlenfolgen

Die Folge (a_n) **steigt monoton** $\iff a_{n+1} \geq a_n$ für alle n

Die Folge (a_n) **steigt streng monoton** $\iff a_{n+1} > a_n$ für alle n

Die Folge (a_n) **fällt monoton** $\iff a_{n+1} \leq a_n$ für alle n

Die Folge (a_n) **fällt streng monoton** $\iff a_{n+1} < a_n$ für alle n

4.7 Nützliche Grenzwertsätze

Monotoniekriterium

Ist (a_n) $\left\{\begin{matrix}\text{monoton steigend}\\ \text{monoton fallend}\end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix}\text{nach oben beschränkt}\\ \text{nach unten beschränkt}\end{matrix}\right\}$, dann ist (a_n) konvergent.

Einschachtelungskriterium

Sind (a_n) und (b_n) konvergent mit gleichem Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$ und gilt $a_k \leq c_k \leq b_k$ für alle Folgenglieder von (c_n), dann konvergiert (c_n) ebenfalls mit Grenzwert g.

Kriterium für Summen und Produkte

Sind (a_n) und (b_n) konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g_1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g_2$, dann konvergieren Summe und Produkt der Folgen ebenfalls mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = g_1 \pm g_2 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = g_1 \cdot g_2.$$

Gilt zusätzlich noch $b_k, g_2 \neq 0$, dann konvergiert auch der Quotient der Folgen mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{g_1}{g_2}.$$

4.8 Anwendung: Zinseszins, Spar-, Renten- und Ratenpläne

4.8.1 Entwicklung eines verzinsten Grundkapitals

K_0	Anfangskapital
p	Zinsen pro Zinsperiode in %, typische Periode: ein Jahr
k	Anzahl der Sparraten pro Zinsperiode, typisch: $k = 1, 12$ oder 365 (Jahr, Monat oder Tag)
$q = 1 + \frac{p}{100 \cdot k}$	Zinsfaktor
n	Anzahl der vollen Zinsperioden
ℓ	Anzahl der zusätzlichen Verzinsungen innerhalb einer begonnenen Zinsperiode, $0 \leq \ell < k$
K	Kapital nach $(n \cdot k + \ell)$-maliger Verzinsung

$$\boxed{K = K_0 \cdot q^{n \cdot k + \ell}}$$

4.8.2 Entwicklung eines Sparplans

S_0	Regelmäßige Sparzahlung

p	Zinsen pro Zinsperiode in %, typische Periode: ein Jahr
k	Anzahl der Sparzahlungen pro Zinsperiode, typisch: $k = 1$ oder 12 (Jahr oder Monat)
$q = 1 + \frac{p}{100 \cdot k}$	Zinsfaktor
n	Anzahl der vollen Zinsperioden
ℓ	Anzahl der zusätzlichen Sparnzahlungen innerhalb einer begonnenen Zinsperiode, $0 \leq \ell < k$
S	Kapital nach $(n \cdot k + \ell)$-maliger Einzahlung

vorschüssig:	$S = S_0 \cdot q \cdot \frac{q^{n \cdot k + \ell} - 1}{q - 1}$
nachschüssig:	$S = S_0 \cdot \frac{q^{n \cdot k + \ell} - 1}{q - 1}$

4.8.3 Entwicklung eines Renten-/Ratenplans

K_0	Kapital-/Kreditbetrag zu Beginn der Verrentung/Ratenzahlung
R	Regelmäßige Renten-/Ratenzahlung
p	Zinsen pro Zinsperiode in %, typische Periode: ein Jahr
k	Anzahl der Renten-/Ratenzahlungen pro Zinsperiode typisch: $k = 1$ oder 12 (Jahr oder Monat)
$q = 1 + \frac{p}{100 \cdot k}$	Zinsfaktor
n	Anzahl der vollen Zinsperioden

ℓ	Anzahl der zusätzlichen Renten-/Ratenzahlungen innerhalb einer begonnenen Zinsperiode, $0 \le \ell < k$
K	Barwert nach $(n \cdot k + \ell)$-maliger Renten-/Ratenzahlung

vorschüssig:	$K = K_0 \cdot q^{n \cdot k + \ell} - R \cdot q \cdot \dfrac{q^{n \cdot k + \ell} - 1}{q - 1}$
nachschüssig:	$K = K_0 \cdot q^{n \cdot k + \ell} - R \cdot \dfrac{q^{n \cdot k + \ell} - 1}{q - 1}$

Durch Nullsetzen dieser Formeln ergeben sich die Höhe der regelmäßigen Renten-/Ratenzahlung oder die Laufzeit der Zahlungen:

1. **Laufzeit der Renten-/Ratenzahlung bei gegebener Rentenhöhe**

vorschüssig:	$n \cdot k + \ell = \dfrac{\ln(q \cdot R) - \ln\left(q \cdot R - (q-1) \cdot K_0\right)}{\ln(q)}$
nachschüssig:	$n \cdot k + \ell = \dfrac{\ln(R) - \ln\left(R - (q-1) \cdot K_0\right)}{\ln(q)}$

2. **Höhe der regelmäßigen Renten-/Ratenzahlung bei gegebener Laufzeit**

vorschüssig:	$R = K_0 \cdot \dfrac{q^{n \cdot k + \ell}(q-1)}{q \cdot (q^{n \cdot k + \ell} - 1)}$
nachschüssig:	$R = K_0 \cdot \dfrac{q^{n \cdot k + \ell}(q-1)}{q^{n \cdot k + \ell} - 1}$

5 Schranken, Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

5.1 Grundbegriffe zu Funktionen

Eine **Funktion** f ordnet einer reellen Zahl x eine reelle Zahl $f(x)$ zu.
$f(x)$ heißt der **Funktionswert** der Funktion f an der **Stelle** x.
Die Werte $x \in \mathbb{R}$, die man in die Funktion einsetzen kann, bilden den **Definitionsbereich** von f. Man schreibt $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}$.

Die Menge, in der eine Funktion ihre Werte annimmt, heißt **Zielbereich**. In den hier vorliegenden Situationen ist der Zielbereich immer die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Man schreibt $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$. Eine Einschränkung des Zielbereichs auf eine echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist möglich.

Die Werte $f(x) \in \mathbb{R}$, die von der Funktion tatsächlich angenommen werden, bilden den **Wertebereich** (auch **Bildbereich**) der Funktion f. Man schreibt $\mathbb{W}_f \subset \mathbb{R}$.

$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ heißt		
injektiv	$\iff$	$(f(x) = f(y) \implies x = y)$ oder $(x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$ D. h. : die Bilder der Funktion f sind eindeutig
surjektiv	$\iff$	Für alle $y \in \mathbb{R}$ gibt es ein $x \in \mathbb{D}_f$, sodass $f(x) = y$. D. h.: jeder Wert im Zielbereich wird getroffen
bijektiv	$\iff$	f ist injektiv und surjektiv

$$\left.\begin{array}{c}\textbf{monoton steigend}\\ \textbf{streng monoton steigend}\\ \textbf{monoton fallend}\\ \textbf{streng monoton fallend}\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} f(x_1) \leq f(x_2)\\ f(x_1) < f(x_2)\\ f(x_1) \geq f(x_2)\\ f(x_1) > f(x_2)\end{array}\right.$$

für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f$ mit $x_1 < x_2$

- Schränkt man den Zielbereich einer Funktion von vornherein auf den Wertebereich ein, dann ist eine injektive Funktion auch bijektiv.
- Jede streng monotone Funktion ist injektiv.

Der **Graph** einer Funktion $f(x)$ ist die Punktmenge

$$\boxed{\left\{(a/f(a)) \,\middle|\, a \in \mathbb{D}_f\right\}}$$

Mithilfe dieser Punkte kann man den Graph in einem Koordinatensystem skizzieren.

- Eine Funktion $f(x)$ heißt **achsensymmetrisch zur Parallelen zur y-Achse durch** $x = x_0$, wenn der Graph von $f(x)$ bei einer Spiegelung an dieser Geraden in sich über geht.
  Rechnerisch lässt sich das wie folgt überprüfen:

$$\boxed{f(x_0 - x) = f(x_0 + x)}$$

- Eine Funktion $f(x)$ heißt **punktsymmetrisch zum Punkt** (x_0/y_0), wenn der Graph von $f(x)$ bei einer Drehung um 180° in sich über geht. Rechnerisch lässt sich das wie folgt überprüfen:

$$\boxed{f(x_0+x) - y_0 = y_0 - f(x_0-x)}$$

Wichtige Spezialfälle:

- Eine Funktion heißt **gerade**, wenn sie achsensymmetrisch zur y-Achse ist, also
$$\boxed{f(x) = f(-x)}$$
- Eine Funktion heißt **ungerade**, wenn sie punktsymmetrisch zum Ursprung $(0/0)$ ist, also
$$\boxed{f(x) = -f(-x)}$$

5.2 Umkehrfunktion

Wenn eine Funktion $f : \mathbb{D}_f \longrightarrow \mathbb{W}_f$ injektiv ist, dann gibt es zu dieser Funktion eine **Umkehrfunktion**.

Für die Umkehrfunktion schreibt man

$$\boxed{f^{-1} : \mathbb{D}_{f^{-1}} \longrightarrow \mathbb{W}_{f^{-1}}}$$

Dabei kehren sich Definitionsbereich und Wertbereich um, d. h.

$$\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f \qquad \text{und} \qquad \mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{D}_f$$

Eigenschaften:

- Zur Berechnung von $f^{-1}(x)$ kann man in manchen Fällen die Gleichung $f(x) = y$ nach x auflösen und anschließend die Namen der Variablen tauschen.
- Den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ erhält man, indem man den Graphen von $f(x)$ an der Winkelhalbierenden $y = x$ spiegelt.

5.3 Schranken monotoner Funktionen

S_o ist **obere Schranke** von f

$\Longleftrightarrow$ $f(x) \leq S_o$ für alle x

S_o ist **kleinste obere Schranke** von f

$\Longleftrightarrow$ S_o ist obere Schranke <u>und</u> für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein x_ϵ, sodass $f(x) > S_o - \epsilon$ für alle $x > x_\epsilon$

$$
\begin{aligned}
& S_u \text{ ist } \textbf{untere Schranke} \text{ von } f \\
\Longleftrightarrow\ & f(x) \geq S_u \text{ für alle } x \\
& S_u \text{ ist } \textbf{größte untere Schranke} \text{ von } f \\
\Longleftrightarrow\ & S_u \text{ ist untere Schranke } \underline{\text{und}} \text{ für alle } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } x_\epsilon \text{, sodass} \\
& f(x) < S_u + \epsilon \text{ für alle } x > x_\epsilon
\end{aligned}
$$

5.4 Endliche Grenzwerte von Funktionen

Die Zahl g heißt **Grenzwert** der Funktion f an der Stelle x_0 und man schreibt $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist (hier ist $x_0 = \pm\infty$ erlaubt):

$$
\lim_{x \to \infty} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{für alle } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } x_\epsilon, \text{ sodass} \\ |f(x) - g| < \epsilon \text{ für alle } x > x_\epsilon \end{cases}
$$

$$
\lim_{x \to -\infty} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{für alle } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } x_\epsilon, \text{ sodass} \\ |f(x) - g| < \epsilon \text{ für alle } x < x_\epsilon \end{cases}
$$

$$
\lim_{x \to x_0} f(x) = g \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \text{für alle } \epsilon > 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0, \text{ sodass} \\ |f(x) - g| < \epsilon \text{ für alle } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \end{cases}
$$

5.5 Stetigkeit von Funktionen

$$
f \text{ ist } \textbf{stetig} \text{ im Punkt } \big(x_0 / f(x_0)\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)
$$

5.6 Unendliche Grenzwerte von Funktionen

$\pm\infty$ ist **unendlicher Grenzwert** der Funktion f an der Stelle x_0, wenn eine der folgenden Bedingungen gilt (hier ist $x_0 = \pm\infty$ erlaubt):

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty \iff \begin{cases} \text{für alle } C \gtrless 0 \text{ gibt es ein } x_C, \text{ sodass} \\ f(x) \gtrless C \text{ für alle } x > x_C \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \pm\infty \iff \begin{cases} \text{für alle } C \gtrless 0 \text{ gibt es ein } x_C, \text{ sodass} \\ f(x) \gtrless C \text{ für alle } x < x_C \end{cases}$$

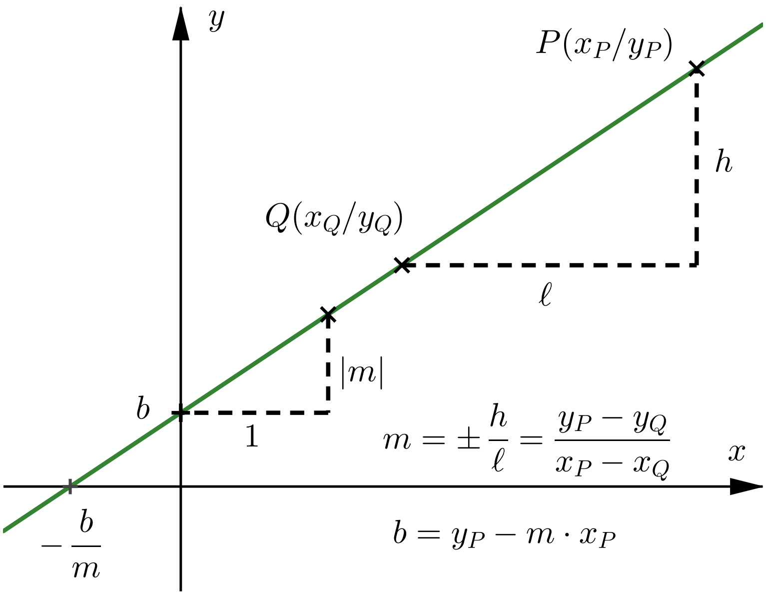
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \iff \begin{cases} \text{für alle } C \gtrless 0 \text{ gibt es ein } \delta > 0, \text{ sodass} \\ f(x) \gtrless C \text{ für alle } x_0 - \delta < x < x_0 + \delta \end{cases}$$

6 Ganzrationale Funktionen

6.1 Lineare Funktionen/Geraden

Eine Funktion, die sich in die Form $\boxed{f(x) = mx + b}$ umrechnen lässt, heißt **lineare Funktion**.

m:	**Steigung**
b:	**y-Achsenabschnitt**



Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.		
$m > 0$	$m < 0$	$m = 0$
Gerade steigt	Gerade fällt	Gerade waagerecht

Definitionsbereich	$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
Wertebereich	$\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$ falls $m \neq 0$ und $\mathbb{W}_f = \{b\}$ falls $m = 0$

Symmetrie:

- Eine lineare Funktion ist punktsymmetrisch zu jedem Punkt des Graphen.
- Eine lineare Funktion ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, also ungerade, wenn $b = 0$ ist.

Senkrechte Geraden:

Zwei Geraden $f_1(x) = m_1 x + b_1$ und $f_2(x) = m_2 x + b_2$ sind genau dann senkrecht zueinander, wenn $m_1 \cdot m_2 = 1$.

6.2 Quadratische Funktionen/Parabeln

Eine Funktion, die sich in eine der Formen aus der Tabelle umrechnen lässt, heißt **quadratische Funktion**:

Normalform (NF)	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$a \neq 0, b, c$ Zahlen
Scheitelpunktform (SPF)	$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$	$a \neq 0, x_S, y_S$ Zahlen
Nullstellenform (NSTF)	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	$a \neq 0, x_1, x_2$ Zahlen

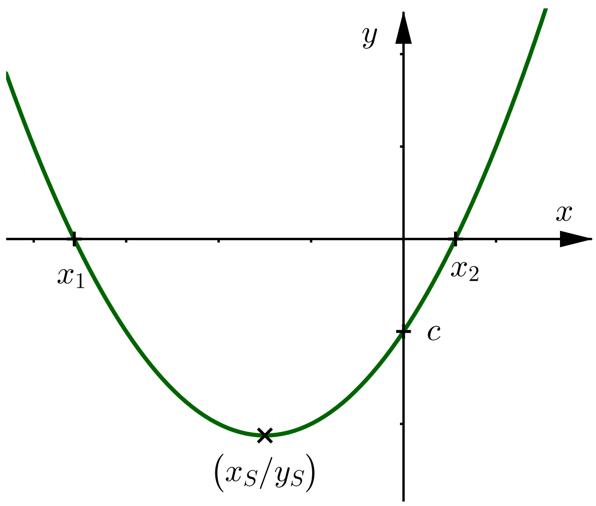
Die NF und die SPF gibt es immer. Die NSTF gibt es nur, wenn $y_S \cdot a \leq 0$.

Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**

Definitionsbereich	$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
Wertebereich	$\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^{\geq y_S}$ falls $a > 0$ und $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^{\leq y_S}$ falls $a < 0$

Wichtige Beziehungen:

(NF $\longrightarrow$ SPF)	$x_S = -\frac{b}{2a}$ $y_S = f(x_S)$
(NSTF $\longrightarrow$ SPF)	$x_S = \frac{x_1 + x_2}{2}$ $y_S = f(x_S)$
(NF, SPF $\longrightarrow$ NSTF)	$f(x_1) = 0$ $f(x_2) = 0$



Symmetrie:

- Eine quadratische Funktion ist achsensymmetrisch zur Senkrechten durch ihren Scheitelpunkt.
- Eine quadratische Funktion ist nur dann gerade, also achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn $c = 0$ ist.

6.3 Ganzrationale Funktionen und ihre Eigenschaften

Lineare und quadratische Funktionen sind Spezialfälle einer **ganzrationalen Funktion** (auch **Polynom**):

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ a_0, \ldots, a_n \text{ Zahlen}, \;\; a_n \neq 0 \end{array}}$$

n: **Grad von** $f(x)$

a_n: **Leitkoeffizient von** $f(x)$

a_0: y**-Achsenabschnitt von** $f(x)$

Definitionsbereich	$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
Wertebereich	n ungerade: $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$ n gerade: $\mathbb{W}_f$ nach $\begin{Bmatrix}\text{unten}\\ \text{oben}\end{Bmatrix}$ beschränkt, falls $\begin{Bmatrix}a_n > 0\\ a_n < 0\end{Bmatrix}$

Anzahl der Nullstellen und Extrema:

		Anzahl Nullstellen von $f(x)$	Anzahl Extrema von $f(x)$
Grad von $f(x)$	ungerade	mindestens 1 und höchstens Grad	höchstens (Grad−1)
	gerade	höchstens Grad	mindestens 1 und höchstens (Grad−1)

Verhalten für betragsmäßig große x-Werte:

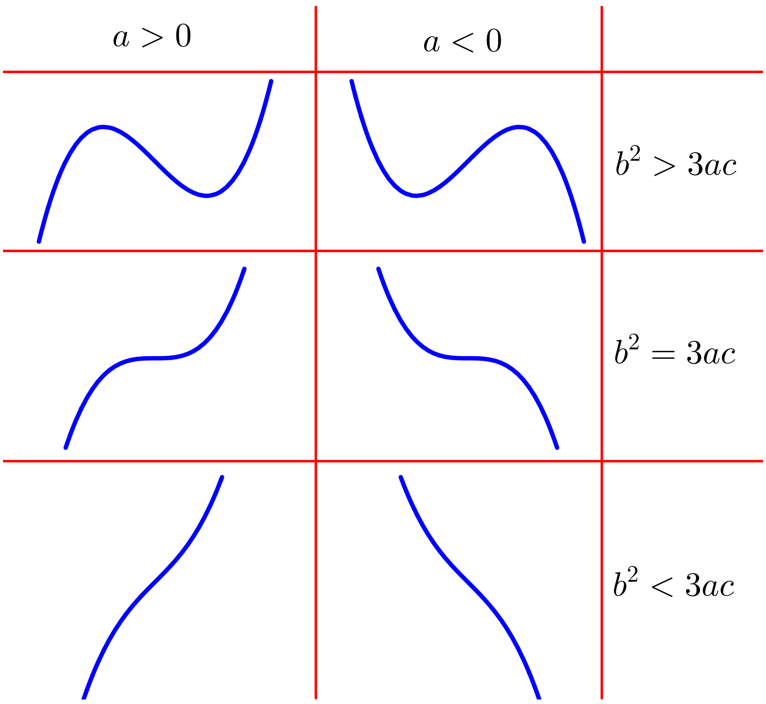
		Leitkoeffizient von $f(x)$	
		größer als 0	kleiner als 0
Grad von $f(x)$	ungerade	von $-\infty$ nach $+\infty$	von $+\infty$ nach $-\infty$
	gerade	von $+\infty$ nach $+\infty$	von $-\infty$ nach $-\infty$

Symmetrie:

- Eine ganzrationale Funktion ist genau dann gerade, also achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn in der Funktion nur gerade Potenzen von x vorkommen, also alle Koeffizienten vor ungeraden Potenzen von x sind Null.
- Eine ganzrationale Funktion ist genau dann ungerade, also punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn in der Funktion nur ungerade Potenzen von x vorkommen, also alle Koeffizienten vor geraden Potenzen von x sind Null.

6.4 Beispiel: Ganzrationale Funktionen vom Grad 3

Der Graph einer ganzrationalen Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ vom Grad 3 hat folgenden typischen Verlauf:



- Eine ganzrationale Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ vom Grad 3 hat höchstens dann mehr als eine Nullstelle, wenn sie zwei Extrema besitzt.

  Das ist genau dann der Fall, wenn $b^2 > 3ac$ ist.

- Zu jeder ganzrationalen Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ vom Grad 3 gibt es einen Punkt, sodass die Funktion punktsymmetrisch zu diesem ist: dieser Punkt ist $\left(\frac{-b}{3a} \,\middle/\, \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^2}\right)$.

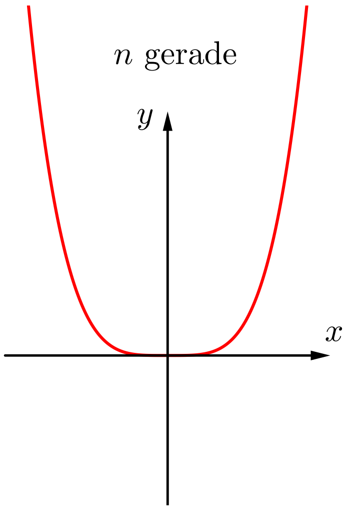
  In diesem Punkt geht der Graph von einer Links- bzw. Rechtskrümmung in eine Rechts- bzw. Linkskrümmung über.

