Differentialgeometrie I
– Kurven und Flächen –

Frank Klinker

Inhaltsverzeichnis

1 Lokale Kurventheorie 3
1.1 Parametrisierte Kurven 3
1.2 Frenetkurven 8

2 Ausgewählte globale Eigenschaften ebener Kurven 22
2.1 Geschlossene ebene Kurven 22
2.2 Die Winkelfunktion einer ebenen Kurven 25
2.3 Windungszahl, Index und der Hopfsche Umlaufsatz 26

3 Grundzüge der Flächentheorie 30
3.1 Grundbegriffe 30
3.2 Differenzierbarkeit 34
3.3 Der Tangentialraum und das Differential 37

4 Geometrie auf Flächen 44
4.1 Die erste Fundamentalform 44
4.2 Das Normalenfeld und Orientierbarkeit 48
4.3 Die Weingartenabbildung und die zweite Fundamentalform . 50
4.4 Krümmung 53
4.5 Beispiel: Regelflächen 61

5 Innere Geometrie von Flächen 67
5.1 Eigenschaften der Richtungsableitung von Vektorfeldern . . . 67

Ausarbeitung einer einsemestrigen Vorlesung
Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik
Email: mail@frank-klinker.de
Dieses Werk ist lizenziert unter der Creative Commons Lizenz CC BY-SA 4.0

5.2 Tensorialität, Metrik und 1-Formen 69
5.3 Die kovariante Ableitung, Zusammenhang und Krümmung . . 72
5.4 Das Theorema Egregium und der Satz von Bonnet 80

6 Paralleltransport und Geodäten 84
6.1 Vektorfelder längs Kurven und Paralleltransport 84
6.2 Geodäten und der Satz von Clairaut 90
6.3 Geodätische Polarkoordinaten 93

7 Abstrakte Flächen. 98
7.1 Abstrakte Flächen und Beispiele 98
7.2 Tangentialraum und Metrik 107

A Grundlagen Lineare Algebra & Analysis 114
A.1 Lineare Algebra 114
A.2 Analysis 123

Literatur 131

1 Lokale Kurventheorie

1.1 Parametrisierte Kurven

Definition 1.1. Eine *parametrisierte Kurve* ist eine Abbildung $c : I \to \mathbb{R}^n$ die auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist.

Bezeichnung 1.2.
- Ist $n = 2$, dann nennen wir c auch eine *ebene Kurve*, und ist $n = 3$, dann *Raumkurve*.
- Wenn wir von Differenzierbarkeit der Kurve c sprechen, dann bezieht sich das, falls das Intervall nicht offen ist, auf innere Punkte.
- Wenn wir nichts anderes sagen, dann sind unsere Kurven im Folgenden glatt.

Definition/Bemerkung 1.3.
1. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Für $t_0 \in I$ heißt $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ der *Geschwindigkeitsvektor* oder der *Tangentialvektor an c in t_0*.
2. Die Abbildung $c' : I \to \mathbb{R}^n$ nennen wir *Geschwindigkeitsfeld* oder kürzer *Geschwindigkeit* der Kurve.
3. Wenn wir explizit das Bild der parametrisierten Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$, also $Sp(c) := c(I) \subset \mathbb{R}^n$ betrachten, so sprechen wir von der *Spur der Kurve* oder dem *Bild der Kurve c*. Insbesondere können verschiedene parametrisierte Kurven das gleiche Bild haben.
4. Betrachten wir nur das Bild einer parametrisierten Kurve als Objekt, so sprechen wir auch von einer *unparametrisierten Kurve*. Wenn allerdings keine Verwechslung zu befürchten ist, so sprechen wir sowohl bei einer parametrisierten als auch bei einer unparametrisierten Kurve kurz von einer *Kurve*.

Beispiel 1.4. Der punktierte Einheitskreis $S^1 \setminus \{(1,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ ist eine unparametrisierte Kurve. Er ist das Bild der folgenden parametrisierten Kurven:

$$c :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad c(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} \frac{t^2-1}{t^2+1} \\ \frac{-2t}{t^2+1} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{c}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{\tilde{c}}(t) = -\begin{pmatrix} \cos(\pi \tanh(t)) \\ \sin(\pi \tanh(t)) \end{pmatrix}.$$

Definition 1.5. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und $t_0 \in I$.

- c heißt *regulär in* t_0, wenn $c'(t_0) \neq 0$; c heißt *regulär*, wenn $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$.
- Ist $c'(t_0) = 0$, so heißt c *singulär in* t_0, und der Parameterwert t_0 heißt *singulärer Wert*.

Definition/Bemerkung 1.6.

1. Es seien $c : I \to \mathbb{R}^n$ und $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}^n$ zwei parametrisierte Kurven, die durch eine glatte Abbildung $\phi : J \to I$ gemäß
$$\tilde{c} = c \circ \phi$$
verbunden sind. Dann heißt $\tilde{c}$ eine *Umparametrisierung* von c und ϕ der *Parameterwechsel*.
2. Ist ϕ surjektiv, dann stimmen c und $\tilde{c}$ als unparametrisierte Kurven überein, d. h. es gilt $Sp(c) = Sp(\tilde{c})$. Im Allgemeinen gilt lediglich $Sp(\tilde{c}) \subset Sp(c)$.
3. Ist ϕ bijektiv, dann ist ϕ insbesondere injektiv und es gilt $\phi' \geq 0$ oder $\phi' \leq 0$ auf ganz J.
4. Ist c regulär, dann ist $\tilde{c}$ genau dann ebenfalls regulär, wenn $\phi' \neq 0$, also $\phi' > 0$ oder $\phi' < 0$ auf ganz J. Bijektive Parameterwechsel mit $\phi' \neq 0$ heißen auch *reguläre Parameterwechsel*.
5. Ist $\phi' > 0$, so heißt der Parameterwechsel *positiv* oder *orientierungserhaltend*. Ist $\phi' < 0$, so heißt er *negativ* oder *orientierungsumkehrend*. Z. B. ändert für $I = [a, b]$ der Parameterwechsel $\phi : I \to I$ mit $\phi(t) = a - (t - b)$ den Durchlaufsinn der Kurve.

Beispiel 1.7. Es sei $\phi : \mathbb{R} \to]0, 2\pi[$ mit $\phi(t) = 2\arctan(t) + \pi$. Dann gilt $\tilde{c}(t) = c(\phi(t))$ für die Kurven aus Beispiel 1.4.

Verabredung. Wenn wir ab jetzt von Parameterwechseln sprechen, so sind damit stets reguläre Parameterwechsel gemeint.

Definition 1.8. Sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $t_0 \in I$. Die *Bogenlänge von* c ist definiert durch die Funktion $s : I \to \mathbb{R}$ mit
$$s_{t_0}(t) := \int_{t_0}^{t} \|c'(\tau)\| d\tau = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(c_1'(\tau))^2 + \cdots + (c_n'(\tau))^2}\, d\tau$$

Bemerkung 1.9.
- Zwei Bogenlängenfunktionen zu verschiedenen Startparametern unterscheiden sich durch eine Konstante. Wenn diese Konstante für eine Aussage unerheblich ist, so schreiben wir auch $s(t)$ statt $s_{t_0}(t)$.
- $s : I \to \mathbb{R}^n$ ist differenzierbar mit $s'(t) = \|c'(t)\| > 0$ und daher ein positiver Parameterwechsel.

Bemerkung 1.10. Es sei $c : I = [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve mit Bogenlängenparameter s_{t_0} für $t_0 \in I$. Aus der Definition folgt unmittelbar, dass $s_{t_0}(t) < 0$ für $t \in [a, t_0[$ und $s_{t_0}(t) > 0$ $t \in]t_0, b]$. Die Begründung des geometrischen Namens für s_{t_0} liefert die folgende Feststellung:

Der Betrag von $s_{t_0}(t)$ entspricht der geometrischen Länge ℓ der Kurve $c|_{[t,t_0]}$ falls $t < t_0$ bzw. $c|_{[t_0,t]}$ falls $t > t_0$. Insbesondere gilt dann

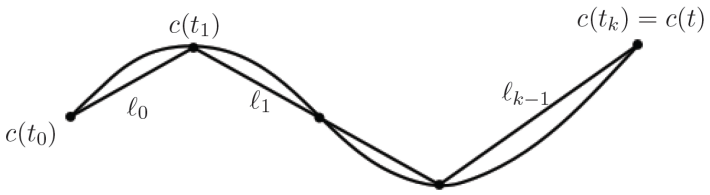
$$\ell(c) = \ell(c|_{[a,t_0}) + \ell(c|_{[t_0,b]}) = s_{t_0}(b) - s_{t_0}(a)\,.$$

Zur Begründung sei $\mathcal{Z} = \{t_0, t_1, \ldots t_k := t\}$ eine Zerlegung von $[t_0, t]$ und es bezeichne $\ell_i(c, Z)$ die Länge der Strecke, die $c(t_i)$ und $c(t_{i+1})$ verbindet, siehe Abbildung 1. Wir berechnen nun die Länge des gesamten so definierten Streckenzugs und definieren

$$\ell(c, \mathcal{Z}) := \sum_{i=0}^{k-1} \ell_i(c, Z)\,.$$

Dann ist $\ell(c.\mathcal{Z}) = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \|c(t_{i+1}) - c(t_i)\| = \sum\limits_{i=0}^{k-1} \|c'(\hat{t}_i)\|(t_{i+1} - t_i)$ für geeignete Zwischenstellen $\hat{t}_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Abbildung 1: Bogenlänge einer Kurve



Für die Länge der Kurve c auf dem Intervall $[t_0, t]$ folgt schließlich

$$\ell(c\big|_{[t_0,t]}) = \sup\{\ell(c, \mathcal{Z}) \mid \mathcal{Z} \text{ ist Zerlegung von } [t_0, t]\} = \int_{t_0}^{t} \|c'(\tau)\| d\tau = s_{t_0}(t).$$

Satz 1.11. *Es sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Dann lässt sich c durch einen positiven Parameterwechsel so umparametrisieren, dass der Geschwindigkeitsvektor in jedem Punkt die Länge 1 hat. Dieser Parameterwechsel ist eindeutig bis auf Translation, d. h. sind ϕ und $\hat{\phi}$ zwei Parameterwechsel mit dieser Eigenschaft, dann gibt es ein $k \in \mathbb{R}$, sodass $\phi(t) = \hat{\phi}(t) + k$ für alle t.*

Definition 1.12. Eine Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ mit $\|c'(t)\| = 1$ für alle $t \in I$ heißt *auf Bogenlänge parametrisiert.*

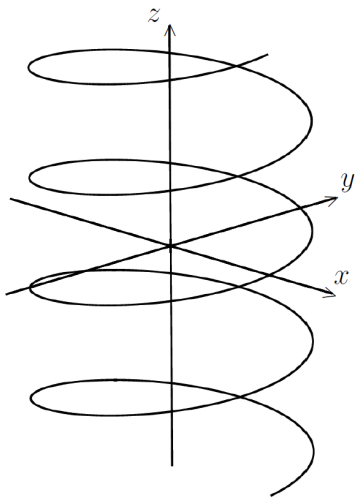
Satz 1.13. *Die Bogenlänge einer Kurve ist invariant unter Bewegungen. D. h. für eine Bewegung $\Phi(x) = Ax + b$ des $\mathbb{R}^n$ ist $s(t) = \tilde{s}(t)$, wenn s die Bogenlänge zu c und $\tilde{s}$ diejenige zu $\tilde{c} := \Phi \circ c$ ist.*

Beispiel 1.14.

1. Es sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}$. Dann ist $s_0(t) = \omega t$, also $\phi := s_0^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(\tau) = \frac{\tau}{\omega}$. Die Bogenlängenparametrisierung von c ist damit $\tilde{c} = c \circ \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit $\tilde{c}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\tau) \\ \sin(\tau) \end{pmatrix}$.

2. Es sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit $c(t) = \begin{pmatrix} R\cos(\omega t) \\ R\sin(\omega t) \\ ht \end{pmatrix}$ eine *Helix* oder *Schraubenlinie*, siehe Abbildung 2.