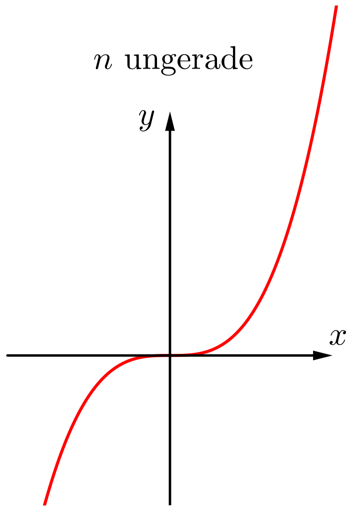
6.5 Spezialfall: Die Potenzfunktionen

Als n**-te Potenzfunktion** bezeichnet man die spezielle ganzrationale Funktion

$$\boxed{f(x) = x^n}$$

Für $n = 1$ erhält man $f(x) = x$ und als Graph die **Winkelhalbierende**. Für $n = 2$ erhält man $f(x) = x^2$ und als Graph die **Normalparabel**.
Die Potenzfunktionen haben für $n \geq 2$ einen charakteristischen Verlauf:





6.6 Faktorisieren ganzrationaler Funktionen

6.6.1 Faktorisierung

Hat eine ganzrationale Funktion $f(x)$ vom Grad n eine Nullstelle $x = x_1$, also $f(x_1) = 0$, dann lässt sich diese als Faktor $(x - x_1)$ **abspalten**.
Das bedeutet, es gibt eine ganzrationale Funktion $g_1(x)$ vom Grad $n - 1$, sodass

$$f(x) = (x - x_1) \cdot g_1(x) \,.$$

Diesen Vorgang des Abspaltens kann man nun mit der 'Restfunktion' $g_1(x)$ wiederholen, bis die verbleibende 'Restfunktion' keine Nullstelle mehr besitzt. Diesen Prozess nennt man **Faktorisieren** und man gelangt so zu einem Produkt

$$f(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots (x - x_r) \cdot g_r(x)$$

mit $g_r(x)$ vom Grad $n - r$ ohne Nullstellen.

Hat $f(x)$ den Grad n und findet man nach und nach n Nullstellen, dann lässt sich $f(x)$ **vollständig faktorisieren:**

$$f(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n) .$$

Hinweise: Die Nullstellen müssen nicht unterschiedlich sein, sie können mehrfach vorkommen. Man spricht dann von einer **mehrfachen Nullstelle**.

Außerdem lässt sich nicht jede ganzrationale Funktion vollständig faktorisieren. Das ist der Fall, wenn die Funktion weniger Nullstellen hat, als ihr Grad erlaubt.

Beispiele: (Es sind jeweils alle Nullstellen abgespalten)

1. $f(x) = x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$
2. $g(x) = 2x^2 + 8x + 8 = 2(x + 2)(x + 2) = 2(x + 2)^2$
3. $h(x) = x^4 + x^3 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)$
4. $k(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2 = (x - 1)^2(x + 1)(x + 2)$

Eine **nützliche Eigenschaft** ganzzahliger Koeffizienten:

In dem Fall, dass alle Koeffizienten der ganzrationalen Funktion $f(x)$ ganzzahlig sind und der Leitkoeffizient $a_n = 1$ ist, findet man alle ganzzahligen Nullstellen als Teiler des y-Achsenabschnitts a_0.

Achtung: Das bedeutet nicht, dass es keine weiteren Nullstellen geben kann!

7 Exponentialfunktion

7.1 Die allgemeine Exponentialfunktion b^x

Als Basis der **allgemeinen Exponentialfunktion** sind nur positive reelle Zahlen $b > 0$ zugelassen:

$$\boxed{f(x) = b^x}$$

Definitionsbereich	$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
Wertebereich	$\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^{>0}$

Monotonie: Die allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = b^x$ ist für $b > 1$ streng monoton steigend und für $b < 1$ streng monoton fallend (für $b = 1$ erhält man die konstante Funktion $f(x) = 1$).

7.2 Die Exponentialfunktion e^x

Eine spezielle Rolle spielt die Basis $e = 2{,}718281828459\ldots$ (Eulersche Zahl). Die Funktion

$$\boxed{f(x) = e^x}$$

heißt **Exponentialfunktion**. Für die allgemeine Exponentialfunktion gilt dann

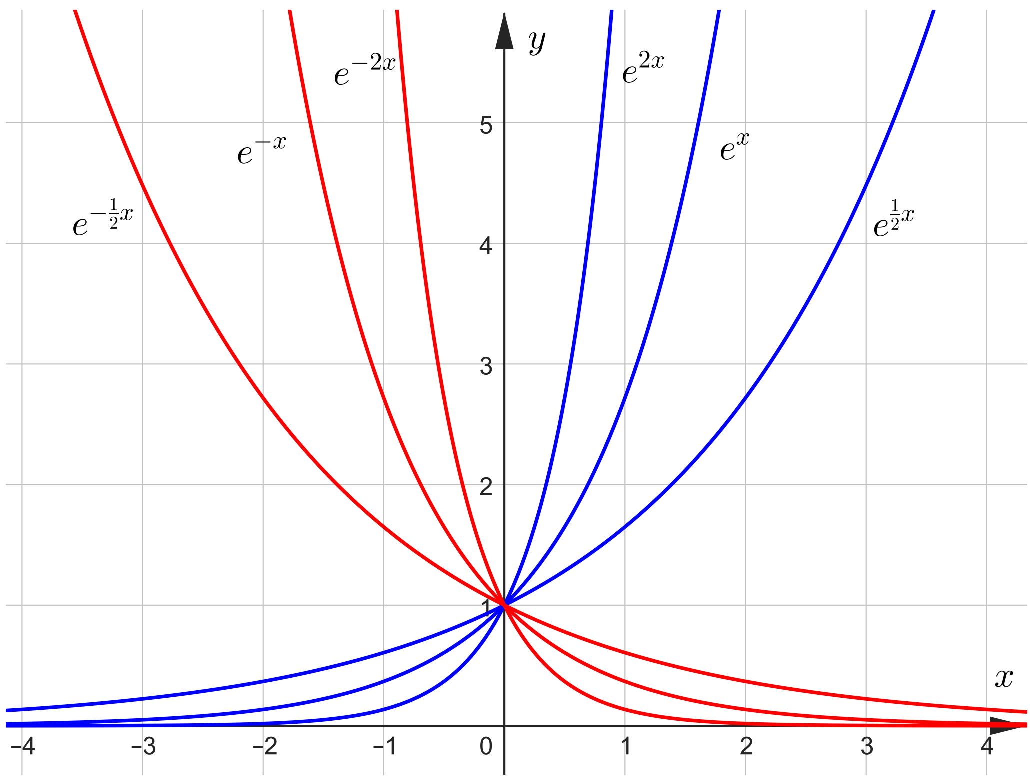
$$\boxed{b^x = e^{\ln(b)\cdot x}}$$

Die **Monotonie** überträgt sich: Die Exponentialfunktion $f(x) = e^{c\cdot x}$ ist für $c > 0$ streng monoton steigend und für $c < 0$ streng monoton fallend (für $c = 0$ erhält man die konstante Funktion $f(x) = 1$).

7.3 Der Graph der Exponentialfunktion

Den Graphen der Exponentialfunktion zu einer Basis $b < 1$ erhält man durch Spiegelung des Graphen zur Basis $\frac{1}{b} > 1$ an der y-Achse, denn es gilt

$$b^x = \left(\frac{1}{b}\right)^{-x}$$



7.4 Spezielle Eigenschaften von $f(x) = p(x)e^{c\cdot x}$

Ist $p(x)$ eine ganzrationale Funktion vom Grad n mit Leitkoeffizient a_n, dann ergeben sich die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)e^{c\cdot x}$ am Rand des Definitionsbereiches aus den folgenden Tabellen.
Der wichtige **Spezialfall** $f(x) = ae^{c\cdot x}$ ist darin enthalten: Man wählt dazu eine konstante Funktion $p(x) = a$, also $p(x)$ mit Grad 0.
Verhalten der Funktionswerte für betragsmäßig große x-Werte:

	n gerade		n ungerade	
$\lim\limits_{x\to+\infty} p(x)e^{c\cdot x}$	$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
$c > 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$c < 0$	0	0	0	0

	n gerade		n ungerade	
$\lim\limits_{x\to-\infty} p(x)e^{c\cdot x}$	$a_n > 0$	$a_n < 0$	$a_n > 0$	$a_n < 0$
$c > 0$	0	0	0	0
$c < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

8 Logarithmusfunktion

8.1 Die allgemeine Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion der allgemeinen Exponentialfunktion heißt **allgemeine Logarithmusfunktion**. Für $b > 0$ schreibt man

$$\boxed{f(x) = \log_b(x)}$$

Es gilt $\log_b(b^x) = b^{\log_b(x)} = x$ sowie

Definitionsbereich	$\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^{>0}$
Wertebereich	$\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$

8.2 Die natürliche Logarithmusfunktion

Wie bei der Exponentialfunktion spielt auch bei der Logarithmusfunktion die Basis e eine spezielle Rolle. Die zugehörige Funktion heißt **natürliche Logarithmusfunktion**. Man schreibt für diese Funktion

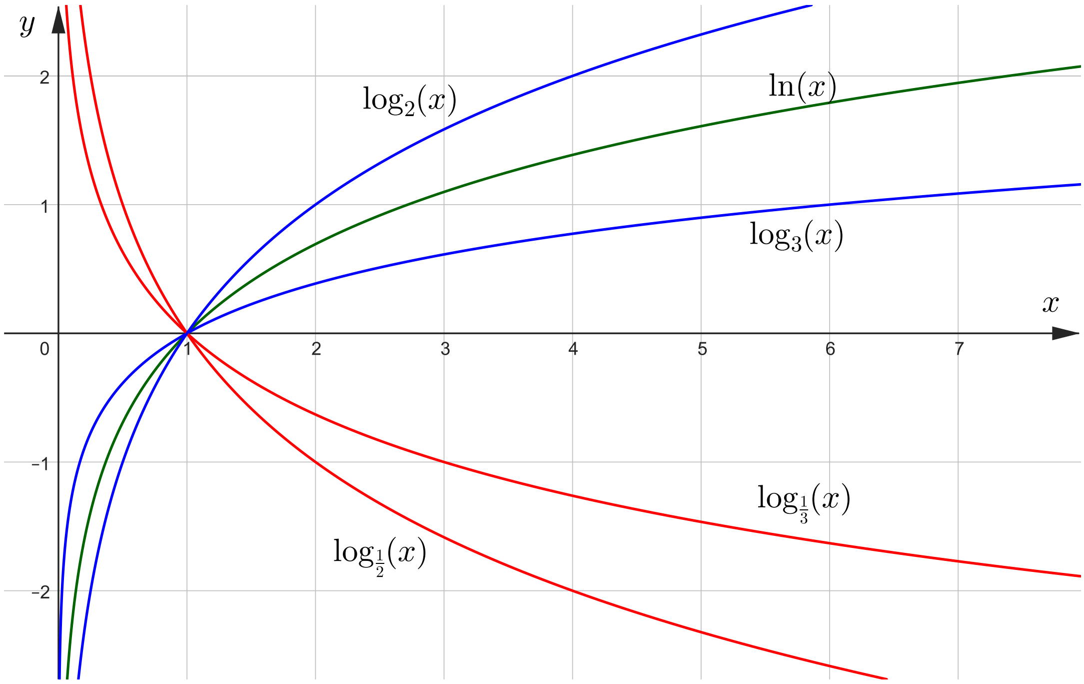
$$\boxed{f(x) = \ln(x)}$$

mit $\ln(e^x) = e^{\ln(x)} = x$.

Man kann die allgemeine Logarithmusfunktion mit Hilfe der natürlichen Logarithmusfunktion darstellen:

$$\boxed{\log_b(x) = \frac{1}{\ln(b)} \cdot \ln(x)}$$

8.3 Der Graph der Logarithmusfunktion



Die Graphen zu den Basen $b > 1$ und $\frac{1}{b} < 1$ fallen bei Spiegelung an der x-Achse ineinander, denn es gilt:

$$\log_b(x) = -\log_{\frac{1}{b}}(x)\,.$$

8.4 Spezielle Eigenschaften von $f(x) = p(x)\ln(x)$

Ist $p(x)$ eine ganzrationale Funktion vom Grad n mit Leitkoeffizient a_n und y-Achsenabschnitt a_0, dann ergeben sich folgende Grenzwerte an den Rändern 0 und $+\infty$ des Definitionsbereiches

$$\lim_{x\to\infty} p(x)\ln(x) = \begin{cases} +\infty & \text{falls } a_n > 0 \\ -\infty & \text{falls } a_n < 0 \end{cases}$$

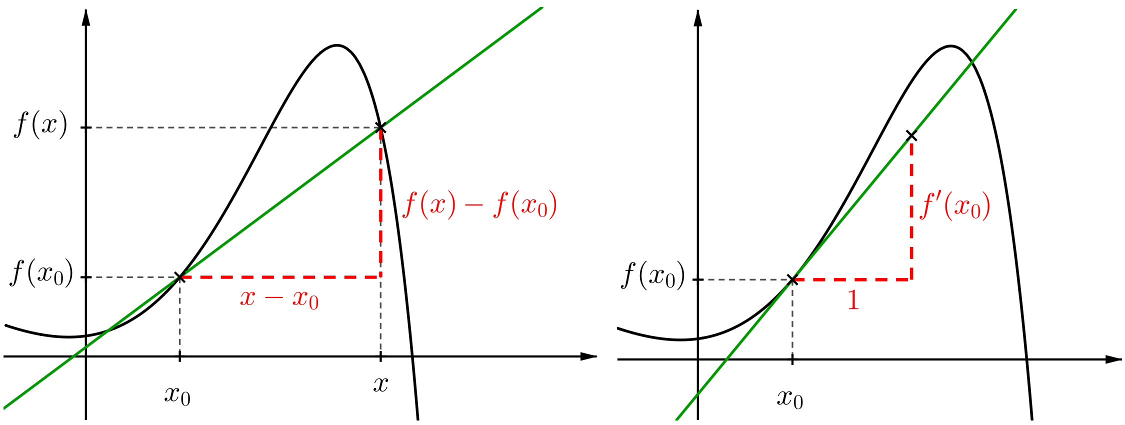
$$\lim_{x\to 0} p(x)\ln(x) = \begin{cases} -\infty & \text{falls } a_0 > 0 \\ +\infty & \text{falls } a_0 < 0 \\ 0 & \text{falls } a_0 = 0, \text{ also } p(0) = 0 \end{cases}$$

Außerdem gilt $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{p(x)} = 0}$ falls der Grad von $p(x)$ größer als Null ist.

9 Differentialrechnung

9.1 Differenzenquotient und Ableitung

Differenzenquotient = Sekantensteigung	$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
Ableitung = Grenzwert des Differenzenquotienten = Differentialquotient = Tangentensteigung	$f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $f'(x_0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$



9.2 Ableitungsregeln

Faktorregel	$f(x) = a \cdot g(x)$	$f'(x) = a \cdot g'(x)$
Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Quotientenregel	$f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$	$f'(x) = \dfrac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$
Kettenregel	$f(x) = g\big(h(x)\big)$	$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x)$

Spezialfall der Kettenregel:

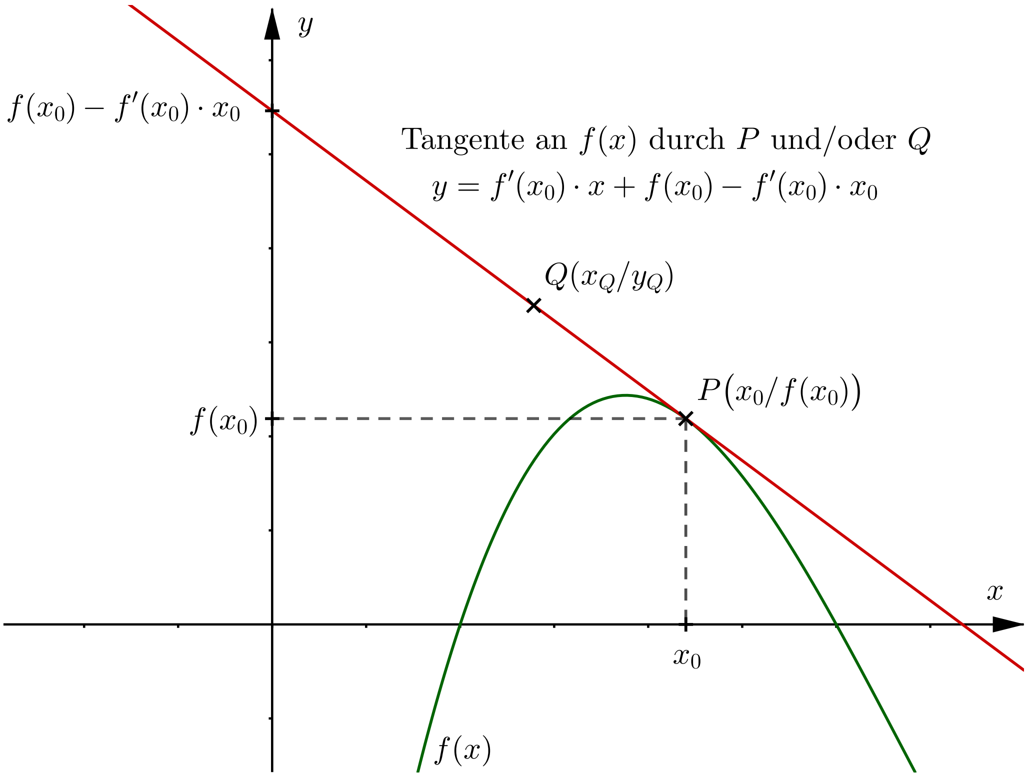
$$\boxed{f(x) = g(ax + b) \Longrightarrow f'(x) = a \cdot g'(ax + b)}$$

9.3 Tangentengleichung

Geradengleichung der Tangente an $f(x)$ im Punkt $P\big(x_0/f(x_0)\big)$:

$$\boxed{y = f'(x_0) \cdot x + \big(f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0\big)}$$

Diese heißt **Tangentengleichung von** $f(x)$.
Tangente an $f(x)$ **durch einen Punkt** $Q(x_Q/y_Q)$:
Zur Bestimmung der Tangentengleichung an $f(x)$ durch einen gegebenen Punkt (x_Q/y_Q) setzt man $x = x_Q$ und $y = y_Q$ in die Tangentengleichung ein. Das gibt eine Gleichung mit der Berührstelle x_0 als unbekannte Größe. Diese Gleichung löst man auf und erhält so eine Berührstelle x_0 (oder mehrere).



9.4 Monotonie

Ist $f(x)$ auf dem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

1a)	$f'(x) \geq 0$ auf $I \iff f(x)$ ist auf I monoton steigend
1b)	$f'(x) \leq 0$ auf $I \iff f(x)$ ist auf I monoton fallend
2a)	$f'(x) > 0$ auf $I \Longrightarrow f(x)$ ist auf I streng monoton steigend
2b)	$f'(x) < 0$ auf $I \Longrightarrow f(x)$ ist auf I streng monoton fallend

9.5 Extrempunkte

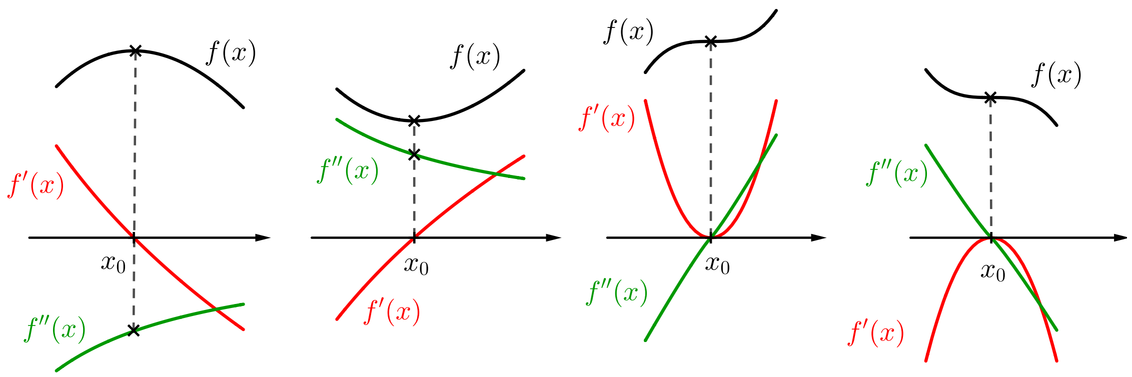
Eine Stelle $x = x_0$ mit **neutraler Steigung** ist eine mögliche **Extremstelle**. Das **notwendige Kriterium** für eine Extremstelle lautet damit:

$$\boxed{f'(x_0) = 0}$$

Ist $f'(x_0) = 0$, dann lautet das **hinreichende Kriterium** für ein **Maximum** (auch **Hochpunkt**) oder ein **Minimum** (auch **Tiefpunkt**):

$f'(x_0) = 0$	$f''(x_0) < 0$	$\mathrm{Max}\big(x_0/f(x_0)\big)$
	$f''(x_0) > 0$	$\mathrm{Min}\big(x_0/f(x_0)\big)$
	$f''(x_0) = 0$	keine Entscheidung möglich

Im Fall $f'(x_0) = 0$ (insbesondere, wenn zusätzlich $f''(x_0) = 0$ gilt) kann man mit dem **Vorzeichenwechselkriterium** für $f'(x)$ entscheiden, ob ein **Extremum** oder ein **Sattelpunkt** vorliegt:



9.6 Wendepunkte

Eine Stelle $x = x_0$ mit neutraler zweiter Ableitung ist eine mögliche **Wendestelle**. Der zugehörige Punkt heißt **Wendepunkt**.

In den Wendepunkten geht der Graph der Funktion von einer Links- bzw. Rechtskrümmung in eine Rechts- bzw. Linkskrümmung über.

Die Wendepunkte einer Funktion $f(x)$ sind genau die Extrema der Ableitungsfunktion $f'(x)$.

Das **notwendige Kriterium** für eine Wendestelle lautet damit:

$$\boxed{f''(x_0) = 0}$$

Ist $f''(x_0) = 0$ dann lautet das **hinreichende Kriterium** für einen Wendepunkt:

$f''(x_0) = 0$	$f'''(x_0) \neq 0$	$\text{WP}\big(x_0/f(x_0)\big)$
	$f'''(x_0) = 0$	keine Entscheidung möglich

Im Fall $f''(x_0) = 0$ (insbesondere, wenn zusätzlich $f'''(x_0) = 0$ gilt) kann man mit dem **Vorzeichenwechselkriterium** für $f''(x)$ entscheiden, ob ein Wendepunkt vorliegt.

Spezialfall:

Ist $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ aber $f'''(x_0) \neq 0$, so ist $\big(x_0/f(x_0)\big)$ ein Sattelpunkt

9.7 Schnitt von Funktionen/Zusammengesetzte Funktionen

9.7.1 Zusammengesetzte Funktionen

Eine Funktion $f(x)$ heißt **zusammengesetzte Funktion**, wenn sie auf verschiedenen Bereichen ihres Definitionsbereiches durch zwei oder mehr Funktionen beschrieben wird.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{falls } x \geq x_0 \end{cases}$$

Man sagt dann kurz: $f(x)$ ist an der Stelle x_0 aus den **Teilfunktionen** $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zusammengesetzt. Die Stelle x_0 heißt **Verklebungsstelle**.

9.7.2 Schnittpunkt/Sprungfreiheit

Schnittpunkte:

Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ schneiden sich, wenn ihre Graphen sich schneiden.

Man erhält den x-Wert eines **Schnittpunktes** als Lösung der Gleichung

$$\boxed{f(x) = g(x)}$$

Den zugehörigen y-Wert erhält man durch Einsetzen in $f(x)$ oder $g(x)$.