Abbildung 2: Schraubenlinie / Helix



Dann ist $\|c'(t)\|^2 = R^2\omega^2 + h^2 =: R^2\omega_0^2$, also $s_0(t) = R\omega_0 t$ und $\phi := s_0^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\phi(\tau) = \frac{\tau}{R\omega_0}$. Die Bogenlängenparametrisierung der

Helix ist

$$\tilde{c} = c \circ \phi(\tau) = \begin{pmatrix} R\cos(\frac{\omega}{R\omega_0}\tau) \\ R\sin(\frac{\omega}{R\omega_0}\tau) \\ \frac{h}{R\omega_0}\tau \end{pmatrix} .$$

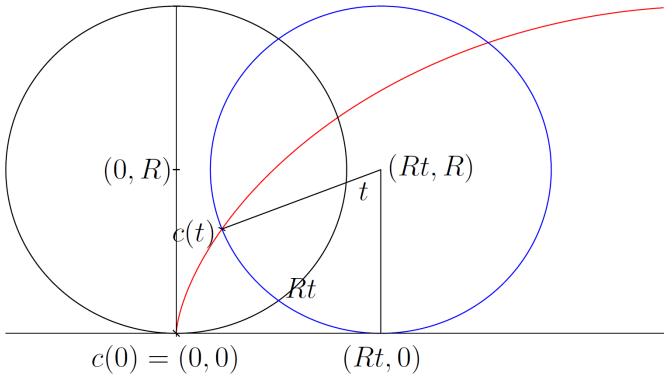
Die Länge einer(!) Schraube ist $s_0(\frac{2\pi}{\omega}) = 2\pi R\frac{\omega_0}{\omega}$. Die Höhe einer(!) Schraube ist $\frac{2\pi h}{\omega}$ und heißt *Ganghöhe* der Helix.

3. Man erhält eine *Zykloide*, wenn man einen Kreis mit Radius R auf einer Geraden abrollt und den Weg eines Punktes verfolgt, der sich am Ende eines fixierten radialen Stahls befindet.

   In Abbildung 3 ist der schwarze Kreis der Ausgangskreis, der in positive x-Richtung abgerollt wird, und der fixierte Punkt ist $(0,0)$. Beim Abrollen bewegt sich dieser auf der roten Kurve. Wählt man als Kurvenparameter t den Abrollwinkel, so erhält man die folgende Parametrisierung:

$$c(t) = R\begin{pmatrix} t - \sin(t) \\ 1 - \cos(t) \end{pmatrix}$$

Abbildung 3: Zykloide



Es ist $\|c'(t)\|^2 = 2R^2(1-\cos(t)) = 4R^2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$, sodass

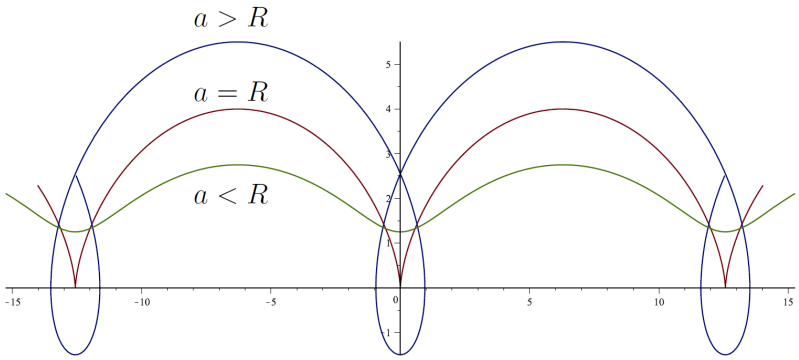
$$s_0(t) = 4R\big(1 - \cos\left(\tfrac{t}{2}\right)\big) .$$

Damit ist die Länge eines Bogens der Zykloide durch $s_0(2\pi) = 8R$ gegeben.

Der verfolgte Punkt muss allerdings nicht auf dem Rand des Ausgangskreises liegen. Es sei a der Abstand des betrachteten Endpunktes des

Strahls von dem Mittelpunkt des Kreises. Abhängig davon ob $a > R$, $a = R$ oder $a < R$ ist, ergibt sich ein unterschiedliches Verhalten der Kurve, siehe Abbildung 4. Die allgemeine Parametrisierung der Zykloide mit $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ R-a \end{pmatrix}$ ist dann $c(t) = \begin{pmatrix} Rt - a\sin(t) \\ R - a\cos(t) \end{pmatrix}$

Abbildung 4: Zykloiden für verschiedene a



1.2 Frenetkurven[(i)]

1.2.1 Berührung von Kurven

Definition 1.15. Es seien $c : I \to \mathbb{R}^n$, $\hat{c} : J \to \mathbb{R}^n$ zwei reguläre Kurven. Weiter sei $p \in Sp(c) \cap Sp(\hat{c})$ ein Schnittpunkt mit $p = c(t_0) = \hat{c}(t_1)$.

1. Die Kurven c und $\hat{c}$ *schneiden sich im Punkt* $p = c(t_0) = \hat{c}(t_1)$ *transversal*, wenn $c'(t_0)$ und $\hat{c}'(t_1)$ linear unabhängig sind.

2. Die Kurven $c, \hat{c}$ *berühren sich in* $p = c(t_0) = \hat{c}(t_1)$ *in erster Ordnung*, wenn $c'(t_0) = \hat{c}'(t_1)$.

3. Zwei unparametrisierte ebene Kurven berühren sich in erster Ordnung, wenn es Parametrisierungen gibt, so dass dies gilt.

Beispiel 1.16. Es sei $c(t)$ eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ und $T_{t_0}(s) := c(t_0) + sc'(t_0)$ eine Beschreibung der Tangente an c in $p = c(t_0)$. Dann berühren sich c und T_{t_0} im Punkt p von der Ordnung 1, denn $c(t_0) = T_{t_0}(0)\,,\ c'(t_0) = T'_{t_0}(0)$.

[(i)] Jean Frédéric Frenet (1816-1900)

Bemerkung 1.17. Nach einer Umparametrisierung hat die Tangente an eine Kurve natürlich weiterhin die "geometrische Eigenschaft", diese von erster Ordnung zu berühren, obwohl die ersten Ableitungen nicht mehr übereinstimmen.
Insofern könnte man meinen, unsere Definition der Berührung erster Ordnung würde von der Parametrisierung der Kurven abhängen.
Das ist jedoch nicht so: die geometrische Berührung erster Ordnung bedeutet, dass die Richtungen der Ableitungen übereinstimmen. Da man beide Kurven auf Bogenlänge parametrisieren kann, ist das dann äquivalent zu unserer analytischen Definition.

Man könnte nun eine analoge Definition für die Berührung höherer Ordnung zweier Kurven vorschlagen: Zwei reguläre Kurven $c, \hat{c}$ berühren sich in $p = c(t_0) = \hat{c}(t_1)$ von der Ordnung $k > 0$, wenn $c'(t_0) = \hat{c}'(t_1)\,,\ \ldots\,,\ c^{(k)}(t_0) = \hat{c}^{(k)}(t_1)$. Das Problem der Parametrisierungsabhängigkeit besteht auch hier und lässt sich aber nicht so einfach lösen.

Die folgende Diskussion zeigt, dass zumindest in Dimension 2 diese Definition sinnvoll sein kann. Dazu sehen wir uns das Beispiel der Tangente nochmal an:

Beispiel 1.18. In Dimension 2 lässt sich eine Tangente auch mit Hilfe ihrer Hesseschen Normalform beschreiben:

$$Sp(T_{t_0}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{\langle x, c'_\perp(t_0)\rangle}{\|c'(t_0)\|} = \delta_0 \right\}$$

wobei

$$\delta_0 = \frac{\langle c(t_0), c'_\perp(t_0)\rangle}{\|c'(t_0)\|} = \frac{\det(c(t_0), c'(t_0))}{\|c'(t_0)\|}\,.$$

Somit ist die Tangente die Nullstellenmenge der Funktion

$$F_{t_0} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \quad F_{t_0}(x) = \frac{\langle x, c'_\perp(t_0)\rangle}{\|c'(t_0)\|} - \delta_0\,,$$

es gilt also $(F_{t_0} \circ T_{t_0})(s) = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Die Berührung der Ordnung 1 von c und T_{t_0} lässt sich dann auch wie folgt ausdrücken

$$(F_{t_0} \circ c)(t_0) = 0\,,\ (F_{t_0} \circ c)'(t_0) = 0$$

aber $(F_{t_0} \circ c)''(t_0) \neq 0$ – zumindest, wenn $c''(t_0) \neq 0$.

Dieses Beispiel lässt sich mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen verallgemeinern:

Satz 1.19. *Es seien $c : I \to \mathbb{R}^2$, $\hat{c} : J \to \mathbb{R}^2$ reguläre Kurven mit $p = c(s_0) = \hat{c}(t_0)$. Weiter sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $DF(p) \neq 0$, die in einer Umgebung U von p die Menge $U \cap Sp(\hat{c})$ als Nullstellenmenge hat, d. h. $F \circ \hat{c} = 0$ auf einem Teilintervall von J um t_0. Dann gilt:*

$$\hat{c}^{(j)}(t_0) = c^{(j)}(s_0) \text{ für } j = 0, \ldots, k \Longleftrightarrow (F \circ c)^{(j)}(s_0) = 0 \text{ für } j = 0, \ldots, k\,.$$

Beweisskizze. ($\Rightarrow$) Da die Funktion $F \circ \hat{c}$ auf dem Intervall um t_0 identisch verschwindet, gilt dies auch für all ihre Ableitungen. Diese verschwinden also insbesondere in t_0. Jetzt hängt der Ausdruck $(F \circ \hat{c})^{(j)}(t_0)$ nur von $\hat{c}(t_0), \hat{c}'(t_0), \ldots, \hat{c}^{(j)}(t_0)$ ab. Ersetze hier nun diese Terme durch die nach Voraussetzung gleichen Größen $c(s_0), c'(s_0), \ldots, c^{(j)}(s_0)$ und rechne zurück. Dann gilt $0 = (F \circ \hat{c})^{(j)}(t_0) = (F \circ c)^{(j)}(s_0)$.

($\Leftarrow$) Umgekehrt hat wegen der Bedingung an D_pF die Nullstellenmenge von F in einer Umgebung von p eine Darstellung als Graph, etwa $\tilde{c}(t) = (t, f(t))$ mit $\tilde{c}(t_0) = p$ und $F \circ \tilde{c}(t) = 0$ für alle t. Wir zeigen nun, dass es eine Umparametrisierung $t = \phi(u)$ von $\tilde{c}$ gibt, sodass nach der Umparametrisierung $\hat{c}^{(j)}(0) = (\tilde{c} \circ \phi)^{(j)}(0) = c^{(j)}(s_0)$ für alle $j = 0, \ldots, k$. Wir setzen

$$\phi(u) = t_0 + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{\alpha_\ell}{\ell!} u^\ell\,.$$

Es gilt nach Voraussetzung $(F \circ c)^{(j)}(s_0) = 0$. Für $j = 1$ ergibt sich $D_pFc'(s_0) = D_pF\hat{c}'(0) = 0$ und damit sind $\hat{c}'(0) = \tilde{c}'(t_0)\phi'(0) = \tilde{c}'(t_0)\alpha_1$ und $c'(s_0)$ parallel. Setzen wir nun $\alpha_1 = \frac{\|c'(s_0)\|}{\|\tilde{c}'(t_0)\|}$, so gilt $\hat{c}'(0) = c'(s_0) =: v$ für $\hat{c} = \tilde{c} \circ \phi$.

Für $j = 2$ erhalten wir $0 = D_pFc''(s_0) + D_p^2F(c'(s_0), c'(s_0)) = D_pF\hat{c}''(0) + D_p^2F(c'(0), c'(0))$. Da die jeweils zweiten Summanden übereinstimmen, ist $D_pF(\hat{c}''(0) - c''(s_0)) = 0$ und somit $\hat{c}''(0) - c''(s_0)$ parallel zu v. Wegen $\hat{c}''(0) = \tilde{c}''(t_0)\alpha_1^2 + \tilde{c}'(t_0)\alpha_2 = \alpha_1^2\tilde{c}''(t_0) + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}v$ ist $\alpha_1^2\tilde{c}''(t_0) - c''(s_0)$ ebenfalls parallel zu v, etwa $\alpha_1^2\tilde{c}''(s_0) = c''(s_0) + \rho_2 v$. Setzen wir nun $\alpha_2 := -\rho_2\alpha_1$, so folgt $\hat{c}''(0) = c''(s_0)$.