Spezialfall: Die **Nullstellen** einer Funktion $f(x)$ sind die Schnittpunkte des Graphen von $f(x)$ mit der x-Achse, also als Schnittpunkt von $f(x)$ mit der Funktion $g(x) = 0$. Man erhält die Nullstellen als Lösungen der Gleichung

$$\boxed{f(x) = 0}$$

Sprungfreiheit:

Eine zusammengesetzte Funktion, etwa $f(x) = \begin{Bmatrix} f_1(x) & \text{falls } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{falls } x \geq x_0 \end{Bmatrix}$, heißt an der Stelle x_0 **sprungfrei** zusammengesetzt, wenn

$$\boxed{f_1(x_0) = f_2(x_0)}$$

Ist eine der Funktionen an der Stelle x_0 nicht definiert (im obigen Beispiel $f_1(x)$), dann muss man den Funktionswert gegebenenfalls durch den Grenzwert ersetzen (im obigen Beispiel $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)$).
Das ist z. B. nicht notwendig, wenn die Teilfunktionen durch Einschränkungen der Definitionsbereiche konstruiert werden.
Zusammenhang zur Stetigkeit:
Eine an der Stelle x_0 sprungfrei zusammengesetzte Funktion ist an der Stelle x_0 stetig.

9.7.3 Berührung/Knickfreiheit

Berührpunkte:

Zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ **berühren** sich, wenn ihre Graphen sich schneiden und im Schnittpunkt die gleiche Steigung haben.

Man erhält den x-Wert eines **Berührpunktes** als Lösung der Gleichungen

$$\boxed{f(x) = g(x) \quad \text{und} \quad f'(x) = g'(x)}$$

Den zugehörigen y-Wert erhält man durch Einsetzen in $f(x)$ oder $g(x)$.
Knickfreiheit:
Eine zusammengesetzte Funktion, etwa $f(x) = \begin{Bmatrix} f_1(x) & \text{falls } x < x_0 \\ f_2(x) & \text{falls } x \geq x_0 \end{Bmatrix}$, heißt an der Stelle x_0 **knickfrei** zusammengesetzt, wenn

$$\boxed{f_1(x_0) = f_2(x_0) \quad \text{und} \quad f_1'(x_0) = f_2'(x_0)}$$

Ist eine der Funktionen an der Stelle x_0 nicht definiert (im obigen Beispiel $f_1(x)$), dann muss man die berechneten Werte gegebenenfalls durch die Grenzwerte ersetzen (im obigen Beispiel $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f_1(x)$ und $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f_1'(x)$).

Das ist z. B. nicht notwendig, wenn die Teilfunktionen durch Einschränkungen der Definitionsbereiche konstruiert werden.

Zusammenhang zur Differenzierbarkeit:

Eine an der Stelle x_0 knickfrei zusammengesetzte Funktion ist an der Stelle x_0 differenzierbar.

10 Integralrechnung

10.1 Stammfunktion

$$\boxed{F(x) \text{ heißt } \textbf{Stammfunktion} \text{ von } f(x) \iff F'(x) = f(x)}$$

10.2 Bestimmtes Integral

Besitzt $f(x)$ auf dem Intervall I die Stammfunktion $F(x)$, dann ist $f(x)$ **auf** I **integrierbar**. Für $a, b \in I$ heißt

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)}$$

das **(bestimmte) Integral von** $f(x)$ **in den Grenzen** a **und** b.

Insbesondere gilt $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx}$

10.3 Unbestimmtes Integral/Integralfunktion

Besitzt $f(x)$ die Stammfunktion $F(x)$, dann schreibt man für das **unbestimmte Integral**

$$F(x) = \int f(x)\,dx\,.$$

Die mit Hilfe des bestimmten Integrals definierte Funktion

$$\boxed{F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

heißt **Integralfunktion** zu $f(x)$ mit $F_a(a) = 0$.

Die Integralfunktion $F_a(x)$ ist eine Stamnmfunktion von $f(x)$, das heißt: $F_a'(x) = f(x)$.

10.4 Intervalladditionsregel

Ist $f(x)$ auf dem Intervall I integrierbar, dann gilt für $a, b, c \in I$

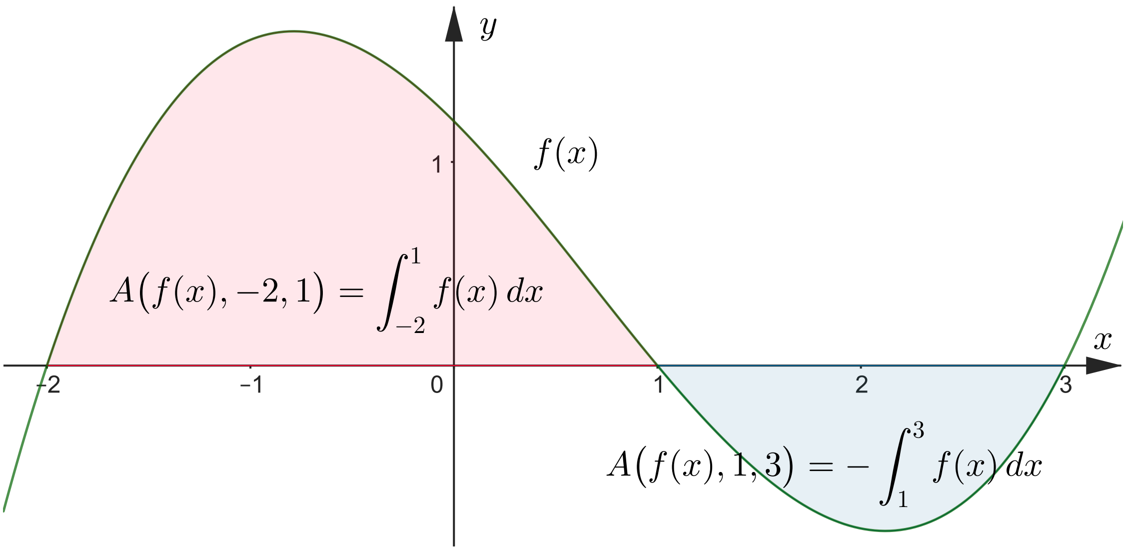
$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

10.5 Anwendung: Flächenberechnung

Mit $A(f(x); a, b)$ wird der Flächeninhalt der Fläche bezeichnet, die vom Graphen von $f(x)$, der x-Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird.
Mit $A(f(x), g(x); a, b)$ wird der Flächeninhalt der Fläche bezeichnet, die vom Graphen von $f(x)$, dem Graphen von $g(x)$ und den Geraden $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird.

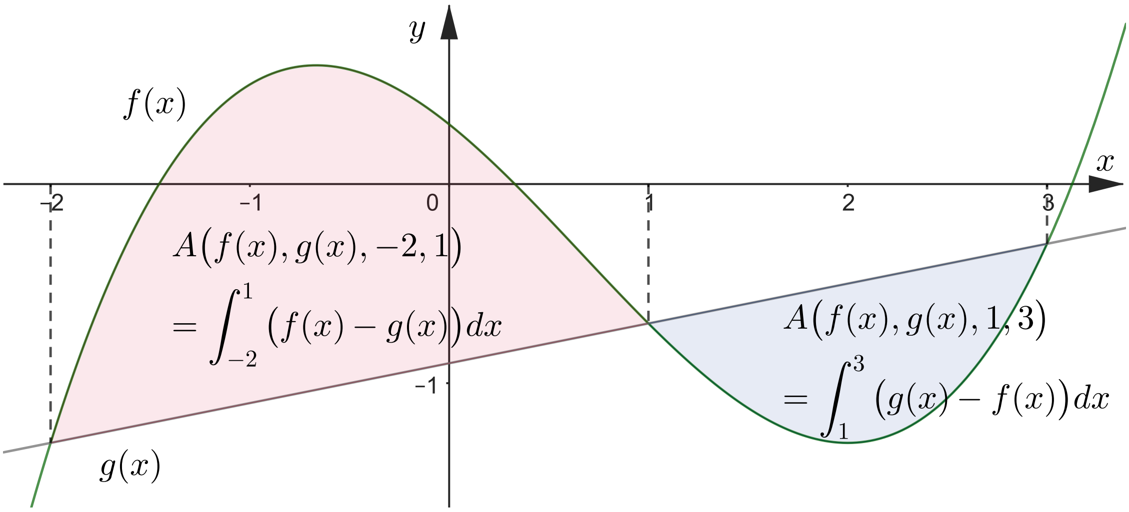
10.5.1 Flächeninhalt zwischen Graph und x-Achse

$f(x) \geq 0$ zwischen a und b	$A\big(f(x), a, b\big) = \int_a^b f(x)\,dx$
$f(x) \leq 0$ zwischen a und b	$A\big(f(x), a, b\big) = -\int_a^b f(x)\,dx$



10.5.2 Flächeninhalt zwischen zwei Graphen

$f(x) \geq g(x)$ zwischen a und b	$A\big(f(x), g(x), a, b\big) = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx$
$f(x) \leq g(x)$ zwischen a und b	$A\big(f(x), g(x), a, b\big) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\, dx$



11 Übersicht: Ableitungen und Stammfunktionen

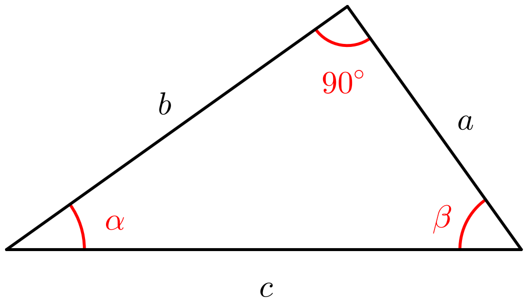
$f(x)$	$f'(x)$	$F(x)$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\ln(x)$
$\dfrac{1}{x^n} \quad (n > 1)$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$-\dfrac{1}{(n-1)\, x^{n-1}}$
e^{ax}	$a\, e^{ax}$	$\frac{1}{a}\, e^{ax}$
$\ln(ax)$	$\dfrac{1}{x}$	$x\, \ln(ax) + x$
$\sin(ax)$	$a\, \cos(ax)$	$-\frac{1}{a}\, \cos(ax)$

$\cos(ax)$	$-a\ \sin(ax)$	$\frac{1}{a}\ \sin(ax)$

12 Trigonometrie, Winkel- und Arkusfunktionen, Schwingungen

12.1 Grundlegende Beziehungen am rechtwinkligen Dreieck

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{a}{c}$$
$$\cos\alpha = \sin\beta = \frac{b}{c}$$
$$\tan\alpha = \cot\beta = \frac{a}{b}$$
$$\cot\alpha = \tan\beta = \frac{b}{a}$$

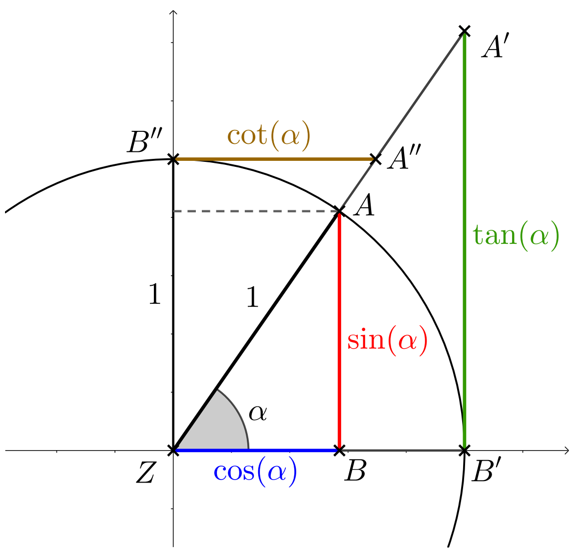


$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1\,, \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\,, \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

12.2 Trigonometrie am Einheitskreis

Die Werte für Sinus bzw. Kosinus erhält man, indem man den zum Winkel gehörigen Punkt A des Einheitskreises auf die y-Achse bzw. x-Achse projiziert und abliest.

Die Werte für Tangens und Kotangens ergibt sich als Länge der in der Skizze angegebenen Projektionen.



Durch die Interpretation der trigonometrischen Ausdrücke als Projektionen am Einheitskreis erhält man auf natürliche Weise auch negative Werte.

12.3 Spezielle Werte und spezielle Symmetrien

Spezielle Symmetrien:

	$-\alpha$	$\alpha - 90°$	$\alpha + 90°$	$\alpha + 180°$	$\alpha + 270°$	$\alpha + 360°$
$\sin(\ldots)$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos(\ldots)$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\tan(\ldots)$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$
$\cot(\ldots)$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$

Spezielle Werte:

	0	30°	45°	60°	90°
$\sin(\ldots)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\ldots)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\ldots)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	–	$\sqrt{3}$	–
$\cot(\ldots)$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Mit Hilfe der Symmetrien erhält man spezielle Werte für weitere Winkel.

12.4 Additionstheoreme

Die Werte der trigonometrischen Ausdrücke für Summen und Differenzen von Winkeln lassen sich mit den **Additionstheoremen** berechnen:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

Spezialfälle:

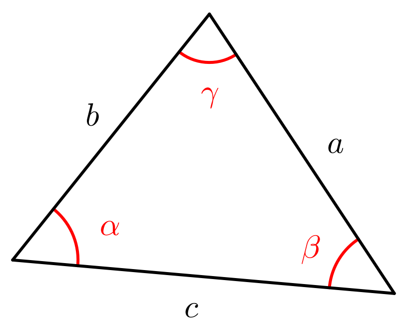
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

Mit Hilfe des **trigonometrischen Pythagoras** $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ und den Definitionen für Tangens und Kotangens erhält man folgende quadratischen Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha &= 1-\cos^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\cot^2\alpha}\\
\cos^2\alpha &= 1-\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha}\\
\tan^2\alpha &= \frac{1}{\cot^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}\\
\cot^2\alpha &= \frac{1}{\tan^2\alpha} = \frac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}
\end{aligned}$$

12.5 Beziehungen am allgemeinen Dreieck



Sinussatz	$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$
Kosinussatz	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

12.6 Beziehung zwischen Winkel und Bogenmaß

Man kann jeden Winkel φ eindeutig durch die Länge des zugehörigen Bogens auf dem Einheitskreis beschreiben und umgekehrt. Diese Länge x heißt **Bogenmaß** und es gelten die folgenden Beziehungen:

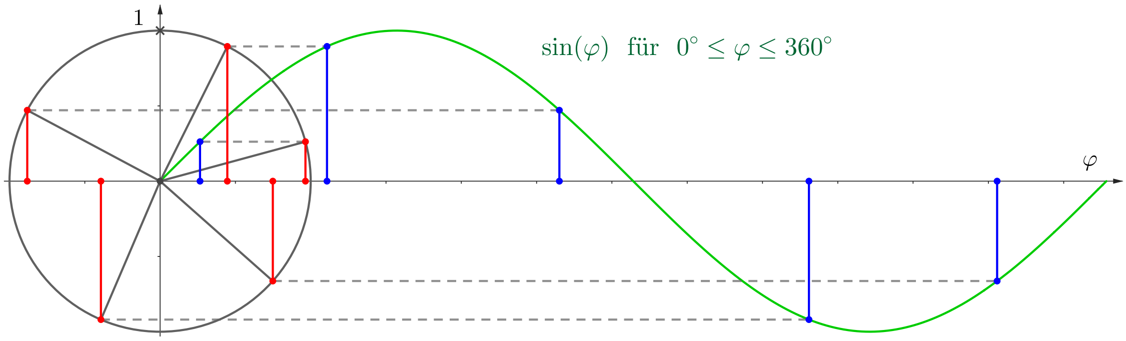
$$\boxed{x = \frac{\pi}{180°} \cdot \varphi} \qquad \boxed{\varphi = \frac{180°}{\pi} \cdot x}$$

Diese Formeln gelten uneingeschränkt auch für Winkel größer als 360° und für Winkel kleiner als 0°, z. B.

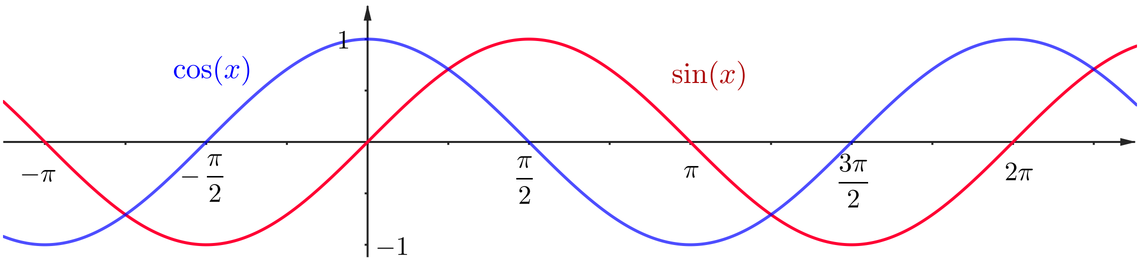
φ	$-360°$	-90	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$135°$	$180°$	$720°$
x	-2π	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	4π

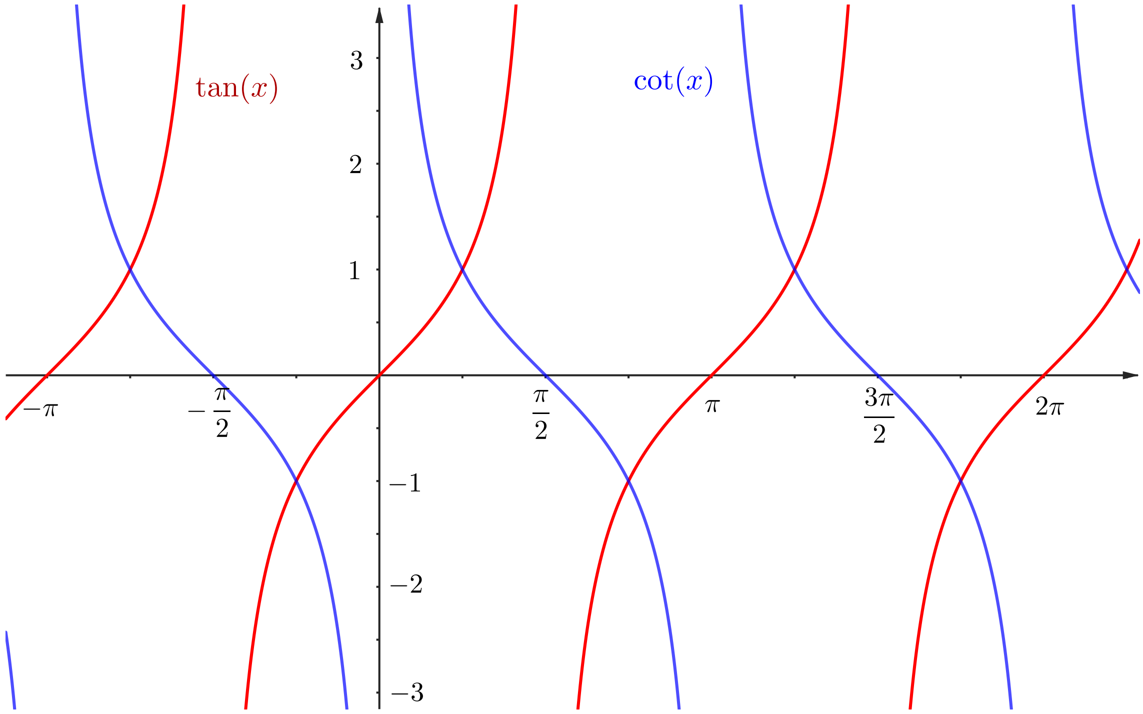
12.7 Winkelfunktionen

Die Projektion am Einheitskreis ergibt z. B. für den Sinus zwischen 0° und 360° folgende Werte:



Nach Übergang vom Winkel zum Bogenmaß und Erweiterung auf x-Werte kleiner als Null und größer als 2π erhält man die Graphen der **Winkelfunktionen** (auch **trigonometrischen Funktionen**):

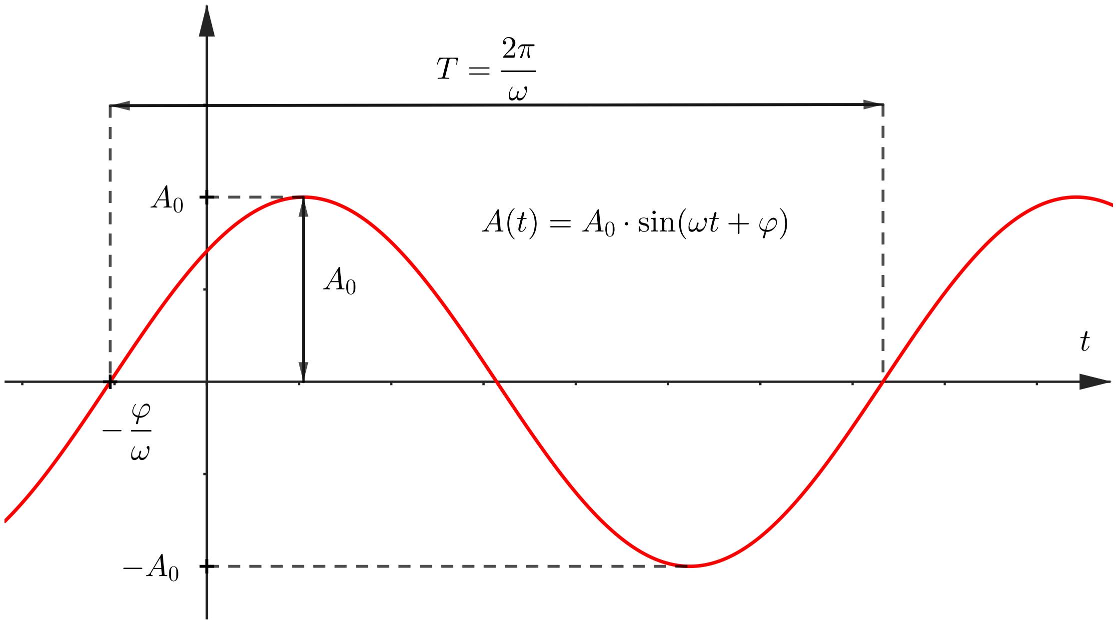




12.8 Anwendung: Die Beschreibung von Schwingungen

Schwingungen spielen in vielen technischen und physikalischen Anwendungen eine große Rolle. Als Beispiel seien hier mechanische Schwingungen genannt, die in ihrer einfachsten Form durch Feder- oder Fadenpendel realisiert werden. Ebenso bilden Schwingungen eine Grundlage der Untersuchung von Wechselstromkreisen in der Elektrotechnik.

$f = \frac{1}{T}$	T: Periodendauer (in s) f: Frequenz (in $\frac{1}{s}$)
$\omega = 2\pi f$	ω: Winkelgeschwindigkeit / Kreisfrequenz (in $\frac{1}{s}$)
$A(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$	$A(t)$: Auslenkung zur Zeit t A_0: Maximale Auslenkung / Amplitude φ: Phasenverschiebung



13 Komplexe Zahlen mit Anwendungen

13.1 Die grundlegende Identität der komplexen Zahlen

Komplexe Zahlen sind Zahlen der Form

$$\boxed{\underline{z} = a + j \cdot b}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Die zusätzliche Zahl j heißt **imaginäre Einheit**[1] und für sie gilt

$$\boxed{j^2 = -1}$$

Bezeichnungen:

Realteil von $\underline{z} = a + j \cdot b$	$\mathrm{Re}\left(\underline{z}\right) = a$
Imaginärteil von $\underline{z} = a + j \cdot b$	$\mathrm{Im}\left(\underline{z}\right) = b$

[1] Neben der im Text und in technischen Anwendungen verwendeten Bezeichnung j gibt es die in der mathematischen Literatur verwendete Bezeichnung i der imaginären Einheit.