Die Behauptung folgt nun induktiv. Es seien die Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}$ konstruiert, sodass $c^{(m)}(s_0) = \hat{c}^{(m)}(0)$ für $m = 0, \ldots, j-1$. Dann folgt aus $0 = (F \circ \hat{c})^{(j)}(0) = (F \circ c)^{(j)}(s_0)$ nun, dass $\hat{c}^{(j)}(0) - c^{(j)}(s_0)$ parallel zu v ist. Es ist weiter $\hat{c}^{(j)}(0) = \sum_{m=2}^{j} \beta_m\tilde{c}^{(m)}(t_0) + \frac{\alpha_j}{\alpha_1}v$, wobei die Koeffizienten β_m nur von $\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}$ abhängen. Insbesondere ist somit $\sum_{m=2}^{j} \beta_m\tilde{c}^{(m)}(t_0) = c^{(j)}(s_0) + \rho_j v$. Für die Wahl $\alpha_j = -\rho_j\alpha_1$ ist dann auch $\hat{c}^{(j)}(0) = c^{(j)}(s_0)$. □

Wir nehmen dies als Motivation zur Definition von Berührungen von Kurven und Nullstellenmengen.

Definition 1.20. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve und $p = c(t_0) \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt auf der Kurve. Weiter sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $F(p) = 0$ und $DF(p) \neq 0$. Dann *berührt die Kurve c die Menge $F^{-1}(0)$ von der Ordnung $k > 0$*, wenn

$$(F \circ c)(t_0) = 0\,,\ (F \circ c)'(t_0) = 0\,,\ \ldots\,,\ (F \circ c)^{(k)}(t_0) = 0\,.$$

1.2.2 Ebene Frenetkurven

Betrachten wir nun Kurven in Dimension 2. Wie wir oben gesehen haben, war die Tangente eine einfache Kurve, die die Brührung in Ordnung 1 realisiert hat. Wir können uns nun fragen, ob es eine möglichst einfache Kurve gibt, die eine vorgegebene Kurve mit der Ordnung 2 berührt.

Satz 1.21 (Krümmungskreis)**.** *Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve und $t_0 \in I$ mit $\{c'(t_0), c''(t_0)\}$ linear unabhängig. Dann gibt es genau einen Kreis, der c im Punkt $c(t_0)$ mit der Ordnung 2 berührt. Der Mittelpunkt $M(t_0)$ und der Radius $r(t_0)$ dieses Kreises sind gegeben durch*

$$r(t_0) = \frac{\|c'(t_0)\|^3}{|\det(c'(t_0), c''(t_0))|}\,, \qquad M(t_0) = c(t_0) \pm \frac{r(t_0)}{\|c'(t_0)\|} c'_\perp(t_0)\,.$$

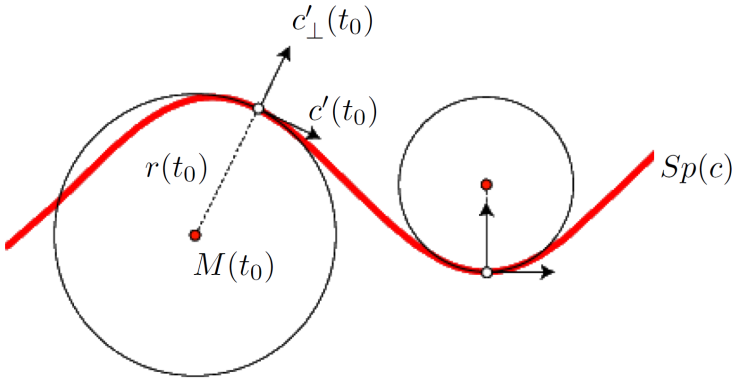
Hierbei ist das Vorzeichen in $M(t_0)$ bestimmt durch das Vorzeichen von $\det(c'(t_0), c''(t_0))$, also dadurch, ob $\{c'(t_0), c''(t_0)\}$ eine positive oder eine negative Basis des $\mathbb{R}^2$ liefert.

Bemerkung 1.22.

1. Ist c auf Bogenlänge parametrisiert, also $\|c'\| = 1$, so ist immer $c''(t) \perp c'(t)$, denn
$$\|c'(t)\|^2 = \langle c'(t), c'(t)\rangle = 1 \Rightarrow (\|c'(t)\|^2)' = 0 \Leftrightarrow \langle c'(t), c''(t)\rangle = 0\,.$$
2. Ist c auf Bogenlänge parametrisiert so ist die lineare Unabhängigkeit von $\{c'(t), c''(t)\}$ äquivalent zu $c''(t) \neq 0$. Letzteres ist dann also die Bedingung für die eindeutige Existenz des Krümmungskreises aus Satz 1.21.

Diese für den Mittelpunkt des Krümmungskreises zu bestimmende Vorzeichen werden wir nun mittels einer geometrischen Größe beschreiben. Zunächst geben wir den bei der obigen Beschreibung wichtigen Vektoren c' und $c'_\perp$ neue Namen.

Abbildung 5: Der Krümmungskreis



Definition 1.23. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve. Zur Kurve c seien die Abbildungen $\mathbf{t}, \mathbf{n} : I \to \mathbb{R}^2$ wie folgt definiert:

$$\mathbf{t}(t) := \frac{1}{\|c'(t)\|} c'(t)\,,$$
$$\mathbf{n}(t) := \frac{1}{\|c'(t)\|} c'_\perp(t) = \mathbf{t}_\perp(t)\,.$$

Diese bilden in jedem Punkt eine positive ONB des $\mathbb{R}^2$. $\mathbf{t}$ heißt das *Tangentialvektorfeld* oder kurz der *Tangentialvektor* und $\mathbf{n}$ das *Normalenvektorfeld* oder kurz der *Normalenvektor*. $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ nennt man *das begleitende 2-Bein* der Kurve c.

Bemerkung 1.24. Es sei $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$ das begleitende 2-Bein der regulären Kurve c. Weiter sei ϕ ein Parameterwechsel und $\Psi(x) = Ax + b$ eine Bewegung der Ebene. Dann gilt

1. $\{\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{n}}\}$ mit $\tilde{\mathbf{t}} = \pm\mathbf{t} \circ \phi$ und $\tilde{\mathbf{n}} = \pm\mathbf{n} \circ \phi$ ist das begleitende 2-Bein zu $\tilde{c} = c \circ \phi$. Hierbei gilt das untere/obere Vorzeichen, wenn ϕ positiv/negativ ist.

2. $\{\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}\}$ mit $\hat{\mathbf{t}} = A\mathbf{t}$ und $\hat{\mathbf{n}} = \pm A\mathbf{n}$ ist das begleitende 2-Bein zu $\hat{c} = \Psi \circ c$. Hierbei gilt das obere/untere Vorzeichen, wenn Ψ positiv/negativ ist.