13.2 Darstellung komplexer Zahlen

Koordinatenschreibweise (Gaußsche Schreibweise)	$\underline{z} = \mathrm{Re}\left(\underline{z}\right) + j \cdot \mathrm{Im}\left(\underline{z}\right)$
Eulersche Schreibweise (Exponentialschreibweise)	$\underline{z} = \left\lvert\underline{z}\right\rvert \cdot e^{j\cdot\varphi}$
Trigonometrische Schreibweise (Polarkoordinatenschreibweise)	$\underline{z} = \left\lvert\underline{z}\right\rvert \cdot \left(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi\right)$

Dabei gelten die folgenden Beziehungen:

$$\boxed{\left\lvert\underline{z}\right\rvert = \sqrt{\mathrm{Re}\left(\underline{z}\right)^2 + \mathrm{Im}\left(\underline{z}\right)^2}} \qquad \boxed{\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\left(\underline{z}\right)}{\mathrm{Re}\left(\underline{z}\right)}\right)}$$

Spezialfälle:

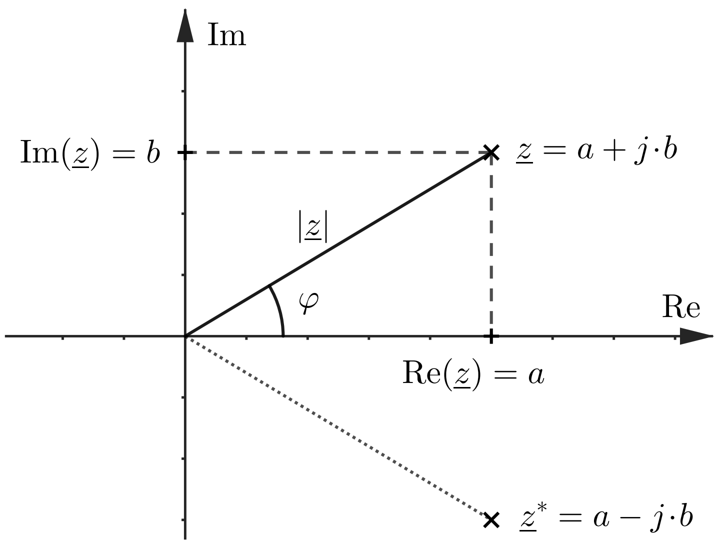
$$\boxed{j = e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}} \qquad \boxed{-j = \frac{1}{j} = e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}}$$

13.3 Konjugiert komplexe Zahl

Zu einer komplexen Zahl $\underline{z}$ gibt es die **konjugiert komplexe Zahl** $\underline{z}^*$:

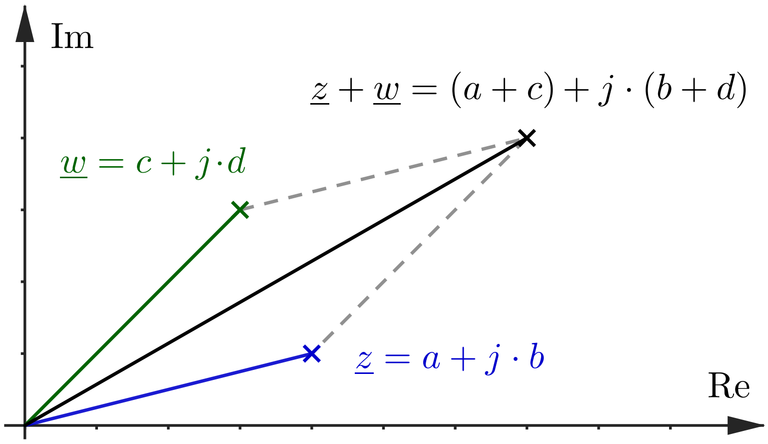
$\underline{z}$	$\underline{z}^*$
$a + j \cdot b$	$a - j \cdot b$
$\left\lvert\underline{z}\right\rvert \cdot e^{j\cdot\varphi}$	$\left\lvert\underline{z}\right\rvert \cdot e^{-j\cdot\varphi}$

$$\boxed{\underline{z} \cdot \underline{z}^* = \left\lvert\underline{z}\right\rvert^2}$$

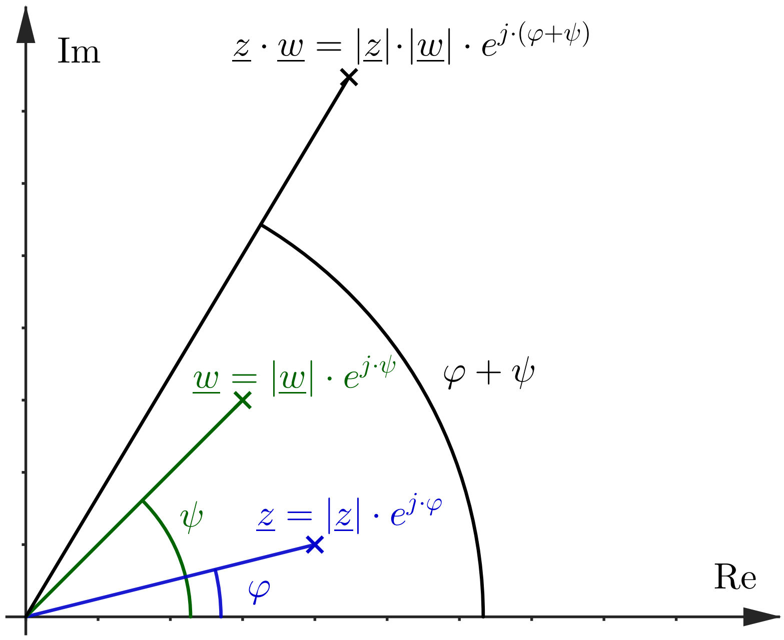


13.4 Rechnen mit komplexen Zahlen

Addition und **Subtraktion**	$\underline{z} + \underline{w}$	$\underline{z} - \underline{w}$
$\underline{z} = a + j \cdot b$ $\underline{w} = c + j \cdot d$	$(a + c) + j \cdot (b + d)$	$(a - c) + j \cdot (b - d)$



Multiplikation und **Division**	$\underline{z} \cdot \underline{w}$	$\dfrac{\underline{z}}{\underline{w}}$
$\underline{z} = a + j \cdot b$ $\underline{w} = c + j \cdot d$	$(ac - bd) + j \cdot (ad + bc)$	$\dfrac{(ac + bd) + j \cdot (bc - ad)}{c^2 + d^2}$
$\underline{z} = \lvert\underline{z}\rvert \cdot e^{j \cdot \varphi}$ $\underline{w} = \lvert\underline{w}\rvert \cdot e^{j \cdot \psi}$	$\lvert\underline{z}\rvert \cdot \lvert\underline{w}\rvert \cdot e^{j \cdot (\varphi + \psi)}$	$\dfrac{\lvert\underline{z}\rvert}{\lvert\underline{w}\rvert} \cdot e^{j \cdot (\varphi - \psi)}$



Spezialfall: $\boxed{\dfrac{1}{\underline{z}} = \dfrac{\underline{z}^*}{|\underline{z}|^2}}$ mit

	$\dfrac{1}{\underline{z}}$
$\underline{z} = a + j \cdot b$	$\dfrac{a}{a^2+b^2} - j \cdot \dfrac{b}{a^2+b^2}$
$\underline{z} = \lvert\underline{z}\rvert \cdot e^{j\cdot\varphi}$	$\dfrac{1}{\lvert\underline{z}\rvert} \cdot e^{-j\cdot\varphi}$

13.5 Formel von Moivre und komplexe Wurzeln

Die komplexe Zahl $\underline{z} = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)$ hat die komplexen Potenzen

$$\boxed{\underline{z}^n = r^n \cdot \big(\cos(n\varphi) + j \cdot \sin(n\varphi)\big)}$$

Spezialfall $r = 1$**:** Die **Formel von Moivre**

$$\boxed{(\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + j \cdot \sin(n\varphi)}$$

Die Gleichung $\underline{w}^n = \underline{z}$ hat n unterschiedliche Lösungen, die komplexen Wurzeln. Für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ sind das:

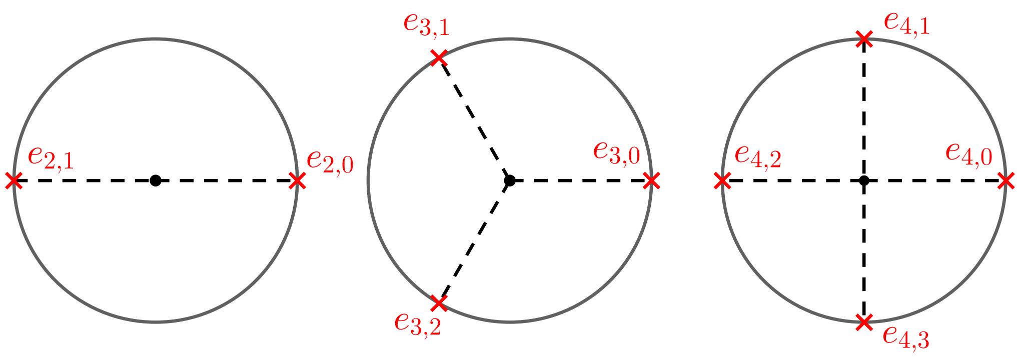
$$\boxed{\sqrt[n]{\underline{z}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\tfrac{\varphi+2k\pi}{n} + j \cdot \sin\tfrac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$$

Spezialfall: Die n**-ten Einheitswurzeln**

$$e_{n,k} = \cos\frac{2k\pi}{n} + j\cdot\sin\frac{2k\pi}{n} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Die Einheitswurzeln liegen (ausgehend von $e_{n,0} = 1$) symmetrisch auf dem Einheitskreis verteilt, z. B.

- $n = 2$: $\;e_{2,0} = 1,\; e_{2,1} = -1$
- $n = 3$: $\;e_{3,0} = 1,\; e_{3,1} = -\frac{1}{2} + j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2},\; e_{3,2} = -\frac{1}{2} - j\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $n = 4$: $\;e_{4,0} = 1,\; e_{4,1} = j,\; e_{4,2} = -1,\; e_{4,3} = -j$



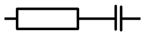
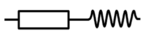
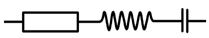
13.6 Anwendung: Widerstände im Wechselstromkreis

Bezugsgröße: $\underline{U} = U = U\cdot e^{j\cdot 0}$
Verwendete Bezeichnung: $\omega = 2\pi f$ mit Frequenz f der Spannungsquelle

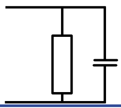
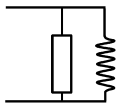
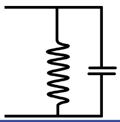
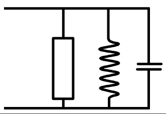
Ohmscher Widerstand (R)	$\underline{I} = I = I\cdot e^{j\cdot 0}$ keine Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung	$R = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}$
Kapazitiver Widerstand (C)	$\underline{I} = j\cdot I = I\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}$ Strom eilt Spannung um 90° voraus	$\underline{X_C} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = -j\cdot X_C = X_C\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{X_C = \frac{1}{\omega\, C}}$
Induktiver Widerstand (L)	$\underline{I} = -j\cdot I = I\cdot e^{-j\cdot\frac{\pi}{2}}$ Strom eilt Spannung um 90° nach	$\underline{X_L} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\cdot X_L = X_L\cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}$ $\boxed{X_L = \omega\, L}$

Widerstände $\underline{Z}$ einfacher Serienschaltungen

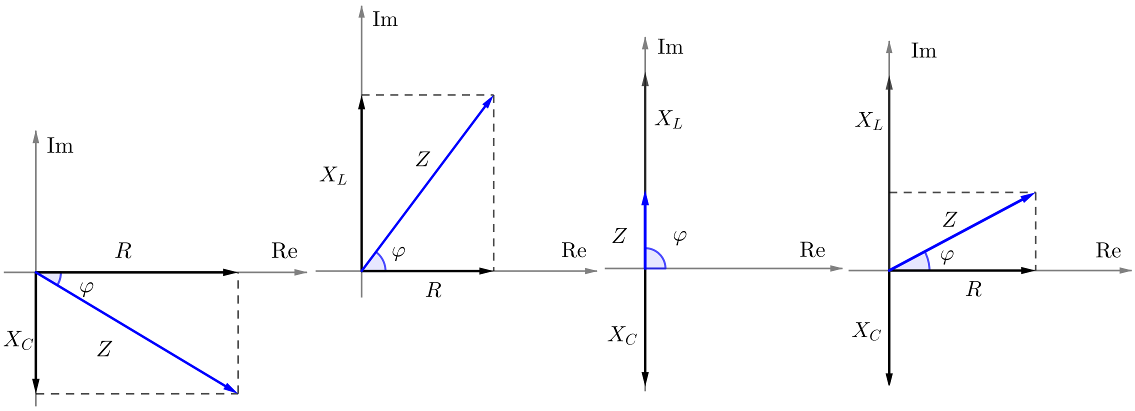
Bezeichnungen: $Z = |\underline{Z}|$, $\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(\underline{Z})}{\mathrm{Re}(\underline{Z})}\right)$

	$\underline{Z}$	Z	φ
	$R - j \cdot X_C$	$\sqrt{R^2 + X_C^2}$	$\arctan\left(-\frac{X_C}{R}\right)$
	$R + j \cdot X_L$	$\sqrt{R^2 + X_L^2}$	$\arctan\left(\frac{X_L}{R}\right)$
	$j \cdot (X_L - X_C)$	$X_L - X_C$	$\pm 90°$
	$R + j \cdot (X_L - X_C)$	$\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$	$\arctan\left(\frac{X_L - X_C}{R}\right)$

Widerstände $\underline{Z}$ einfacher Parallelschaltungen,

	$\frac{1}{\underline{Z}}$	$\frac{1}{Z}$	φ
	$\frac{1}{R} + j \cdot \frac{1}{X_C}$	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}$	$\arctan\left(-\frac{R}{X_C}\right)$
	$\frac{1}{R} - j \cdot \frac{1}{X_L}$	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_L^2}}$	$\arctan\left(\frac{R}{X_L}\right)$
	$j \cdot \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$	$\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}$	$\pm 90°$
	$\frac{1}{R} + j \cdot \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)$	$\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}\right)^2}$	$\arctan\left(\frac{R}{X_L} - \frac{R}{X_C}\right)$

Zeigerbilder zu den Serienschaltungen:



Die Zeigerbilder der Parallelschaltungen nutzen statt der Widerstandswerte $\underline{Z}$ deren Kehrwerte $\frac{1}{\underline{Z}}$.

14 Analytische Geometrie

14.1 Darstellung von Vektoren

Als **Vektor** $\vec{v}$ bezeichnet man einen Repräsentanten der Menge aller Pfeile gleicher Länge und gleicher Richtung.

	in der Ebene	im Raum
Komponenten eines Vektors	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
Ortsvektor des Punktes $A(a_1/a_2)$ bzw. $A(a_1/a_2/a_3)$	$\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{0A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$
Verbindungsvektor zweier Punkte $A(a_1/a_2)$ und $B(b_1/b_2)$ bzw. $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$

14.2 Vektorrechnung I: Addition, Subtraktion, skalare Multiplikation

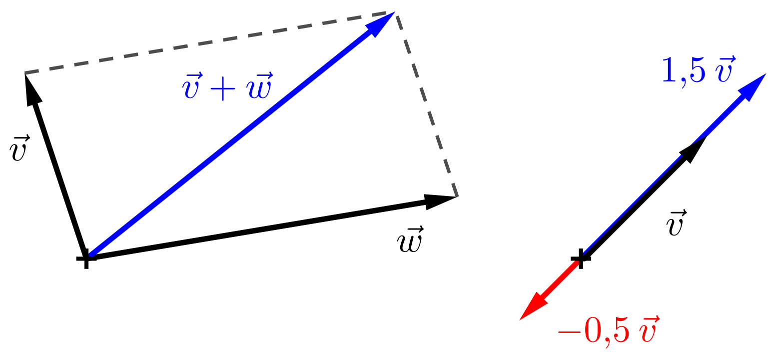
	in der Ebene	im Raum
Addition, Subtraktion von Vektoren	$\vec{v} \pm \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \pm w_1 \\ v_2 \pm w_2 \end{pmatrix}$	$\vec{v} \pm \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \pm w_1 \\ v_2 \pm w_2 \\ v_3 \pm w_3 \end{pmatrix}$
Skalare Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$	$s \cdot \vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot v_1 \\ s \cdot v_2 \end{pmatrix}$	$s \cdot \vec{v} = s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot v_1 \\ s \cdot v_2 \\ s \cdot v_3 \end{pmatrix}$

- Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ heißen **linear abhängig** (oder **kollinear**), wenn es eine Zahl s gibt, sodass $\vec{v} = s \cdot \vec{w}$.

- Mehr als zwei Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ heißen linear abhängig, wenn es Zahlen $s_1, s_2, \ldots, s_n$ gibt, die nicht alle Null sind, sodass

$$s_1 \cdot \vec{v}_1 + s_2 \cdot \vec{v}_2 + \ldots + s_n \cdot \vec{v}_n = 0\,.$$

- Sind Vektoren nicht linear abhängig, dann heißen sie **linear unabhängig**.



14.3 Vektorrechnung II: Betrag, Skalar- und Kreuzprodukt, Winkel

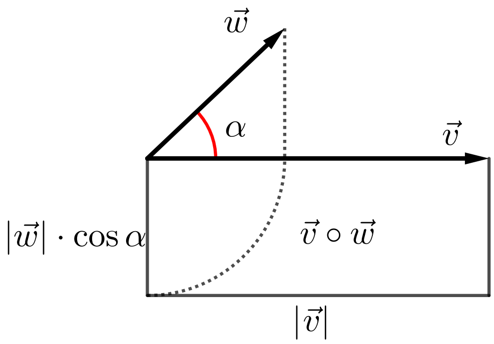
Zwei Vektoren, die am gleichen Punkt starten, schließen einen **Winkel** α mit $0° \leq \alpha \leq 180°$ ein.]

	in der Ebene	**im Raum**
Länge/Betrag eines Vektors	$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2}$	$\lvert\vec{v}\rvert = \sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2 + (v_3)^2}$
Skalarprodukt zweier Vektoren	$\vec{v} \circ \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2$	$\vec{v} \circ \vec{w} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$
Kreuzprodukt/Vektorprodukt zweier Vektoren		$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - v_3 \cdot w_2 \\ v_3 \cdot w_1 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - v_2 \cdot w_1 \end{pmatrix}$
Von zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w}$ **eingeschlossener Winkel** α	$\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{v} \circ \vec{w}}{\lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{w}\rvert}\right)$	$\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{v} \circ \vec{w}}{\lvert\vec{v}\rvert \cdot \lvert\vec{w}\rvert}\right)$

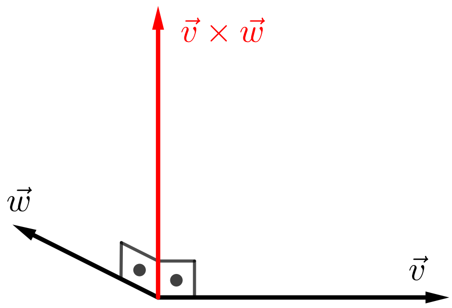
Normalenvektor $\vec{n}$ zu zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$		$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$

Statt $\vec{v} \circ \vec{w}$ sind auch $\vec{v} \cdot \vec{w}$ und $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ geläufige Bezeichnungen für das Skalarprodukt.

Skalarprodukt



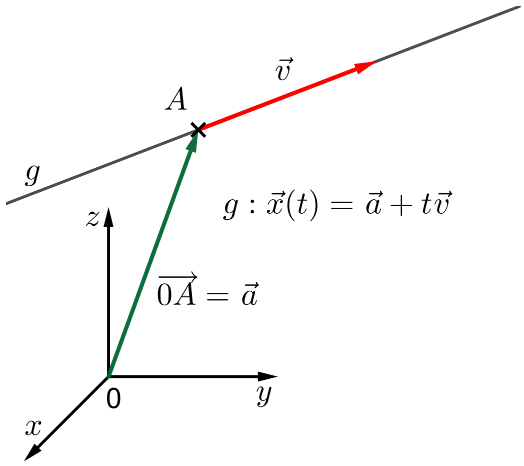
Kreuzprodukt/Normalenvektor



14.4 Darstellungen von Geraden

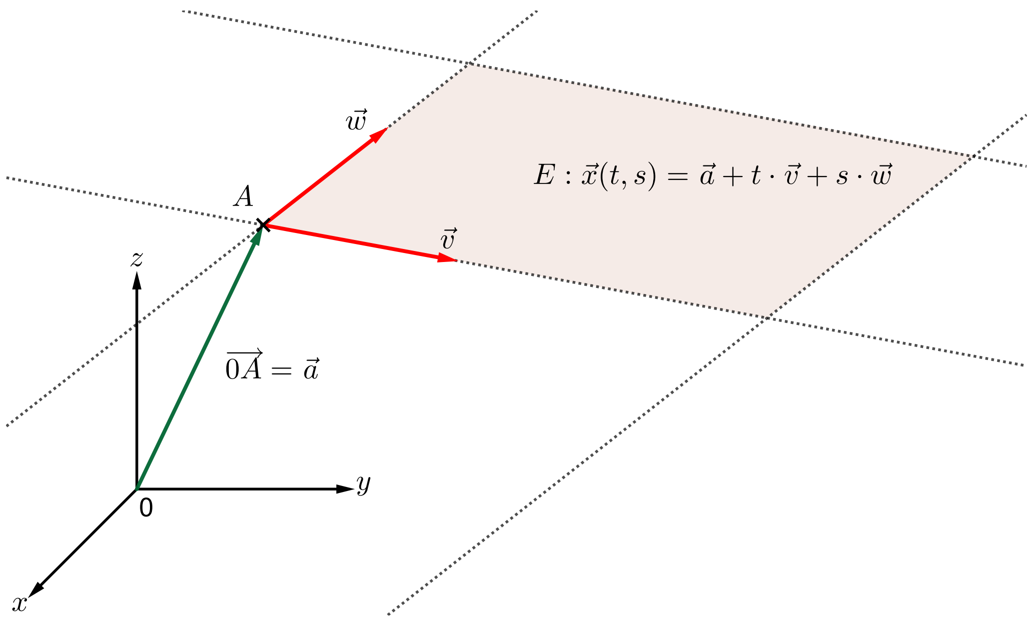
	in der Ebene	**im Raum**
Parameterform einer Geraden g mit **Aufpunktvektor**[2] $\vec{a}$ und **Richtungsvektor** $\vec{v}$	$g:\ \vec{x}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$	$g:\ \vec{x}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$
Koordinatenform einer Geraden g	$g:\ a \cdot x + b \cdot y = d$	

[2]Statt Aufpunktvektor sagt man auch **Stützvektor**.