Satz 1.25 (Frenetgleichungen, $n = 2$)**.** *Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit begleitendem 2-Bein $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}\}$. Dann gibt es eine Funktion $\kappa : I \to \mathbb{R}$, sodass*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa\|c'\|\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\|c'\|\mathbf{t} \end{aligned} \qquad \textit{oder} \qquad \begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \end{pmatrix} = \|c'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

Definition 1.26. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve. Dann heißt die Funktion κ gemäß Satz 1.25 die *Krümmung* der Kurve c.

Bemerkung 1.27. Es sei κ die Krümmung der regulären ebenen Kurve c.

1. Die Krümmung von c berechnet sich zu $\kappa = \dfrac{\det(c', c'')}{\|c'\|^3}$. Der Radius und der Mittelpunkt des Krümmungskreises im Punkt $c(t)$ sind damit durch
$$r(t) = \left|\frac{1}{\kappa(t)}\right|, \qquad M(t) = c(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\mathbf{n}(t)$$
gegeben.

2. Ist c auf Bogenlänge parametrisiert, so ist $c'' \perp c'$ und es gilt
$$\kappa(t) = \langle c''(t), \mathbf{n}(t)\rangle = \begin{cases} \|c''(t)\| & \text{falls } \det(c'(t), c''(t)) \geq 0 \\ -\|c''(t)\| & \text{falls } \det(c'(t), c''(t)) < 0 \end{cases}$$

3. Ist ϕ ein Parameterwechsel und $\tilde{\kappa}$ die Krümmung der Umparametrisierung $\tilde{c} = c \circ \phi$, dann gilt $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi \\ \tilde{\kappa} = -\kappa \circ \phi \end{array} \right\}$ falls $\left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ positiv} \\ \phi \text{ negativ} \end{array} \right\}$.

4. Ist Ψ eine Bewegung des $\mathbb{R}^2$ und ist $\hat{\kappa}$ die Krümmung der Kurve $\hat{c} = \Psi \circ c$, dann gilt $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\kappa} = \kappa \\ \tilde{\kappa} = -\kappa \end{array} \right\}$ falls $\left\{ \begin{array}{l} \Psi \text{ positiv} \\ \Psi \text{ negativ} \end{array} \right\}$.

Eine reguläre ebene Kurve ist durch die Angabe der Krümmung im Wesentlichen bestimmt, denn es gilt der folgende Satz 1.28.

Satz 1.28 (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie, $n = 2$)**.** *Gegeben sei eine Funktion $\kappa : I \to \mathbb{R}$. Dann gibt es eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mit Krümmung κ. Diese Kurve ist eindeutig bis auf positive Bewegungen des $\mathbb{R}^2$.*

1.2.3 Frenetkurven im Raum

Bei einer ebenen Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ mussten wir zur Bestimmung des eindeutigen Krümmungskreises im Punkt $c(t)$ vorausgesetzen, dass $c'(t)$ und $c''(t)$ linear unabhängig sind. Zur Formulierung des Struktursatzes 1.25 konnten wir diese Bedingung jedoch wieder fallen lassen.

Im Fall einer Raumkurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ werden wir ebenso zunächst von dieser Situation ausgehen. Wir werden dann aber sehen, dass wir die Bedingung der linearen Unabhängigkeit zur Formulierung eines ähnlichen Satzes jedoch beibehalten müssen. Deshalb nehmen wir das als Voraussetzung der folgenden Definition.

Definition 1.29. Eine Raumkurve $c : I \to \mathbb{R}^3$ heißt *wendepunktfrei*, wenn sie regulär und $\{c'(t), c''(t)\}$ in jedem Punkt linear unabhängig ist.

Bemerkung 1.30. Ist $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve und $\tilde{c} : J \to \mathbb{R}^3$ ihre Parametrisierung auf Bogenlänge, so gilt:

$$\begin{array}{ccc} c \text{ wendepunktfrei} & \Leftrightarrow & \tilde{c} \text{ wendepunktfrei} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ c' \times c'' \neq 0 & & \tilde{c}'' \neq 0 \end{array}$$

Definition 1.31. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine wendepunktfreie Raumkurve. Zu c definieren wir Abbildungen $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b} : I \to \mathbb{R}^3$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(t) &:= \frac{1}{\|c'(t)\|} c'(t)\,, \\ \mathbf{b}(t) &:= \frac{1}{\|c'(t) \times c''(t)\|} c'(t) \times c''(t)\,, \\ \mathbf{n}(t) &:= \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t)\,. \end{aligned}$$

Diese bilden in jedem Punkt eine positive ONB des $\mathbb{R}^3$. $\mathbf{t}$ heißt das *Tangentialvektorfeld*, $\mathbf{n}$ das *Normalenvektorfeld* und $\mathbf{b}$ das *Binormalenvektorfeld*. Auch hier spricht man auch kurz von *Tangential-*, *Normalen-* oder *Binormalenvektor*. $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ nennt man das *begleitende 3-Bein* der Kurve c.

Bemerkung 1.32.

1. Der Normalenvektor und Binormalenvektor lassen sich wie folgt mit Hilfe des Tangentenvektors ausdrücken:

$$\mathbf{n}(t) = \frac{1}{\|\mathbf{t}'(t)\|} \mathbf{t}'(t), \quad \mathbf{b}(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|\|\mathbf{t}'(t)\|} c'(t) \times \mathbf{t}'(t)\,.$$

2. Das begleitende 3-Bein der Raumkurve c ist durch die folgenden Bedingungen eindeutig festgelegt:

   - $\mathbf{t}(t) = \frac{1}{\|c'(t)\|} c'(t)$,
   - $\mathbf{n}(t) \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{c'(t), c''(t)\}$ mit $\langle \mathbf{n}(t), c''(t) \rangle > 0$,
   - $\mathbf{b}(t) \perp \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{c'(t), c''(t)\}$,

- $\{\mathbf{t}(t), \mathbf{n}(t), \mathbf{b}(t)\}$ ist eine positive ONB des $\mathbb{R}^3$.