14.5 Darstellungen von Ebenen im Raum

	im Raum
Parameterform einer Ebene E mit **Aufpunktvektor** $\vec{a}$ und **Richtungsvektoren** $\vec{v}$ und $\vec{w}$	$E:\ \vec{x}(t,s) = \vec{a} + t \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$
Koordinatenform einer Ebenen E mit **Aufpunktvektor** $\vec{a}$ und **Normalenvektor** $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$	$E:\ a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ wobei $d = \vec{n} \circ \vec{a}$
Normalenform einer Ebenen E mit **Aufpunktvektor** $\vec{a}$ und **Normalenvektor** $\vec{n}$	$E:\ \vec{n} \circ \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \vec{a} \right) = 0$



14.6 Abstände im Raum

Ebenen: $E: \; a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

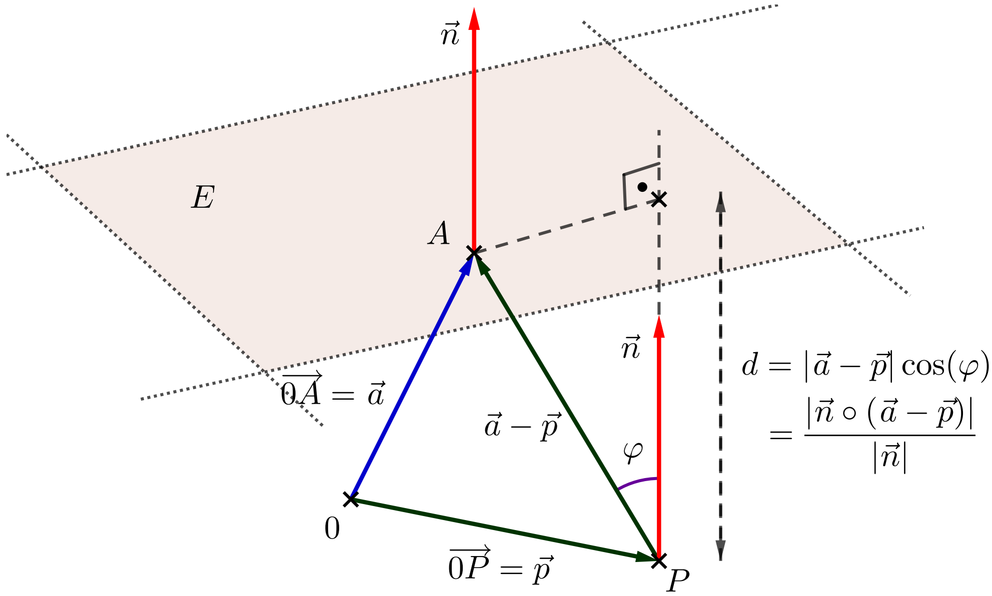
$F: \; \vec{x}(t,s) = \vec{a} + t \cdot \vec{v}_1 + s \cdot \vec{v}_2$

Geraden: $g: \; \vec{x}(t) = \vec{e} + t \cdot \vec{w}, \quad h: \; \vec{x}(t) = \vec{f} + t \cdot \vec{u}$

Punkt: $P(p_1/p_2/p_2)$ mit Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{0P}$

Konstellation	Abstand
Punkt/Gerade $d(P,g)$	$d(P,g) = \dfrac{\lvert \vec{w} \times (\vec{e} - \vec{p}) \rvert}{\lvert \vec{w} \rvert}$
Punkt/Ebene $d(P,E)$	$d(P,E) = \dfrac{\lvert a p_1 + b p_2 + c p_3 - d \rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \dfrac{\lvert \vec{n} \circ \vec{p} - d \rvert}{\lvert \vec{n} \rvert}$
Gerade/Gerade $d(g,h)$	$d(g,h) = \dfrac{\lvert \vec{w} \times (\vec{e} - \vec{f}) \rvert}{\lvert \vec{w} \rvert}$ (parallel) $d(g,h) = \dfrac{\lvert (\vec{w} \times \vec{u}) \circ (\vec{e} - \vec{f}) \rvert}{\lvert \vec{w} \times \vec{u} \rvert}$ (windschief)

Gerade/Ebene parallel $d(g,E)$	$d(g,E) = \dfrac{\lvert\vec{n}\circ\vec{e} - d\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$
Ebene/Ebene parallel $d(E,F)$	$d(E,F) = \dfrac{\lvert\vec{n}\circ\vec{a} - d\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$



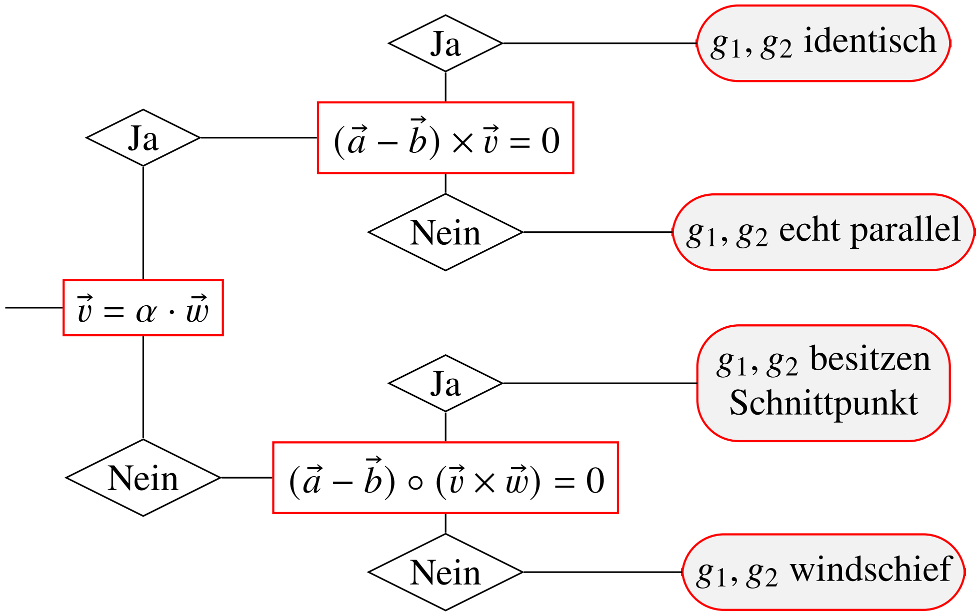
14.7 Lotpunkte, Lotgerade

Ortsvektor des Lotpunktes von P mit $\overrightarrow{0P} = \vec{p}$ auf $E : \vec{x}\circ\vec{n} = d$	$\vec{p} + \dfrac{d - \vec{p}\circ\vec{n}}{\lvert\vec{n}\rvert^2}\,\vec{n}$
Ortsvektor des Lotpunktes von P mit $\overrightarrow{0P} = \vec{p}$ auf $g : \vec{x}(t) = \vec{a} + t\,\vec{v}$	$\vec{a} + \dfrac{(\vec{p}-\vec{a})\circ\vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert^2}\,\vec{v}$
Parameterform der Lotgeraden von $g : \vec{x}(t) = \vec{a} + t\,\vec{v}$ in $E : \vec{x}\circ\vec{n} = d$	$\left(\vec{a} + \dfrac{d - \vec{a}\circ\vec{n}}{\lvert\vec{n}\rvert^2}\,\vec{n}\right) + t\big((\vec{v}\times\vec{n})\times\vec{n}\big)$

14.8 Gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen

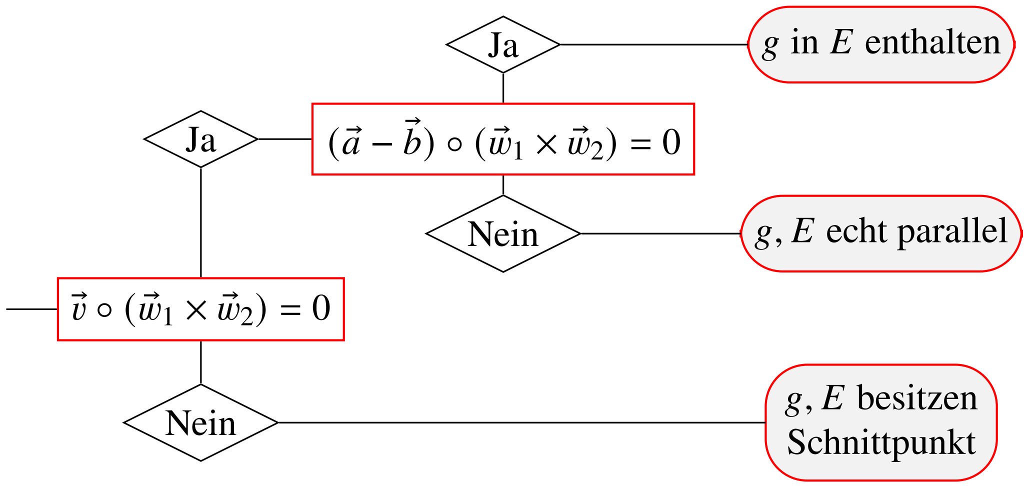
14.8.1 Gegenseitige Lage Gerade/Gerade

$$g_1 : \vec{x}(t) = \vec{a} + t\,\vec{v} \quad \text{und} \quad g_2 : \vec{x}(t) = \vec{b} + t\,\vec{w}$$



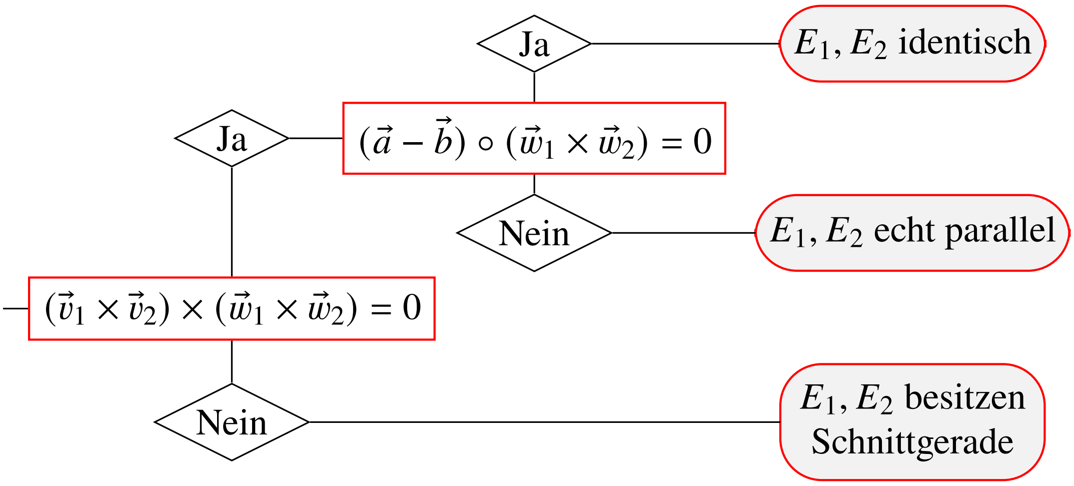
14.8.2 Gegenseitige Lage Gerade/Ebene

$$g : \vec{x}(t) = \vec{a} + t\,\vec{v} \quad \text{und} \quad E : \vec{x}(t,s) = \vec{b} + t\,\vec{w}_1 + s\,\vec{w}_2$$



14.8.3 Gegenseitige Lage Ebene/Ebene

$$E_1 : \vec{x}(t,s) = \vec{a} + t\,\vec{v}_1 + s\vec{v}_2 \quad \text{und} \quad E_2 : \vec{x}(t,s) = \vec{b} + t\,\vec{w}_1 + s\,\vec{w}_2$$



15 Statistik

15.1 Absolute und relative Häufigkeit statistischer Daten

Im Folgenden sind $x_1, x_2, \ldots, x_k$ die unterschiedlichen **Werte** einer n-elementigen **Datenmenge**; insbesondere ist $n \geq k$.
Die Zahl n heißt **Umfang** der Datenreihe.

Absolute Häufigkeit des Wertes x_i = Anzahl von x_i in der Datenmenge	H_i	$\sum_{i=1}^{k} H_i = H_1 + H_2 + \ldots + H_k = n$
Relative Häufigkeit des Wertes x_i	$h_i = \dfrac{H_i}{n}$	$\sum_{i=1}^{k} h_i = h_1 + h_2 + \ldots + h_k = 1$

15.2 Statistische Streu- und Lagemaße

15.2.1 Mittelwerte, Varianz und Standardabweichung

Ein wichtiges Lagemaß ist der **arithmetische Mittelwert**. Das zugehörige Streumaß ist die **Varianz** bzw. deren Quadratwurzel die **Standardabweichung**:

Stat. Mittelwert / arithmetischer Mittelwert	$\bar{x} = \text{Summe aller Werte}/n$ $= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} H_i \cdot x_i = \sum_{i=1}^{k} h_i \cdot x_i$
Stat. Varianz	$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} H_i \cdot (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{k} h_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
Stat. Standardabweichung	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Weitere Mittelwerte:

Geometrischer Mittelwert (Daten positiv)	$\bar{x}_{\text{geo}} = \sqrt[n]{\text{Produkt aller Werte}}$ $= \sqrt[n]{x_1^{H_1} \cdot x_2^{H_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{H_k}} = x_1^{h_1} \cdot x_2^{h_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{h_k}$
Harmonischer Mittelwert (Daten $\neq 0$)	$\bar{x}_{\text{harm}} = n/\text{Summe aller Kehrwerte}$ $= \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{H_i}{x_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{h_i}{x_i}}$

15.2.2 Median, Quartile und Interquartilabstand

Den **Median** bestimmt man, indem man die Daten inklusive sich wiederholender Daten der Größe nach sortiert, also $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq y_{n-1} \leq y_n$:

Median	y_{med} = Der Wert, für den die Hälfte aller Datenwerte links von ihm und die andere Hälfte rechts von ihm liegen $= \begin{cases} y_{\frac{n+1}{2}}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left(y_{\frac{n}{2}} + y_{\frac{n}{2}+1}\right), & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

Kennt man den Median, dann hat man die Datenreihe in zwei Hälften zerlegt. Dabei wird der Median –falls der Umfang n der Datenreihe ungerade ist– weder zur unteren noch zur oberen Hälfte gezählt.

Die Mediane der oberen und unteren Hälfte der Datenreihe liefern ein zum Median passendes Streumaß. Die beiden zugehörigen Werte bezeichnet man als **Quartile**. Genauer:

unteres Quartil	$y_{\text{quart}-}$ = Median der unteren Hälfte der Datenwerte
oberes Quartil	$y_{\text{quart}+}$ = Median der oberen Hälfte der Datenwerte

Grob kann man sagen, dass die Quartile und der Median die Datenreihe in vier Viertel unterteilen. Das untere Quartil ist der obere Wert des unteren Viertels und das obere Quartil ist der untere Wert des oberen Viertels einer Datenreihe. Damit liegen zwischen unterem Quartil und Median und zwischen Median und oberem Quartil jeweils ein Viertel der Datenreihe.[3]
Als **Interquartilabstand** bezeichnet man die Differenz

$$\boxed{\text{IQR} = y_{\text{quart}+} - y_{\text{quart}-}}$$

Der IQR gibt die Breite des Bereichs um den Median an, in dem sich die Hälfte aller Werte der Datenreihe befinden.

16 Kombinatorik

16.1 Fakultät und Binomialkoeffizient

Fakultät	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$
Binomialkoeffizient	$\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{k!(n-r)!}$

Spezialfall: $\boxed{0! = 1}$
Eigenschaften des Binomialkoeffizienten:

$$\boxed{\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}} \qquad \boxed{\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}}$$

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n}$$

[3] Der Begriff Quartil ist im Gegensatz zum Median in der Literatur nicht eindeutig festgelegt. Wendet man statt der hier verwendeten Definition die Beschreibung aus https://de.wikipedia.org/wiki/Empirisches_Quantil an, dann kann es zu leichten Abweichungen der berechneten Werte kommen.

16.2 Urnenmodell

Ein **Urnenmodell** besteht aus einer Urne mit n Kugeln. Aus dieser Urne werden auf verschiedene Arten Kugeln gezogen. Dabei kann es eine Rolle spielen, in welcher Reihenfolge man die Kugeln zieht und ob man die Kugeln nach dem Ziehen zurücklegt.

In der folgenden Tabelle ist die Anzahl der jeweils möglichen Ziehungen angegeben.

- Alle Kugeln haben die gleiche Farbe. Es werden r-Kugeln gezogen:

	ohne Zurücklegen (ohne Wiederholung)	**mit Zurücklegen** (mit Wiederholung)
mit Reihenfolge (**Variationen**)	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$ (**nPr**)	n^r
ohne Reihenfolge (**Kombinationen**)	$\dbinom{n}{r}$ (**nCr**)	$\dbinom{n+r-1}{r}$

  Spezialfall $r = n$: Es werden mit Beachtung der Reihenfolge und ohne Zurücklegen alle Kugeln gezogen. Die Anzahl der möglichen Ziehungen ist

  $$\boxed{n!}$$

  Man spricht von **Permutationen**.

- Die Kugeln besitzen ℓ unterschiedliche Farben.

  Die Kugeln mit der Farbe i tritt m_i-mal auf, d. h. $m_1 + m_2 + \ldots + m_\ell = n$.

  Es werden alle n Kugeln unter Beachtung der farblichen Reihenfolge ohne Zurücklegen gezogen. Die Anzahl der möglichen Ziehungen ist

  $$\boxed{\frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \ldots \cdot m_\ell!}}$$

17 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

17.1 Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Ein **Elementarereignis** oder **Ergebnis** e_i ist ein Element der **Ergebnismenge** $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

$p_i = P(e_i)$ bezeichnet die **Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses** $e_i \in \Omega$.

$$\boxed{\textbf{Summenregel für Elementarereignisse:} \quad p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1}$$

Als **Ereignis** E bezeichnet man eine Teilmenge der Ergebnismenge:

$$E = \{e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}\} \subset \Omega$$

Damit ist ein Ereignis E ein Element der Potenzmenge von Ω, also $E \in \mathcal{P}(\Omega)$.
Eine Menge möglicher Ereignisse bezeichnet man als **Ereignisraum** $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, wenn

- $\Omega \in \mathcal{E}$
- Mit $E \in \mathcal{E}$ ist auch $\bar{E} \in \mathcal{E}$
- Mit $E_1, E_2, E_3 \ldots \in \mathcal{E}$ ist auch $E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \in \mathcal{E}$

Ist $E = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k}\}$ ein Ereignis, dann ist die

$$\boxed{\textbf{Wahrscheinlichkeit von } E\textbf{:} \quad P(E) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k}}$$

Dabei gilt immer $\boxed{0 \leq P(E) \leq 1}$

Das **Gegenereignis** zum Ereignis E ist $\bar{E} = \Omega \setminus E$. Es gilt $\boxed{P(\bar{E}) = 1 - P(E)}$
Rechenregeln für Ereignisse $E, F \subset \Omega$:

$$\boxed{P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)} \quad \boxed{P(E \setminus F) = P(E) - P(E \cap F)}$$

17.2 Laplace-Experimente, Laplace-Formel

$\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ist die Ergebnismenge eines **Laplace-Experiments**, wenn jedes Elementarereignis die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, also

$$\boxed{p_i = \frac{1}{n}}$$

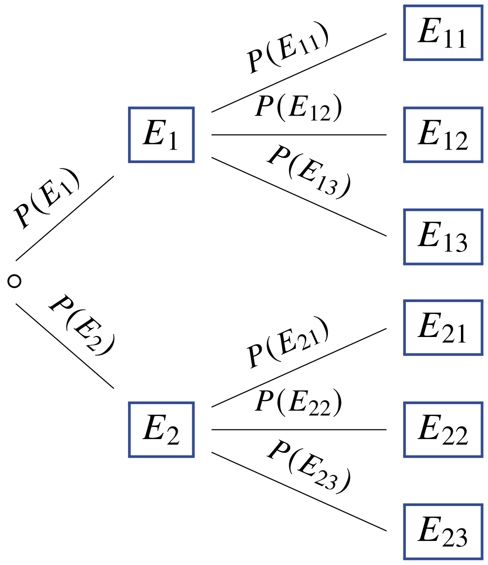
Diese Wahrscheinlichkeit heißt die **Laplace-Wahrscheinlichkeit** des Laplace-Experiments.
Für ein Ereignis E eines Laplace-Experiments gilt:

$$\boxed{\textbf{Laplace-Formel:} \quad P(E) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse in } E}{\text{Anzahl aller Ergebnisse in } \Omega}}$$

17.3 Baumdiagramm und Pfadregel für mehrstufige Zufallsexperimente

Mehrstufige Zufallsexperimente lassen sich mit Hilfe von **Baumdiagrammen** beschreiben.

Beispiele für ein Baumdiagramm eines zweistufigen Zufallsexperiments:



$$P(E_1 \cap E_{11}) = P(E_1) \cdot P(E_{11})$$

$$P(E_1 \cap E_{12}) = P(E_1) \cdot P(E_{12})$$

$$P(E_1 \cap E_{13}) = P(E_1) \cdot P(E_{13})$$

$$P(E_2 \cap E_{21}) = P(E_2) \cdot P(E_{21})$$

$$P(E_2 \cap E_{22}) = P(E_2) \cdot P(E_{22})$$

$$P(E_2 \cap E_{23}) = P(E_2) \cdot P(E_{23})$$

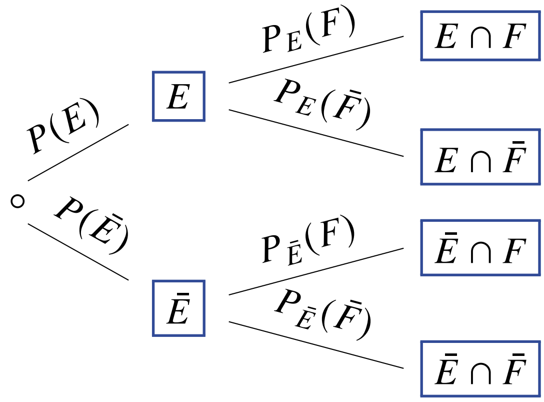
Rechenregeln im Umgang mit Baumdiagrammen (die Beispiele beziehen sich auf das obige Baumdiagramm):

Erste Vollständigkeitsregel	Die Wahrscheinlichkeit der Äste jeder Stufe addieren sich zu 1
Pfadmultiplikationsregel	Entlang eines Pfades werden die Wahrscheinlichkeiten multipliziert
Pfadadditionsregel	Die Wahrscheinlichkeit vollständiger Pfade werden addiert
Zweite Vollständigkeitsregel	Die Wahrscheinlichkeiten aller vollständigen Pfade einer Stufe addieren sich zu 1

17.4 Bedingte Wahrscheinlichkeit, Vierfeldertafel, abhängige und unabhängige Ereignisse

$P_E(F)$	Wahrscheinlichkeit des Ereignisses F unter der Bedingung, dass zuvor das Ereignis E eingetreten ist (**Bedingte Wahrscheinlichkeit**)

Darstellung mit Baumdiagramm



Darstellung mit Vierfeldertafel

	F	$\bar{F}$	
E	$P(E \cap F)$	$P(E \cap \bar{F})$	$P(E)$
$\bar{E}$	$P(\bar{E} \cap F)$	$P(\bar{E} \cap \bar{F})$	$P(\bar{E})$
	$P(F)$	$P(\bar{F})$	1

$P_E(F) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)}$	$P_E(\bar{F}) = \dfrac{P(E \cap \bar{F})}{P(E)}$
$P_{\bar{E}}(F) = \dfrac{P(\bar{E} \cap F)}{P(\bar{E})}$	$P_{\bar{E}}(\bar{F}) = \dfrac{P(\bar{E} \cap \bar{F})}{P(\bar{E})}$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit	$P(F) = P_E(F) \cdot P(E) + P_{\bar{E}}(F) \cdot P(\bar{E})$

Satz von Bayes	$P_F(E) = \dfrac{P_E(F) \cdot P(E)}{P(F)}$

Unabhängigkeit der Ereignisse E **und** F	$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$

E, F unabhängig $\iff$ $E, \bar{F}$ unabhängig

$$\iff P_E(F) = P_{\bar{E}}(F) = P(F) \iff P_F(E) = P_{\bar{F}}(E) = P(E)$$

17.5 Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

17.5.1 Zufallsvariablen

Eine **Zufallsvariable** (auch: **Zufallsgröße**) X eines Zufallsexperiments mit der Ergebnismenge Ω ist eine Abbildung

$$\boxed{X : \Omega \to \mathbb{R}}$$

Sie ordnet jedem Elementarereignis $e \in \Omega$ eine Zahl $X(e) \in \mathbb{R}$ zu.
Im folgenden sei die Wertemenge von X endlich, etwa $\mathbb{W}_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$. Das ist etwa der Fall, wenn $\Omega = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ selbst endlich ist. Dann ist insbesondere $r \leq n$.
Man schreibt $X^{-1}(x) = \{e \in \Omega \,|\, X(e) = x\}$ für die Menge der Elementarereignisse, die durch X auf $x \in \mathbb{R}$ abgebildet werden.
Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $P(X)$ der Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$\boxed{P(X) : \mathbb{R} \to [0, 1]}$$

Sie ordnet der Zahl x den Wert $P(X = x) = P\big(X^{-1}(x)\big)$ zu.
Insbesondere ist $P(X = x) = 0$, wenn $x \notin \mathbb{W}_X$, also wenn x durch X gar nicht getroffen wird. Es gilt

$$\boxed{\sum_{x \in \mathbb{R}} P(X = x) = 1}$$

Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen **unabhängig**, wenn
$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \quad$ für alle $\quad x, y \in \mathbb{R}$

17.5.2 Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Mit der Wertemenge $\mathbb{W}_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_r\}$ der Zufallsvariablen X gelten folgende Bezeichnungen:

Erwartungswert von X	$E(X) = \sum_{i=1}^{r} x_i \cdot P(X = x_i)$
Varianz von X	$V(X) = \sum_{i=1}^{r} (x_i - E(X))^2 \cdot P(X = x_i)$
Standardabweichung von X	$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Beziehung zwischen Varianz und Mittelwert:

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2}$$

18 Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

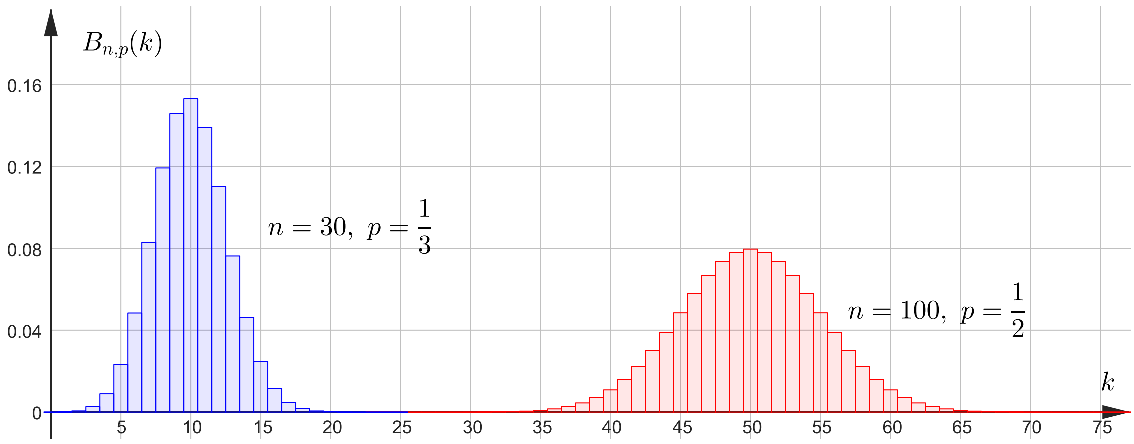
18.1 Bernoulli-Experimente, Bernoulli-Kette und Binomialverteilung

Ein **Bernoulli-Experiment** ist ein Zufallsexperiment mit einem zweielementigen Ergebnisraum $\Omega = \{pos, neg\}$ mit $P(pos) = p$, $P(neg) = q = 1 - p$.
Führt man ein Bernoulli-Experiment n-mal durch, so erhält man eine **Bernoulli-Kette** der Länge n.
Dies liefert die Zufallsvariable $X^{B_{n,p}}$:

$$\boxed{X^{B_{n,p}} = \text{Anzahl des Ergebnisses } pos \text{ in der Bernoulli-Kette der Länge } n}$$

Die Zufallsvariable $X^{B_{n,p}}$ nimmt die Werte $0, 1, \ldots, n$ an und man schreibt $P(X^{B_{n,p}} = k) = B_{n,p}(k)$. Für diese Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt:

$$\boxed{B_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}}$$



$B_{n,p}$ heißt **Binomialverteilung**.
Ihr **Erwartungswert**, ihre **Varianz** und ihre **Standardabweichung** sind:

$$\boxed{E\left(X^{B_{n,p}}\right) = np} \qquad \boxed{V\left(X^{B_{n,p}}\right) = npq} \qquad \boxed{S\left(X^{B_{n,p}}\right) = \sqrt{npq}}$$

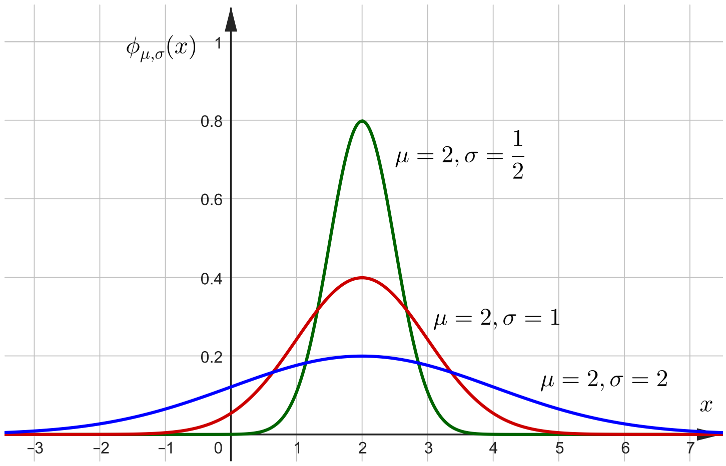
18.2 Normalverteilung und Standardnormalverteilung

Eine Zufallsvariable $X^{N_{\mu,\sigma}}$ mit Werten in $\mathbb{R}$ heißt (μ, σ)**-normalverteilt**, wenn

$$\boxed{P(X^{N_{\mu,\sigma}} \leq x) = \Phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dt}$$

Der Integrand $\phi_{\mu,\sigma}(x)$ heißt **Dichte der** (μ,σ)**-Normalverteilung** $\Phi_{\mu,\sigma}(x)$

$$\boxed{\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}$$



Erwartungswert, **Varianz** und **Standardabweichung** der (μ,σ)-Normalverteilung:

$$\boxed{E\left(X^{N_{\mu,\sigma}}\right) = \mu} \qquad \boxed{V\left(X^{N_{\mu,\sigma}}\right) = \sigma^2} \qquad \boxed{S\left(X^{N_{\mu,\sigma}}\right) = \sigma}$$

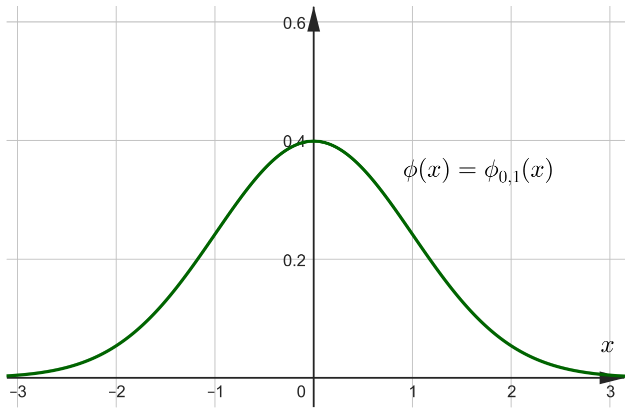
Die $(1,0)$-Normalverteilung heißt **Standardnormalverteilung**:

$$\boxed{\Phi(x) = \Phi_{1,0}(x)} \qquad \boxed{\phi(x) = \phi_{1,0}(x)}$$

Es gilt

$$\boxed{\Phi_{\mu,\sigma}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$

$$\boxed{\phi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)}$$



Eigenschaften der (μ,σ)**-Normalverteilung**

$$\boxed{\begin{aligned}
&P(X^{N_{\mu,\sigma}} \geq \mu + R) = P(X^{N_{\mu,\sigma}} \leq \mu - R) = \Phi_{\mu,\sigma}(\mu - R)\\
&P(X^{N_{\mu,\sigma}} \leq \mu + R) = P(X^{N_{\mu,\sigma}} \geq \mu - R) = 1 - \Phi_{\mu,\sigma}(\mu - R)\\
&P(X^{N_{\mu,\sigma}} \leq \mu) = \Phi_{\mu,\sigma}(\mu) = \tfrac{1}{2}\\
&P(|X^{N_{\mu,\sigma}} - \mu| \leq R) = P(\mu - R \leq X^{N_{\mu,\sigma}} \leq \mu + R) = 1 - 2\,\Phi_{\mu,\sigma}(\mu - R)
\end{aligned}}$$

Ist X eine (μ_X, σ_X)-normalverteilte und Y eine (μ_Y, σ_Y)-normalverteilte Zufallsvariable und sind X und Y unabhängig, dann sind

$$Z = aX + b \qquad (a\mu_X + b, a\sigma_X)\text{-normalverteilt}$$

und

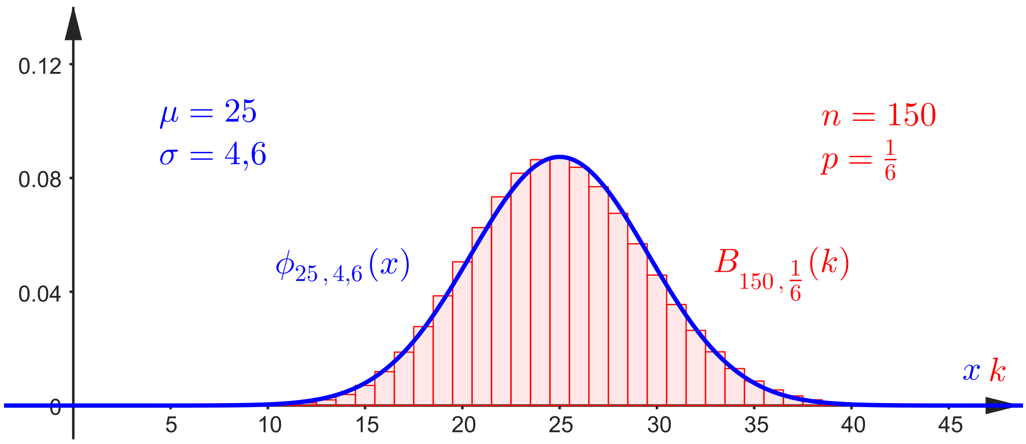
$$Z = X + Y \qquad \left(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2}\right)\text{-normalverteilt.}$$

18.3 Wichtige Beziehung zwischen Binomial- und Normalverteilung

Die (n, p)-Binomialverteilung, lässt sich durch eine (μ, σ)-Normalverteilung annähern, wenn mit $q = p - 1$ die

$$\boxed{\textbf{Moivre-Bedingung} \ \ npq > 9}$$

erfüllt ist.
In diesem Fall ist $\mu = np$ und $\sigma = \sqrt{npq}$ zu wählen, so dass beide Verteilungen den gleichen Erwartungswert und die gleiche Standartabweichung haben; z. B. $n = 150$, $p = \frac{1}{6}$, also $\mu = np = 25$ und $\sigma = \sqrt{npq} \approx 4{,}6$:



Näherungsformel:

$$P\left(k_1 \leq X^{B_{n,p}} \leq k_2\right) \approx P\left(k_1 - 0{,}5 \leq X^{N_{\mu,\sigma}} \leq k_2 + 0{,}5\right)$$

also

$$\boxed{\sum_{k=k_1}^{k_2} B_{n,p}(k) \approx \Phi_{\mu,\sigma}(k_2 + 0{,}5) - \Phi_{\mu,\sigma}(k_1 - 0{,}5)}$$

Spezialfälle der Näherungsformel:

- $P\big(X^{B_{n,p}} = k\big) \approx \Phi_{\mu,\sigma}(k+0{,}5) - \Phi_{\mu,\sigma}(k-0{,}5)$
- $P\big(X^{B_{n,p}} \leq k\big) \approx \Phi_{\mu,\sigma}(k+0{,}5) - \Phi_{\mu,\sigma}(-0{,}5)$
- $P\big(X^{B_{n,p}} \geq k\big) \approx \Phi_{\mu,\sigma}(n+0{,}5) - \Phi_{\mu,\sigma}(k-0{,}5)$

19 Hypothesentests

19.1 Nullhypothese, Gegenhypothese und Fehlerarten

H_0 bezeichnet in diesem Abschnitt stets die **Nullhypothese** und H_1 die **Gegenhypothese**.

	Wirklichkeit	
	H_0 wahr	H_1 wahr
H_0 wird abgelehnt H_1 wird angenommen	**Fehler 1. Art** α-Fehler	richtige Entscheidung
H_0 wird angenommen H_1 wird abgelehnt	richtige Entscheidung	**Fehler 2. Art** β-Fehler

In den folgenden Hypothesentests ist

- stets der **Annahmebereich** (auch **Konfidenzbereich**) gesucht,
- wobei eine gewisse **Irrtumswahrscheinlichkeit** (auch **Signifikanzniveau**) α vorgegeben ist.

Wird die Wahrscheinlichkeit durch die Normalverteilung angenähert, dann kann man die Breite des (symmetrischen) Annahmebereichs in Vielfachen $\ell\cdot\sigma$ der Standardabweichung angeben.
Dabei gelten mit

$$\boxed{P\big(\mu - \ell\cdot\sigma \leq X^{N_{\mu,\sigma}} \leq \mu + \ell\cdot\sigma\big) = 1 - \alpha_\ell}$$

also

$$\boxed{\Phi_{\mu,\sigma}(\mu - \ell\,\sigma) = \frac{\alpha_\ell}{2}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\Phi_{1,0}(-\ell) = \frac{\alpha_\ell}{2}} \quad \text{oder} \quad \boxed{\Phi_{1,0}(\ell) = 1 - \frac{\alpha_\ell}{2}}$$

folgende nützliche Beziehungen:

ℓ	$1-\alpha_\ell$	α_ℓ
1	0,683 (68,3%)	0,317 (31,7%)
2	0,954 (95,4%)	0,046 (4,6%)
3	0,997 (99,7%)	0,003 (0,3%)

ℓ	$1-\alpha_\ell$	α_ℓ
1,64	0,900 (90%)	0,100 (10%)
1,96	0,950 (95%)	0,050 (5%)
2,58	0,990 (99%)	0,010 (1%)
3,29	0,999 (99,9%)	0,001 (0,1%)

19.2 Hypothesentests

19.2.1 Linksseitiger Hypothesentest ($H_0 : p \geq p_0$, $H_1 : p < p_0$)

Nullhypothese	Gegenhypothese	Signifikanz
$H_0 : p \geq p_0$	$H_1 : p < p_0$	α

Annahmebereich:

$\boxed{X \geq g_l}$ mit linker Grenze g_l aus $\boxed{P_{p_0}(X < g_l) = \alpha}$

Entscheidungsregel für die Stichprobe X_0:

$\boxed{H_0 \text{ wird abgelehnt, wenn } X_0 < g_l}$

19.2.2 Rechtsseitiger Hypothesentest ($H_0 : p \leq p_0$, $H_1 : p > p_0$)

Nullhypothese	Gegenhypothese	Signifikanz
$H_0 : p \leq p_0$	$H_1 : p > p_0$	α

Annahmebereich:

$\boxed{X \leq g_r}$ mit rechter Grenze g_r aus $\boxed{P_{p_0}(X > g_r) = \alpha}$

Entscheidungsregel für die Stichprobe X_0:

$\boxed{H_0 \text{ wird abgelehnt, wenn } X_0 > g_r}$

19.2.3 Beidseitiger Hypothesentest ($H_0 : p = p_0$, $H_1 : p \neq p_0$)

Nullhypothese	Gegenhypothese	Signifikanz
$H_0 : p = p_0$	$H_1 : p \neq p_0$	α

Annahmebereich:

$\boxed{g_l \leq X \leq g_r}$ mit g_l, g_r aus $\boxed{P_{p_0}(X > g_r) = \frac{\alpha}{2} \text{ und } P_{p_0}(X < g_l) = \frac{\alpha}{2}}$

Entscheidungsregel für den Stichprobenwert X_0:

$$\boxed{H_0 \text{ wird abgelehnt, wenn } X_0 < g_l \text{ oder } X_0 > g_r}$$

19.3 Beispiele: Annahmebereiche für spezielle Zufallsvariablen

Im Folgenden sind $X, X_1, \ldots, X_n$ jeweils (n, p)-binomialverteilte, unabhängige Zufallsvariablen, die durch die gleiche Normalverteilung mit $\mu_X = np$ und $\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$ angenähert werden.

Dann lassen sich das **Stichprobenmittel** $\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n)$ und die **relative Häufigkeit** $h = \dfrac{1}{n}X$ ebenfalls durch Normalverteilungen annähern. Deren Erwartungswerte und Standardabweichungen sind:

$$\mu_{\overline{X}} = \mu_X = np\,, \quad \sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} = \sqrt{p(1-p)}$$

$$\text{und} \qquad \mu_h = \frac{\mu_X}{n} = p\,, \quad \sigma_h = \frac{\sigma_X}{n} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\,.$$

Damit lassen sich (für einen beidseitigen Test) folgende symmetrische Annahmebereiche angeben:

$$\text{für } X: \qquad P\left(|X - np| \leq \ell \cdot \sqrt{np(1-p)}\right) \leq 1 - \alpha\,,$$

$$\text{für } \overline{X}: \qquad P\left(|\overline{X} - np| \leq \ell \cdot \sqrt{p(1-p)}\right) \leq 1 - \alpha\,,$$

$$\text{für } h: \qquad P\left(|h - p| \leq \ell \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right) \leq 1 - \alpha\,.$$

Dabei berechnet sich ℓ aus

$$\Phi_{(1,0)}(\ell) = 1 - \frac{\alpha}{2}\,.$$

20 Zahlentheorie

20.1 Teilbarkeit, Primzahlen und Faktorisierung

In diesem Abschnitt sind alle Zahlen ganze Zahlen.

Teilbarkeit ($a \neq 0$)	n teilt $a \iff n \mid a$ $\iff$ Es gibt eine Zahl k, sodass $a = k \cdot n$
	Teilt n die Zahl a, dann heißt n ein **Teiler von** a
	$\mathcal{T}(a)$ bezeichnet die **Teilermenge** von a
ggT	$\mathrm{ggT}(a, b) =$ **größter gemeinsamer Teiler der Zahlen** a, b $$\mathrm{ggT}(a, b) = \max\big(\mathcal{T}(a) \cap \mathcal{T}(b)\big)$$
Teilerfremdheit	a, b heißen **teilerfremd**, wenn $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$ D. h. a und b haben keinen gemeinsamen Teiler außer 1
Primzahl	$p > 1$ heißt **Primzahl**, wenn p nur die Teiler 1 und p hat, also wenn $\mathcal{T}(p) = \{1, p\}$
Primfaktor-zerlegung	Jede Zahl $a > 0$ besitzt eine eindeutige Zerlegung in Primfaktoren, d. h. es gibt (nicht unbedingt verschiedene) Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_r$, sodass $$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r$$

20.2 Reste, Euklidischer Algorithmus

Rest	Sind a und $n > 0$ Zahlen, dann gibt es eine Zahl k und eine Zahl $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ so dass $$a = k \cdot n + r$$
	r heißt **Rest von** a **beim Teilen durch** n

Euklidischer Algorithmus für $\mathrm{ggT}(a,b)$ $b > a > 0$	$r_{-1} = b,\, r_0 = a$ Für $i \geq 1$: falls $r_{i-1} \neq 0$ bestimme k_i und r_i, sodass $$r_{i-2} = k_i \cdot r_{i-1} + r_i$$	
	Der Algorithmus bricht stets ab, da die Reste in jedem Schritt kleiner werden.	
	Hat man m Schritte benötigt, d. h. $r_m = 0$, so ist $\mathrm{ggT}(a,b)$ der Rest des vorletzten Schritts, also $$\mathrm{ggT}(a,b) = r_{m-1}$$	

erweiterter euklidischer Algorithmus	Zu zwei Zahlen a und b gibt es Zahlen k, ℓ, so dass $$k \cdot a + \ell \cdot b = \mathrm{ggT}(a,b)$$

Man erhält diese Darstellung von $\mathrm{ggT}(a,b)$ etwa, indem man die Gleichungen aus dem Euklidischem Algorithmus in jedem Schritt auflöst und die zwei letzten nutzt, um sie im folgenden Schritt einzusetzen.

Beispiel: $a = 460$, $b = 158$:

$\underline{460} = 2 \cdot \underline{158} + \underline{144}$	$\rightarrow$	$\underline{144} = 1 \cdot \underline{460} - 2 \cdot \underline{158}$
$\underline{158} = 1 \cdot \underline{144} + \underline{14}$	$\rightarrow$	$\underline{14} = 1 \cdot \underline{158} - 1 \cdot \underline{144}$
		$= 1 \cdot \underline{158} - 1 \cdot (1 \cdot \underline{460} - 2 \cdot \underline{158})$
		$= 3 \cdot \underline{158} - 1 \cdot \underline{460}$
$\underline{144} = 10 \cdot \underline{14} + \underline{4}$	$\rightarrow$	$\underline{4} = \underline{144} - 10 \cdot \underline{14}$
		$= 1 \cdot (1 \cdot \underline{490} - 2 \cdot \underline{158}) - 10 \cdot (3 \cdot \underline{158} - 1 \cdot \underline{460})$
		$= 11 \cdot \underline{460} - 32 \cdot \underline{158}$
$\underline{14} = 3 \cdot \underline{4} + \boxed{\underline{2}}$	$\rightarrow$	$\underline{2} = \underline{14} - 3 \cdot \underline{4}$
		$= (3 \cdot \underline{158} - 1 \cdot \underline{460}) - 3 \cdot (11 \cdot \underline{460} - 32 \cdot \underline{158})$
		$= 99 \cdot \underline{158} - 34 \cdot \underline{460}$
$\underline{4} = 2 \cdot \underline{2}$		

Das gibt:

$$\mathrm{ggT}(460, 158) = 2 \quad \text{und} \quad 2 = 99 \cdot 158 - 34 \cdot 460\,.$$

20.3 Restklassen und Restklassenrechnung

Haben zwei Zahlen beim Teilen durch die Zahl $n > 1$ den gleichen Rest, so sagt man

$$\boxed{a \text{ und } b \text{ gehören zur gleichen } \textbf{Restklasse modulo } n}$$

oder

$$\boxed{a \text{ und } b \text{ sind } \textbf{kongruent modulo } n}$$

und man schreibt

$$\boxed{a \equiv b \bmod n}$$

In diesem Fall ist $a = k \cdot n + r$ und $b = \ell \cdot n + r$ für den gleichen Rest $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Insbesondere ist dann $a \equiv b \equiv r \bmod n$ und $a - b \equiv 0 \bmod n$.