Bemerkung 1.33. Es sei $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ das begleitende 3-Bein der wendepunktfreien Kurve c. Weiter sei ϕ ein Parameterwechsel und $\Psi(x) = Ax + b$ eine Bewegung des Raums. Dann gilt

1. $\{\tilde{\mathbf{t}}, \tilde{\mathbf{n}}, \tilde{\mathbf{b}}\}$ mit $\tilde{\mathbf{t}} = \pm\mathbf{t} \circ \phi$, $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} \circ \phi$ und $\tilde{\mathbf{b}} = \pm\mathbf{b} \circ \phi$ ist das begleitende 3-Bein zu $\tilde{c} = c \circ \phi$, wobei das obere/untere Vorzeichen gilt, falls ϕ positiv/negativ.
2. $\{\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}}\}$ mit $\hat{\mathbf{t}} = A\mathbf{t}$, $\hat{\mathbf{n}} = A\mathbf{n}$ und $\hat{\mathbf{b}} = \pm A\mathbf{b}$ ist das begleitende 3-Bein zu $\hat{c} = \Psi \circ c$, wobei das obere/untere Vorzeichen gilt, falls Ψ positiv/negativ ist.

Satz 1.34 (Frenetgleichungen, $n = 3$)**.** *Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine wendepunktfreie Kurve mit begleitendem 3-Bein $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Dann gibt es Funktionen $\kappa : I \to \mathbb{R}^+$ und $\tau : I \to \mathbb{R}$, sodass*

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa\|c'\|\mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa\|c'\|\mathbf{t} + \tau\|c'\|\mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau\|c'\|\mathbf{n} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}' \\ \mathbf{n}' \\ \mathbf{b}' \end{pmatrix} = \|c'\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

Definition 1.35. Sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine wendepunktfreie Raumkurve. Dann heißen die Funktionen κ bzw. τ gemäß Satz 1.34 die *Krümmung* bzw. die *Torsion* der Kurve c.

Bemerkung 1.36. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine wendepunktfreie Kurve.

1. Krümmung und Torsion von c berechnen sich gemäß
$$\kappa = \frac{\|c' \times c''\|}{\|c'\|^3} \quad \text{und} \quad \tau = \frac{\det(c', c'', c''')}{\|c' \times c''\|^2}.$$
2. Ist c auf Bogenlänge parametrisiert, so reduziert sich das zu
$$\kappa = \|c''\| \quad \text{und} \quad \tau = \frac{\langle c''', \mathbf{b}\rangle}{\|c''\|}.$$

3. Ist ϕ ein Parameterwechsel und sind $\tilde{\kappa}$ bzw. $\tilde{\tau}$ die Krümmung bzw. die Torsion der Umparametrisierung $\tilde{c} = c \circ \phi$, dann gilt $\tilde{\kappa} = \kappa \circ \phi$ und $\tilde{\tau} = \tau \circ \phi$. Insbesondere ist das unabhängig davon, ob ϕ positiv oder negativ ist.

4. Ist Ψ eine Bewegung des $\mathbb{R}^3$ und sind $\hat{\kappa}$ bzw. $\hat{\tau}$ die Krümmung bzw. die Torsion der Kurve $\hat{c} = \Psi \circ c$, dann gilt $\hat{\kappa} = \kappa$ und $\hat{\tau} = \pm\tau$, wobei das obere/untere Vorzeichen gilt, falls Ψ positiv/negativ ist.

Ähnlich zur Konstruktion des Krümmungskreises einer ebenen Kurve, kann man sich nun Kugeln anschauen, die eine gegebene Raumkurve in einem Punkt berühren. Betrachtet man Berührungen der Ordnung 2, so ist gibt es eine ganze Schar von Kugeln mit dieser Eigenschaft. Erst die Berührung dritter Ordnung macht die *Schmiegkugel* dann eindeutig. Wir formulieren das in dem Satz 1.37

Satz 1.37 (Schmiegkugel)**.** *Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine wendepunktfreie Raumkurve mit 3-Bein $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$, Krümmung κ und Torsion τ. Des Weiteren sei c auf Bogenlänge parametrisiert.*

1. *Es gibt eine Schar von Kugeln, die c in $c(t_0)$ von der Ordnung 2 berühren. Die Mittelpunkte all dieser Kugeln liegen auf der Geraden*

$$g_{t_0}(s) = c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{n}(t_0) + s\,\mathbf{b}(t_0)\,.$$

   Jede dieser Kugeln hat dann den Mittelpunkt $M_s(t_0)$ und den Radius $r_s(t_0)$ mit

$$M_s(t_0) = g_{t_0}(s) \quad \textit{und} \quad r_s(t_0) = \sqrt{\frac{1}{\kappa^2(t_0)} + s^2}\,.$$

2. *Alle Kugeln der obigen Schar schneiden sich in einem Kreis. Dieser liegt in der Ebene $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{c'(t_0), c''(t_0)\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{t}(t_0), \mathbf{n}(t_0)\}$ und hat den Mittelpunkt $M_0(t_0) = c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{n}(t_0)$ und den Radius $r_0(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)}$.*

3. *Ist zusätzlich noch $\tau(t_0) \neq 0$, so befindet sich unter den Kugeln der obigen Schar genau eine, die c in $c(t_0)$ von der Ordnung 3 berührt. Diese gehört zum Parameter $s = -\frac{\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0)\tau(t_0)}$. Damit sind Mittelpunkt*

$M(t_0)$ und Radius $r(t_0)$ gegeben durch

$$M(t_0) = c(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\mathbf{n}(t_0) - \frac{\kappa'(t_0)}{\kappa^2(t_0)\tau(t_0)}\,\mathbf{b}(t_0)\,,$$
$$r(t_0) = \frac{1}{\kappa(t_0)}\sqrt{1 + \Big(\frac{\kappa'(t_0)}{\kappa(t_0)\tau(t_0)}\Big)^2}\,.$$

Definition/Bemerkung 1.38. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine wendepunktfreie Kurve mit 3-Bein $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$. Dann gibt es für $t_0 \in I$ drei ausgezeichnete Ebenen:[ii]

Schmiegebene:	$E^s_{t_0} = c(t_0) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{t}(t_0), \mathbf{n}(t_0)\} = c(t_0) + \mathbf{b}(t_0)^{\perp}$
Normalebene:	$E^n_{t_0} = c(t_0) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{n}(t_0), \mathbf{b}(t_0)\} = c(t_0) + \mathbf{t}(t_0)^{\perp}$
rektifizierende Ebene:	$E^r_{t_0} = c(t_0) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{t}(t_0), \mathbf{b}(t_0)\} = c(t_0) + \mathbf{n}(t_0)^{\perp}$