Für die **Restklassenmenge** schreibt man $\boxed{\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}}$.

Rechenregeln für das Rechnen in der Restklassenmenge $\mathbb{Z}_n$:

$$\boxed{\begin{array}{c} a \bmod n \pm b \bmod n = (a \pm b) \bmod n \\ \hline a \bmod n \cdot b \bmod n = (a \cdot b) \bmod n \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a, b \text{ sind zueinander } \textbf{multiplikativ invers modulo } n \\ \iff \quad a \cdot b \equiv 1 \bmod n \end{array}}$$

Die multiplikativen Inversen in $\mathbb{Z}_n$:

Ist $a \not\equiv 0 \bmod n$, dann gibt es ein multiplikatives Inverses modulo n, wenn $\operatorname{ggT}(a, n) = 1$, d. h., wenn a und n nur den gemeinsamen Teiler 1 besitzen.

Spezialfall:[4]

Ist p eine Primzahl, dann findet man zu allen a mit $p \nmid a$ ein multiplikatives Inverses.

[4] $b \nmid a$ bedeutet: b ist kein Teiler von a.

20.4 Eulersche φ-Funktion und der Satz von Euler-Fermat

Eulersche φ-Funktion	$\varphi(n)$ = Anzahl der Zahlen in $\{1, \ldots, n-1\}$, die mit n nur den gemeinsamen Teiler 1 haben.

Rechenregeln für die Eulersche φ-Funktion:

$\varphi(p) = p - 1$	für eine Primzahl p
$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$	für eine Primzahl p
$\varphi(m \cdot n) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$	wenn $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$

Besitzt n die Primfaktorzerlegung $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$, so gilt:

$$\boxed{\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)}$$

Satz von Euler-Fermat

$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$	wenn $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$

Spezialfall:

$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$	wenn p prim und $p \nmid a$

20.5 Anwendung: Die RSA-Verschlüsselung

Die **RSA-Verschlüsselung** ist ein sogenanntes asymmetrisches Verschlüsselungsverfahren, da zum Verschlüsseln und Entschlüsseln einer Nachricht unterschiedliche Schlüssel verwendet werden.
Die RSA-Verschlüsselung benötigt drei Parameter $N, e, d \in \mathbb{Z}$ mit folgenden Bedingungen:

Wahl der Zahlen	N	$N = p \cdot q$ für zwei Primzahlen p, q
	e	$\mathrm{ggT}(\varphi(N), e) = 1$
	d	$e \cdot d \equiv 1 \bmod \varphi(N)$

(e, N) heißt **öffentlicher Schüssel**	(d, N) heißt **geheimer Schüssel**

Durchführen der RSA-Verschlüsselung

Originaltext A	**Verschlüsselter Text** B	**Entschlüsselter Text** A
$A^e \equiv B \bmod N$		$B^d \equiv A \bmod N$

Zusammenfassender Fahrplan für die RSA-Verschlüsselung

Schritt 1:	Man wählt zwei Primzahlen p und q und berechnet damit $N = p \cdot q$.
Schritt 2:	Man berechnet $\varphi(N) = (p-1)(q-1)$ und bestimmt eine Zahl e mit $\text{ggT}\big(e, \varphi(N)\big) = 1$. $\longrightarrow$ öffentlicher Schlüssel (e, N).
Schritt 3:	Man berechnet d aus dem Faktor vor e im erweiterten euklidischen Algorithmus für e und $\varphi(N)$: $k \cdot e + \ell \cdot \varphi(N) = 1$. Ist $0 < k < \varphi(N)$, dann wählt man $d = k$, andernfalls addiert/subtrahiert man $\varphi(N)$ so oft zu/von k, bis der Wert die gewünschte Eigenschaft hat: das ist dann d. $\longrightarrow$ geheimer Schlüssel (d, N).
Schritt 4:	Man verschlüsselt eine Originalnachricht A zur codierten Nachricht B, indem man $A^e \equiv B \bmod N$ berechnet.
Schritt 5:	Man entschlüsselt eine codierte Nachricht B zur Originalnachricht A, indem man $B^d \equiv A \bmod N$ berechnet.

Schritt 5 des Fahrplans klappt wegen $B^d \equiv (A^e)^d \equiv A^{e \cdot d} \equiv A \bmod N$

21 Matrizen und Determinanten

21.1 Matrizen

Eine **Matrix** ist ein rechteckiges Schema von Zahlen, d. h. die Einträge der Matrix sind in **Zeilen** und **Spalten** angeordnet.

Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten heißt $m \times n$-Matrix. Ist $m = n$ so spricht man von einer **quadratischen Matrix**.

Spezialall:

Ein Vektor im Raum, z. B. $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, kann als 3×1-Matrix interpretiert werden.

Die einzelnen Komponenten einer Matrix werden mit der Zeilen- und Spaltenzahl nummeriert. Eine $m \times n$-Matrix B hat dann $m \cdot n$ Komponenten b_{ij} mit $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ und man schreibt $B = \left(b_{ij}\right)$.

Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \left(b_{ij}\right)$$

also

$$b_{11} = 2, \quad b_{12} = -1, \quad b_{13} = 3, \quad b_{21} = 4, \quad b_{22} = 7, \quad b_{23} = -8$$

Die $n \times n$-**Einheitsmatrix** E_n ist die Matrix, bei der die Einträge auf der Diagonalen alle Eins sind und alle weiteren Einträge Null, z. B.

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

21.2 Matrizenrechnung I: Addition, Subtraktion, skalare Multiplikation

Addition und Subtraktion

Matrizen mit der gleicher Spalten- und Zeilenzahl kann man addieren und subtrahieren. Dies geschieht komponentenweise:

$$\boxed{A = \left(a_{ij}\right), B = \left(b_{ij}\right) \Longrightarrow C = A \pm B = \left(c_{ij}\right) \text{ mit } c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}}$$

Skalare Multiplikation

Matrizen kann man mit einer Zahl multiplizieren. Dies geschieht komponentenweise:

$$\boxed{A = \left(a_{ij}\right), \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow B = \alpha \cdot A = \left(b_{ij}\right) \text{ mit } b_{ij} = \alpha a_{ij}}$$

21.3 Matrizenrechnung II: Matrixmultiplikation

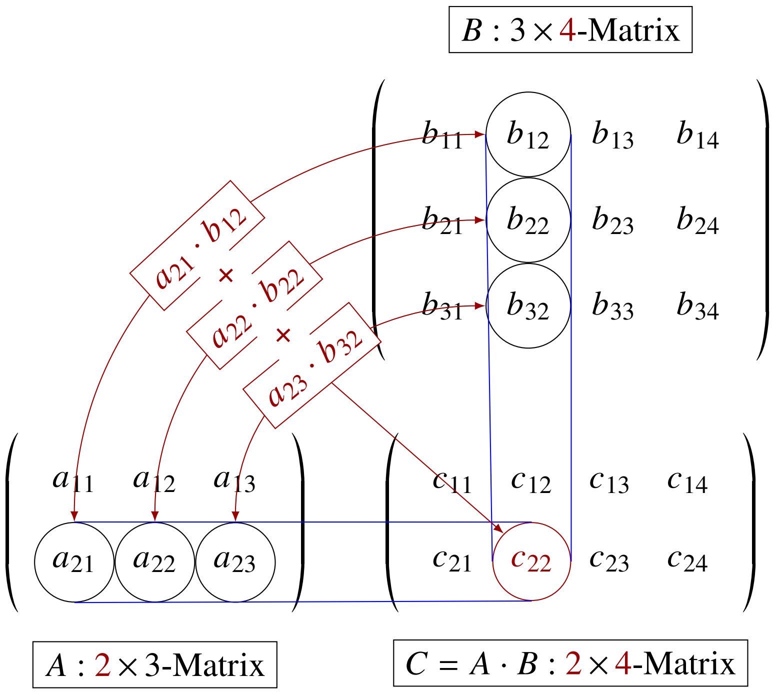
Matrixmultiplikation

Zwei Matrizen lassen sich multiplizieren, wenn die Spaltenzahl des ersten Faktors mit der Zeilenzahl des zweiten Faktors übereinstimmt: Ist A =

$\left(a_{ij}\right)_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,n}$ eine $m \times n$-Matrix und $B = \left(b_{ij}\right)_{i=1,\ldots,n;j=1,\ldots,k}$ eine $n \times k$-Matrix, dann ist $C = A \cdot B = \left(c_{ij}\right)_{i=1,\ldots,m;j=1,\ldots,k}$ eine $m \times k$-Matrix mit

$$\boxed{c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell j}}$$

Visualisierung:



21.4 Determinanten kleiner Matrizen

Die **Determinante** ordnet einer quadratischen Matrix A eindeutig eine Zahl $\det(A)$ zu.

Die Determinante einer 2×2-Matrix

$$\boxed{\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

Die Determinante einer 3×3-Matrix

Die Determinante einer 3×3-Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ kann man mit der **Sarrus-Regel** berechnen:

Dazu schreibt man die ersten beiden Spalten der Matrix neu rechts neben die Matrix. Dann berechnet man die Produkte der Diagonalen, um die Ergebnisse anschließend nach folgendem Schema zu addieren oder zu subtrahieren:

$$\begin{array}{ccc|cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} \\ - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} \end{array}}$$

Eigenschaften der Determinante:

- Besitzt eine Matrix A eine Zeile oder eine Spalte, die nur Nullen enthält, dann ist $\det(A) = 0$.
- Besitzt eine Matrix A zwei gleiche Zeilen oder zwei gleiche Spalten, dann ist $\det(A) = 0$.
- Die Determinante entscheidet, ob eine Matrix invertierbar ist, oder nicht, siehe Abschnitt 22.1:

$$\boxed{A \text{ ist invertierbar} \iff \det(A) \neq 0}$$

22 Lineare und affine Abbildungen mit Hilfe von Matrizen

22.1 Grundlegende Eigenschaften und inverse Matrix

Eine $n \times m$-Matrix A ordnet jedem Vektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ einen Vektor $A \cdot \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ zu.
A definiert somit eine **lineare Abbildung**, d. h. $A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit

$$\boxed{A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y}} \quad \text{und} \quad \boxed{A \cdot (\alpha \cdot \vec{x}) = \alpha \cdot (A \cdot \vec{x})}$$

Eine Matrix A kann höchstens dann eine bijektive lineare Abbildung beschreiben, wenn A quadratisch ist, also $m = n$.

Ist A quadratisch und die zugehörige lineare Abbildung bijektiv, dann heißt A **invertierbar**. In diesem Fall gibt es die inverse lineare Abbildung und für ihre zugehörige Matrix schreibt man A^{-1}. Diese Matrix heißt die **inverse Matrix** zu A.

Ist A eine invertierbare $n \times n$-Matrix, dann ist auch A^{-1} invertierbar mit $(A^{-1})^{-1} = A$. Es gilt

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E_n}$$

Die zu A inverse Matrix A^{-1} lässt sich mit Hilfe des **(erweiterten) Gauß-Algorithmus** bestimmen:

1. Man schreibt A und die Einheitsmatrix E_n nebeneinander:

   $$(\ A \mid E_n\ )$$

2. Man führt Gauß-Schritte an A so lange durch, bis Dreiecksform erreicht ist. Gleichzeitig führt man die selben Schritte an der Einheitsmatrix durch. Das gibt dann

   $$(\ ◹ \mid B\ )$$

3. Man führt so lange weitere Gaußschritte an der Dreiecksmatrix ◹ durch, bis diese in die Einheitsmatrix umgeformt ist. Gleichzeitig führt man die selben Schritte an der rechten Matrix B durch. Das gibt dann

   $$(\ E_n \mid A^{-1}\ )$$

Beispiel:

	$A =$			$E_3 =$			
I	4	2	1	1	0	0	
II	2	2	1	0	1	0	
III	1	1	0	0	0	1	
I	1	1	0	0	0	1	III
II	0	-2	-1	1	-2	0	$I - 2 \cdot II$
III	0	0	1	0	1	-2	$II - 2 \cdot III$
I	1	1	0	1	0	0	
II	0	-2	0	1	-1	-2	$II + III$
III	0	0	1	0	1	-2	
I	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$I + \frac{1}{2} \cdot II$
II	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2} \cdot II$
III	0	0	1	0	1	-2	
	$= E_3$			$= A^{-1}$			

Mit Hilfe der inversen Matrix lassen sich lineare Gleichungssysteme lösen:

Ist A invertierbar, dann hat das LGS $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ für jede rechte Seite $\vec{b}$ genau eine Lösung, nämlich $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

22.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Ist A eine quadratische $n \times n$-Matrix, dann heißt der Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ **Eigenvektor** und die Zahl λ **Eigenwert** von A, wenn

$$\boxed{A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}}$$

Ist $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ eine 2×2-Matrix, dann erhält man die Eigenwerte als Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

Eine 2×2-Matrix hat höchstens 2 unterschiedliche Eigenwerte.

Ist λ ein Eigenwert von A, dann erhält man die Eigenvektoren als Lösungen des LGS

$$(A - \lambda \cdot E_n) \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

Beispiele:

- Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Eigenvektoren zum selben Eigenwert λ, dann ist auch $\alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w}$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ein Eigenvektor zu λ.
- Die Einträge einer Diagonalmatrix sind die Eigenwerte dieser Matrix.
- Die Einträge der Diagonale einer Dreiecksmatrix sind die Eigenwerte dieser Matrix.
- α ist der einzige Eigenwert der speziellen Diagonalmatrix $\alpha \cdot E_n$ und alle Vektoren sind Eigenvektoren.

22.3 Streckung, Drehung, Spiegelung und Scherung im $\mathbb{R}^2$

Streckung um den Faktor α mittels **Streckmatrix** A_α	$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$
Drehung um den Winkel φ gegen den Uhrzeigersinn mittels **Drehmatrix** D_φ	$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$
Spiegelung an der Ursprungsgeraden mit Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ mittels **Spiegelungsmatrix** $S_{\vec{v}}$	$S_{\vec{v}} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2v_2^2}{v_1^2+v_2^2} & \frac{2v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} \\ \frac{2v_1v_2}{v_1^2+v_2^2} & 1 - \frac{2v_1^2}{v_1^2+v_2^2} \end{pmatrix}$
Scherung entlang der x-Achse (oder y-Achse) mit Scherfaktor $a \neq 0$ mittels **Schermatrix** $T_{x,a}$ (oder $T_{y,a}$)	$T_{x,a} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{y,a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$

Eigenwerte dieser Abbildungen:

- $A_\alpha = \alpha \cdot E_2$ hat den Eigenwert α und alle Vektoren sind Eigenvektoren.
- D_φ hat nur (reelle) Eigenwerte, wenn $\varphi = 0$ mit $D_0 = E_2$ oder $\varphi = 180°$ mit $D_{180°} = -E_2$. In beiden Fällen sind alle Vektoren Eigenvektoren.
- $S_{\binom{v_1}{v_2}}$ hat die Eigenvektoren $+1$ mit Eigenvektor $\binom{v_1}{v_2}$ und -1 mit Eigenvektor $\binom{-v_2}{v_1}$.
- $T_{x,a}$ und $T_{y,a}$ haben beide nur den Eigenwert 1. Zugehörige Eigenvektoren sind $\binom{1}{0}$ für $T_{x,a}$ und $\binom{0}{1}$ für $T_{y,a}$.

Wichtige Beispiele:

$$D_{45^\circ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad D_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_{180^\circ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R_{\binom{1}{0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad R_{\binom{0}{1}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_{\binom{\pm 1}{1}} = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}$$

22.4 Affine Abbildungen

Eine **affine Abbildung** $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Hintereinanderausführung einer linearen Abbildung mit Matrix A und einer Verschiebung um den Vektor $\vec{b}$:

$$\boxed{f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{b}}$$

Wichtige Eigenschaften:

$\vec{b} = \frac{1}{2}\big(f(\vec{x}) + f(-\vec{x})\big)$	$\vec{b} = f(\vec{0})$
$A \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = f(\vec{x}) - f(\vec{y})$	$A \cdot \vec{x} = f(\vec{x}) - f(\vec{0})$

Sind $f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x} + \vec{b}$ und $g(\vec{x}) = B \cdot \vec{x} + \vec{c}$, dann ist

$$\boxed{f\big(g(\vec{x})\big) = A \cdot B \cdot \vec{x} + (A \cdot \vec{c} + \vec{b})}$$

Eine affine Abbildung $f(\vec{x})$ ist invertierbar, wenn die Matrix A eine inverse Matrix A^{-1} besitzt. Dann ist

$$\boxed{f^{-1}(\vec{x}) = A^{-1} \cdot \vec{x} - A^{-1} \cdot \vec{b}}$$

Abbildungseigenschaften invertierbarer affiner Abbildungen im $\mathbb{R}^2$:
Sind P', Q', R' die Bilder der Punkte P, Q, R unter einer affinen Abbildung,

dann gilt:

- Liegen P, Q, R in dieser Reihenfolge auf einer Geraden, dann gilt das auch für P', Q', R'.
- Q' teilt die Strecke $P'R'$ im gleichen Verhältnis wie Q die Strecke PR.
- Der Mittelpunkt einer Strecke wird auf den Mittelpunkt der Bildstrecke abgebildet.
- Bilden P, Q, R ein Dreieck, dann auch P', Q', R'.
- Durch die Bilder der Ecken eines Dreiecks ist eine affine Abbildung eindeutig festgelegt.
- Bilder paralleler Geraden sind wieder parallele Geraden.

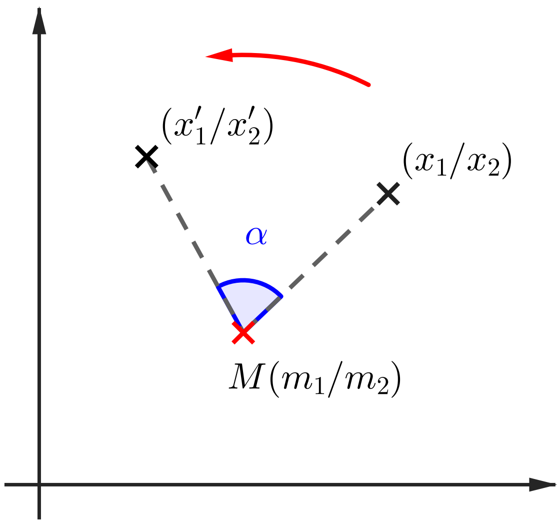
22.5 Beispiel: Drehung um ein Drehzentrum

Eine Drehung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn bei gegebenem Drehzentrum $M(m_1/m_2)$ wird durch die affine Abbildung

$$\boxed{f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} \right)}$$

beschrieben.

Dabei ist $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ der Ortsvektor des Urbildes (x_1/x_2) und $f(x_1, x_2)$ der Ortsvektor des Bildpunktes (x_1'/x_2') nach der Drehung um den Punkt M:



23 Logik

23.1 Grundbegriffe der Logik

Eine **logische Aussage** A ist ein sprachlicher Satz oder eine mathematische Gleichung, der man eindeutig einen **Wahrheitswert** zuordnen kann.
Die möglichen Wahrheitswerte sind **wahr** (w oder 1) und **falsch** (f oder 0).

23.2 Logische Verknüpfungen und ihre Wahrheitswerttabellen

Zusammengesetzte Aussagen lassen sich mit Hilfe spezieller **logischer Verknüpfungen** beschreiben.
Häufig verwendete Verknüpfungen heißen:

Negation	**Konjunktion**	**Disjunktion**	**Implikation**
NOT, NICHT	AND, UND	OR, ODER	IMPLY, FOLGT
$\neg$	$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$

Bikonditional	**Kontravalenz**	**Exlusion**	**Rejektion**
EQUIV, ÄQUIV	XOR	NAND	NOR
$\leftrightarrow$	$\dot\vee$	$\bar\wedge$	$\bar\vee$

Sprachlich sind diese z. B. durch folgende Beschreibungen gegeben:

- $\neg A$ ist nur dann wahr, wenn A falsch ist
- $A \wedge B$ ist nur dann wahr, wenn A und B beide wahr sind
- $A \vee B$ ist nur dann falsch, wenn A und B beide falsch sind
- $A \rightarrow B$ ist nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist
- $A \dot\vee B$ ist nur dann wahr, wenn entweder A wahr oder B wahr ist

Der Wahrheitswert einer zusammengesetzten Aussage ist eindeutig durch die Wahrheitswerte der Aussagen bestimmt, aus denen sie zusammengesetzt ist.
Deshalb reicht es aus, die zusammengesetzte Aussage mit Hilfe ihrer **Wahrheitswerttabelle** anzugeben.

Wahrheitswerttabellen der häufig verwendeten Verknüpfungen:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \dot\vee B$	$A \bar\wedge B$	$A \bar\vee B$
1	1	0	1	1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1

23.3 Logische Äquivalenz

Zwei zusammengesetzte Aussagen heißen **logisch äquivalent**, wenn sie die gleiche Wahrheitswerttabelle haben.

Beispiele logisch äquivalenter Aussagen:

- A und $\neg(\neg A)$
- $A \wedge B$ und $\neg(\neg A \vee \neg B)$

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0

- $A \vee B$ und $\neg(\neg A \wedge \neg B)$
- $A \rightarrow B$ und $\neg A \vee B$
- $A \leftrightarrow B$ und $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

Logische Ausdrücke lassen lediglich die zwei Wahrheitswerte 0 und 1 zu. Daher liegt es nahe, logische Verknüpfungen mit Hilfe elektrischer Schaltungen zu realisieren, welche selbst auf dem binären Prinzip (EIN, AUS) oder (hohes Potential, niedriges Potential) basieren.

Dabei kann es sinnvoll sein, so wenig "Grundschaltungen" wie nötig zu verwenden. Es bleibt somit die Frage, wie viele logische Verknüpfungen man benötigt, um alle weiteren durch logische Äquivalenzen zu erzeugen.

Es zeigt sich, dass sehr wenig Verknüpfungen ausreichen – es reicht sogar eine einzige:

Alle logischen Verknüpfungen lassen sich allein mit Hilfe von

- $\neg$, $\wedge$ und $\vee$ darstellen.
- $\neg$ und $\wedge$ darstellen.
- $\neg$ und $\vee$ darstellen.
- $\bar{\vee}$ darstellen.
- $\bar{\wedge}$ darstellen.

Beispiele äquivalenter Verknüpfungen:

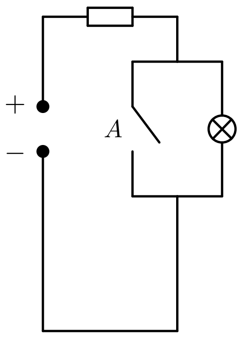
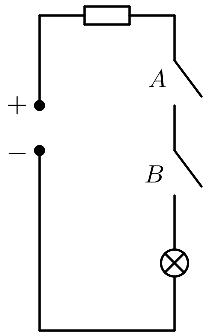
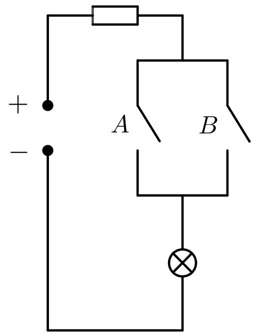
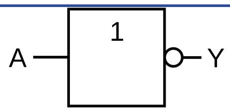
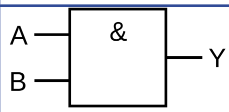
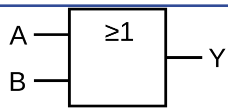
- $\neg A$ und $A \bar{\wedge} A$ und $A \bar{\vee} A$
- $A \wedge B$ und $(A \bar{\wedge} B) \bar{\wedge} (A \bar{\wedge} B)$ und $(A \bar{\vee} A) \bar{\vee} (B \bar{\vee} B)$
- $A \vee B$ und $(A \bar{\wedge} A) \bar{\wedge} (B \bar{\wedge} B)$ und $(A \bar{\vee} B) \bar{\vee} (B \bar{\vee} A)$

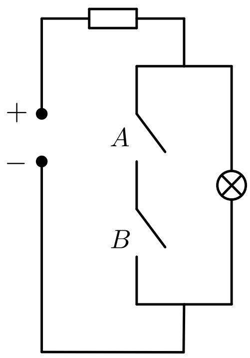
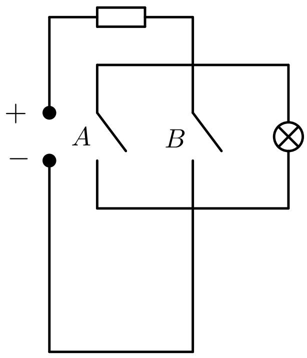
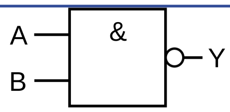
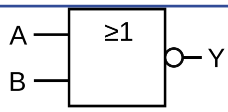
23.4 Anwendung: Realisierung mit Hilfe elektronischer Schaltungen

$$\text{Eingänge } A, B \begin{cases} 1: \text{'Schalter EIN' oder 'Messpunkt auf hohem Potential'} \\ 0: \text{'Schalter AUS' oder 'Messpunkt auf niedrigem Potential'} \end{cases}$$

$$\text{Ausgänge Lampe}, Y \begin{cases} 1: \text{'Lampe EIN' oder 'Messpunkt auf hohem Potential'} \\ 0: \text{'Lampe AUS' oder 'Messpunkt auf niedrigem Potential'} \end{cases}$$

Beispiele:

Verknüpfung	NOT $\neg$	AND $\wedge$	OR $\vee$
Schaltbild (Gatter)			
Schaltsymbol			

Verknüpfung	NAND $\bar{\wedge}$	NOR $\bar{\vee}$
Schaltbild (Gatter)		
Schaltsymbol		

24 Duales und hexadezimales Zahlensystem

24.1 Dezimalzahlen, Dualzahlen und Hexadezimalzahlen

Eine **Zahl** $z \in \mathbb{N}$ stellt man im **Dezimalsystem** mit Hilfe seiner **Ziffern** dar:

$$z = \ldots z_4\, z_3\, z_2\, z_1\, z_0 \qquad \text{wobei} \qquad z_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Kennt man die Ziffern $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots$, dann erhält man die **Dezimalzahl** z, indem man diese ausrechnet:

$$z = z_0 \cdot 10^0 + z_1 \cdot 10^1 + z_2 \cdot 10^2 + z_3 \cdot 10^3 + z_4 \cdot 10^4 + \ldots$$

Beispiel: $z = 3098$ besitzt die Ziffern $z_0 = 8, z_1 = 9, z_2 = 0$ und $z_3 = 3$
Die Darstellung einer Zahl mit Hilfe von Ziffern nennt man **Stellenwertsystem** (hier: bezüglich der Basis 10).
Statt der Basis 10, kann man jede andere **Basis** verwenden, um eine Zahl darzustellen. Folgende Stellenwertsysteme sind insbesondere in der Informatik sehr wichtig:

Dualsystem (Basis 2)	**Hexadezimalsystem** (Basis 16)
$z = d_0 \cdot 2^0 + d_1 \cdot 2^1 + d_2 \cdot 2^2 + d_3 \cdot 2^3 + d_4 \cdot 2^4 + \ldots$	$z = h_0 \cdot 16^0 + h_1 \cdot 16^1 + h_2 \cdot 16^2 + h_3 \cdot 16^3 + h_4 \cdot 16^4 + \ldots$
$d_i \in \{0, 1\}$	$h_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Hier stehen die **Dualziffern** 0, 1 für die Zahlen 0, 1 im Dezimalsystem und die **Hexadezimalziffern** $0, \ldots, 9, A, \ldots, F$ für die Zahlen $0, \ldots, 9, 10, \ldots, 15$ im Dezimalsystem.
Beispiele:

- Im Dualsystem hat die Zahl $z = 3098$ die Darstellung 110000011010, also die Ziffern $d_0 = 0, d_1 = 1, d_2 = 0, d_3 = 1, d_4 = 1, d_5 = d_6 = d_7 = d_8 = d_9 = 0, d_{10} = 1$ und $d_{11} = 1$, weil

$$3098 = 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^{11}$$

- Im Hexadezimalsystem hat die Zahl $z = 3098$ die Darstellung $C1A$, also die Ziffern $h_0 = A, h_1 = 1$ und $h_2 = C$, weil

$$3098 = 10 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^1 + 12 \cdot 16^2$$

- $z = 0$ hat in allen drei Stellenwertsystemen die gleiche Darstellung 0.

24.2 Umrechnung dezimal ↔ dual ↔ hexadezimal

24.2.1 Umrechnung dual/hexadezimal → dezimal

Liegt eine Zahl im Dualsystem $\ldots d_3 d_2 d_1 d_0$ oder im Hexadezimalsystem $\ldots h_3 h_2 h_1 h_0$ vor, erhält man die Zahl im Dezimalsystem, indem man sie berechnet:

$$z = d_0 \cdot 2^0 + d_1 \cdot 2^1 + d_2 \cdot 2^2 + d_3 \cdot 2^3 + \ldots$$
$$z = h_0 \cdot 16^0 + h_1 \cdot 16^1 + h_2 \cdot 16^2 + h_3 \cdot 10^3 + \ldots$$

(siehe Beispiele aus Abschnitt 24.1).

24.2.2 Umrechnung dezimal → dual

Die Umrechnung einer Dezimalzahl in eine Dualzahl geschieht mit einem Algorithmus, der lediglich die Halbierung von Zahlen benötigt:
Algorithmus: (für Zahlen größer als 0)

Beginn: $a_0 = z$

Schritt: $\begin{cases} \text{Falls } a_i \text{ gerade, setzt man } a_{i+1} = a_i/2 \text{ und } d_i = 0 \\ \text{Falls } a_i \text{ ungerade, setzt man } a_{i+1} = (a_i - 1)/2 \text{ und } d_i = 1 \end{cases}$

Ende $\quad a_i = 1$

Beispiel: $z = 3098$ ist dual 110000011010

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a_i	3098	1549	774	387	193	96	48	24	12	6	3	1
d_i	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1

24.2.3 Umrechnung hexadezimal → dual

Weil $16 = 2^4$ ist, wird jede Hexadezimalziffer h_i zu einem Block von vier Dualziffern $d_{4i}, d_{4i+1}, d_{4i+2}, d_{4i+3}$.
Die Dualziffern des entsprechenden Blocks bestimmt man z. B. mit dem

Algorithmus aus Abschnitt 24.2.2, und erhält:

0	0000	4	0100	8	1000	C	1100
1	0001	5	0101	9	1001	D	1101
2	0010	6	0110	A	1010	E	1110
3	0011	7	0111	B	1011	F	1111

Beispiel: $C1A$ wird zu 1100.0001.1010 (Punkte nur zur Hervorhebung der Viererblöcke)

24.2.4 Umrechnung dual → hexadezimal

Man teilt zunächst die Dualzahl von hinten beginnend in Viererblöcke auf (dazu füllt man den vorderen Block ggf. vorne durch Nullen auf).

Dann berechnet man die Dezimalzahl, die zu dem entsprechenden Block gehört (Abschnitt 24.2.1). Diese liegt zwischen 0 und 15. Das liefert die entsprechende Ziffer in der Hexadezimaldarstellung.

Alternativ verwendet man die Tabelle aus Abschnitt 24.2.3.

Beispiel: 110000011010 besitzt (von hinten) die Blöcke 1010, 0001 und 1100 die den Zahlen 10, 1 und 12 entsprechen, siehe Abschnitt 24.2.1. Das sind die Ziffern A, 1 und C im Hexadezimalsystem. Die gesuchte Zahl ist damit $C1A$.

24.2.5 Umrechnung dezimal → hexadezimal

Für eine rechnerisch effektive Umrechnung stellt man die Dezimalzahl zunächst dual dar (Abschnitt 24.2.2). Anschließend wandelt man die erhaltene Dualzahl ins Hexadezimalsystem um (Abschnitt 24.2.4).

24.3 Anwendung: Rechnen mit Dualzahlen, Halb- und Volladdierer

Man kann zwei Dualzahlen **addieren**, indem man, wie bei Dezimalzahlen, das Stellenwertsystem nutzt.

Man benötigt dazu die folgenden elementaren Summen:

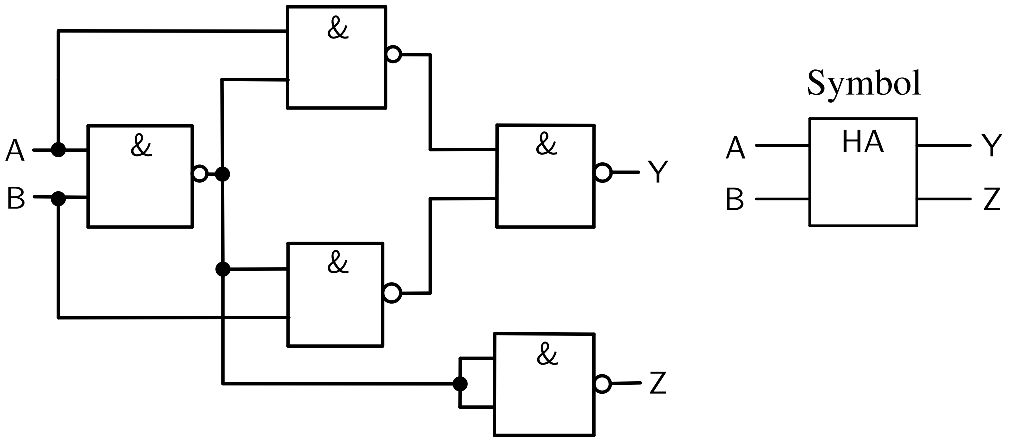
$$0+0=1\,,\;\; 1+0=1\,,\;\; 0+1=1\,,\;\; 1+1=10\,,\;\; 1+1+1=10+1=11\,.$$

Man beginnt bei der Addition zweier Zahlen mit den Ziffern der letzten Stellen. Ist das Ergebnis 0 oder 1, dann notiert man dies als letzte Ziffer der Summe.

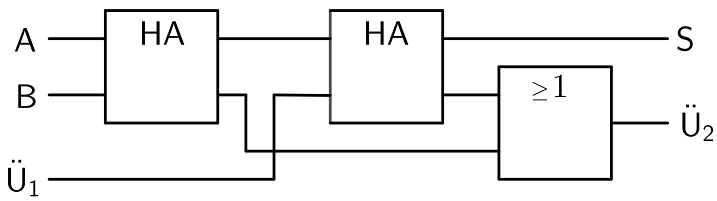
Ist das Ergebnis 10, dann notiert man die 0 als letzte Ziffer und die 1 liefert den Übertrag zur nächsten Stelle.
Beispiele:

1. Summand	0 1 0 1 1	0 1 1 1 1
2. Summand	0 1 0 1 0	0 1 0 0 1
Übertrag	1 1	1 1 1 1
Summe	1 0 1 0 1	1 1 0 0 0

Realisierung mit Hilfe logischer Schaltungen:
Halbaddierer zur Addition zweier einstelliger Dualzahlen mit Hilfe von NAND-Gattern:



(die Summanden A und B geben das Ergebnis ZY)
Volladdierer zur Addition dreier einstelliger Dualzahlen mit Hilfe zweier Halbaddierer und einem OR-Gatter:



(die Summanden A, B und $Ü_1$ geben die Summe $Ü_2$S)

24.4 Anwendung: 4-Bit-Operationen

Eine Hexadezimalziffer entspricht einer vierstellige Dualzahl (einen **Nibble**). Damit lassen sich Daten, die vier-Bit-codiert sind, als Hexadezimalziffer darstellen.
Auf Hexadezimalziffern lassen sich logische Operationen anwenden, indem man diese komponentenweise auf die 4-Bit-Darstellung anwendet.

Dies ist komponentenweise auf k-stellige Hexadezimalzahlen und damit auf $4k$-Bit-Werte erweiterbar.
NOT lässt sich ohne 4-Bit-Darstellung darstellen: $\boxed{\neg x = F - x}$.
$F - x$ kann man berechnen, indem man zunächst F und x als Dezimalzahlen darstellt und die Differenz $15 - x$ anschließend wieder als Hexadezimalzahl.
Beispiele:

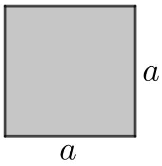
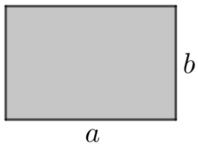
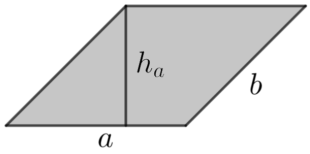
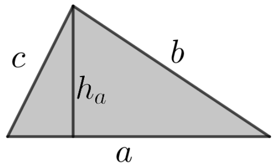
- $\neg 3 = \neg(0|0|1|1) = (\neg 0|\neg 0|\neg 1|\neg 1) = (1|1|0|0) = C$ oder $\neg 3 = F - 3 = C$
- $A \wedge 7 = (1|0|1|0) \wedge (0|1|1|1) = (1 \wedge 0|0 \wedge 1|1 \wedge 1|0 \wedge 1) = (0|0|1|0) = 2$
- $B \bar{\vee} 5 = (1|0|1|1) \bar{\vee} (0|1|0|1) = (1 \bar{\vee} 0|0 \bar{\vee} 1|1 \bar{\vee} 0|1 \bar{\vee} 1) = (0|0|0|0) = 0$
- Die vollständige Tafel für NAND:

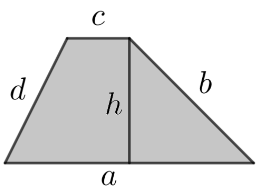
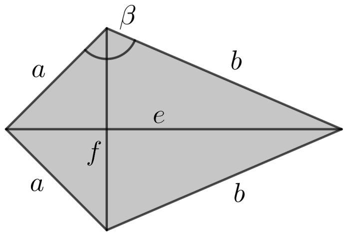
$\bar{\wedge}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F
0	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F	F
1	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E	F	E
2	F	F	D	D	F	F	D	D	F	F	D	D	F	F	D	D
3	F	E	D	C	F	E	D	C	F	E	D	C	F	E	D	C
4	F	F	F	F	B	B	B	B	F	F	F	F	B	B	B	B
5	F	E	F	E	B	A	B	A	F	E	F	E	B	A	B	A
6	F	F	D	D	B	B	9	9	F	F	D	D	B	B	9	9
7	F	E	D	C	B	A	9	8	F	E	D	C	B	A	9	8
8	F	F	F	F	F	F	F	F	7	7	7	7	7	7	7	7
9	F	E	F	E	F	E	F	E	7	6	7	6	7	6	7	6
A	F	F	D	D	F	F	D	D	7	7	5	5	7	7	5	5
B	F	E	D	C	F	E	D	C	7	6	5	4	7	6	5	4
C	F	F	F	F	B	B	B	B	7	7	7	7	3	3	3	3
D	F	E	F	E	B	A	B	A	7	6	7	6	3	2	3	2
E	F	F	D	D	B	B	9	9	7	7	5	5	3	3	1	1
F	F	E	D	C	B	A	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

25 Flächeninhalt und Umfang von Flächen

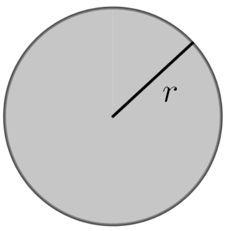
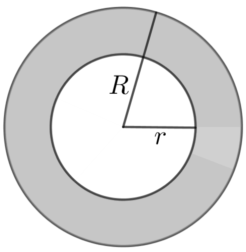
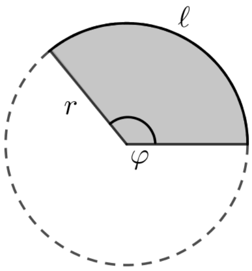
A : **Flächeninhalt**, U : **Umfang**,

25.1 Quadrat, Rechteck, Parallelogramm, Trapez, Raute, Dreieck

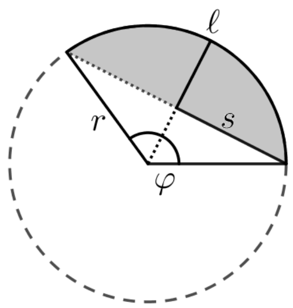
Quadrat	**Rechteck**	**Parallelogramm**	**Dreieck**
			
$A = a^2$ $U = 4a$	$A = ab$ $U = 2(a + b)$	$A = ah_a$ $U = 2(a + b)$	$A = \frac{1}{2}ah_a$ $U = a + b + c$

Trapez	**Drachenviereck**
	
$A = \frac{1}{2}(a + c)h$ $U = a + c + b + d$	$A = \frac{1}{2}ef$ $U = 2(a + b)$ $e = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\beta)}$ $f = \dfrac{2ab\sin(\beta)}{e}$

25.2 Kreis, Kreisring, Kreisausschnitt, Kreisabschnitt

Kreis	**Kreisring**	**Kreisausschnitt**
		
$A = \pi r^2$ $U = 2\pi r$	$A = \pi(R^2 - r^2)$ $U = 2\pi(R - r)$	$A = \pi r^2 \frac{\varphi}{360°}$ $U = 2r + \ell$ $\ell = 2\pi r \frac{\varphi}{360°}$

Kreisabschnitt

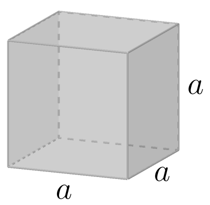
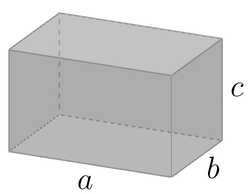
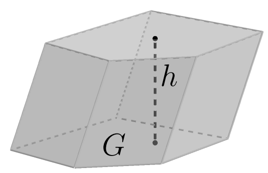


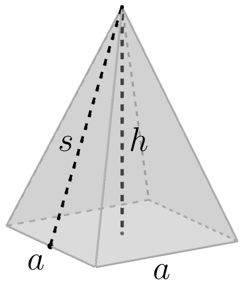
$$A = \pi r^2 \frac{\varphi}{360°} - \frac{1}{2} r^2 \sin(\varphi)$$
$$U = 2s + \ell$$
$$\ell = 2\pi r \frac{\varphi}{360°}$$
$$s = r \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

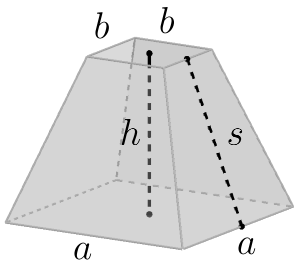
26 Volumen und Oberflächen von Körpern

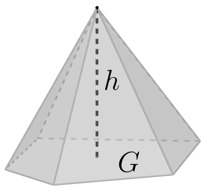
V : **Volumen**, M : **Mantelfläche**, O : **Oberfläche**.

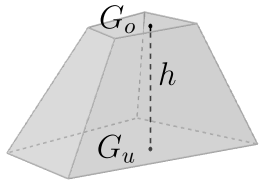
26.1 Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, Pyramidenstumpf

Würfel	Quader	allgemeines Prisma
 $V = a^3$ $O = 6a^2$	 $V = a\,b\,c$ $O = 2(ab + ac + bc)$	 $V = G h$

<table>
<tr>
<td>quadratische Pyramide


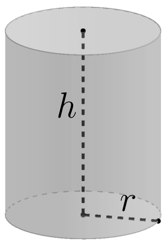
$V = \frac{1}{3}a^2h$
$M = a\sqrt{4h^2 + a^2}$
$O = a^2 + M$
$s = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}a^2}$</td>
<td>quadratischer Pyramidenstumpf


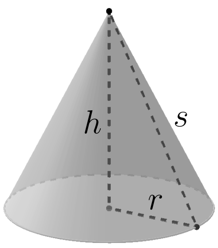
$V = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h$
$M = (a + b)\sqrt{4h^2 + (a - b)^2}$
$O = a^2 + b^2 + M$
$s = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}(a - b)^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td>allgemeine Pyramide


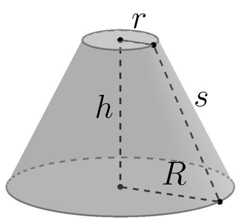
$V = \frac{1}{3}Gh$</td>
<td>allgemeiner Pyramidenstumpf


$V = \frac{1}{3}(G_u + \sqrt{G_u G_o} + G_o)h$</td>
</tr>
</table>

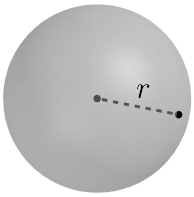
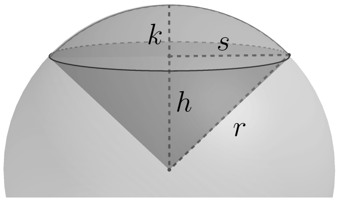
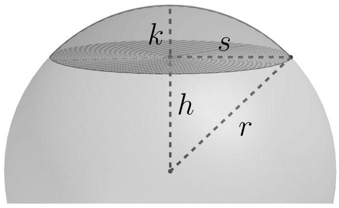
26.2 Zylinder, Kegel, Kegelstumpf, Kugel, Kugelteile

<table>
<tr>
<td>Zylinder


$V = \pi r^2 h$
$M = 2\pi r h$
$O = 2\pi r^2 + M$</td>
<td>Kegel


$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
$M = \pi r s$
$O = \pi r^2 + M$
$s = \sqrt{r^2 + h^2}$</td>
<td>Kegelstumpf


$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + R \cdot r + r^2)h$
$M = \pi(R + r)s$
$O = \pi R^2 + \pi r^2 + M$
$s = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$</td>
</tr>
</table>

Kugel	Kugelausschnitt	Kugelabschnitt
		
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $O = 4\pi r^2$	$V = \frac{2}{3}\pi r^2 k$ $O = \pi s r + 2\pi r k$ $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ $k = r - h$	$V = \frac{1}{3}\pi k^2(3r - k)$ $O = \pi s^2 + 2\pi r k$ $s = \sqrt{r^2 + h^2}$ $k = r - h$