In Termen der Kurve c und ihrer Ableitungen lassen sich E^s und E^n wie folgt schreiben:

$$E^s_{t_0} = c(t_0) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{c'(t_0), c''(t_0)\}\,,$$
$$E^r_{t_0} = c(t_0) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{c'(t_0), c'(t_0) \times c''(t_0)\}\,.$$

Ist c zusätzlich auf Bogenlänge parametrisiert, dann gilt für E^n

$$E^n_{t_0} = c(t_0) + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{c''(t_0), c'(t_0) \times c''(t_0)\}\,.$$

Das Verhalten einer wendepunktfreien Kurve in einer Umgebung eines Punktes $p = c(t_0)$ können wir mit Hilfe der Taylorentwicklung[iii] der Kurve bestimmen. Es stellt sich heraus, dass die Projektionen der Kurve in die drei Ebenen aus Definition/Bemerkung 1.38 im Wesentlichen durch eine Normalparabel, durch eine kubische Normalparabel bzw. durch eine Neilsche Parabel[iv] gegeben ist, siehe Abbildung 6. Präzise ausgedrückt wird das in dem folgenden Satz 1.39.

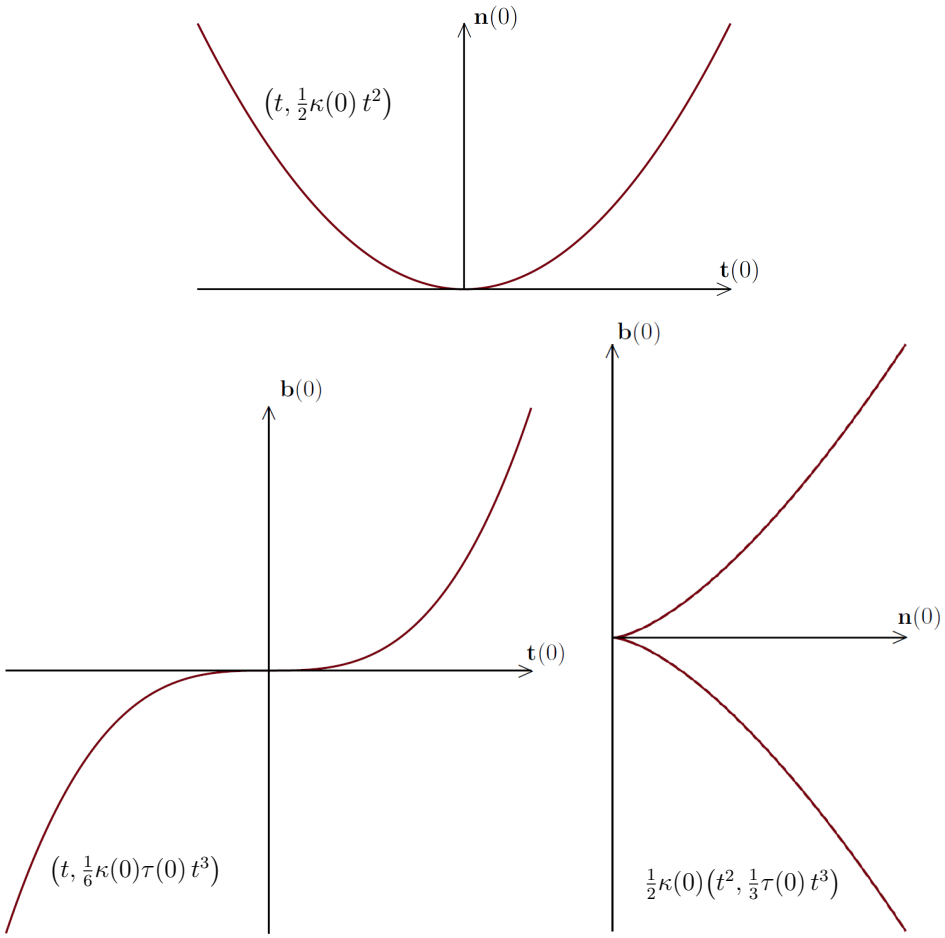
Satz 1.39. *Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine wendepunktfreie Raumkurve mit 3-Bein $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ und es sei $0 \in I$. Weiter sei c nach Bogenlänge parametrisiert, also*

[ii] Für $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet $\vec{v}^{\perp}$ den $(n-1)$-dimensionalen Lotraum von $\vec{v}$ mit $\vec{v}^{\perp} = \{\vec{w} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0\} = \ker(\vec{v}^T)$. Im $\mathbb{R}^3$ entspricht das der Normalenform von Ebenen.
[iii] Brook Taylor (1685-1731)
[iv] William Neile (1637–1670)

$\|c'(t)\| = 1$. *Dann hat* c *um* $c(0)$ *die Taylorentwicklung*

$$\begin{aligned} c(t) = c(0) &+ \big(t + \mathcal{O}(t^2)\big)\,\mathbf{t}(0) \\ &+ \big(\tfrac{1}{2}\kappa(0)t^2 + \mathcal{O}(t^3)\big)\,\mathbf{n}(0) \\ &+ \big(\tfrac{1}{6}\kappa(0)\tau(0)t^3 + \mathcal{O}(t^4)\big)\,\mathbf{b}(0)\,. \end{aligned}$$

Abbildung 6: Die Taylorentwicklung einer Raumkurve



Zum Abschluss der Diskussion der Raumkurven formulieren wir noch das Analoge zu Satz 1.28.

Satz 1.40 (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie, $n = 3$)**.** *Gegeben seien Funktionen* $\kappa : I \to \mathbb{R}^+$ *und* $\tau : I \to \mathbb{R}$. *Dann gibt es eine nach Bogenlänge*

parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ mit Krümmung κ und Torsion τ. Diese Kurve ist eindeutig bis auf positive Bewegungen des $\mathbb{R}^3$.

1.2.4 Allgemeine Frenetkurven

In diesem Abschnitt werden wir die Sätze und Bemerkungen, die wir in den Dimensionen 2 und 3 erhalten haben, auf den Fall von Kurven im $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern.

Definition 1.41. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve. c heißt *Frenetkurve*, wenn $\{c'(t), c''(t), \ldots, c^{(n-1)}(t)\}$ für alle $t \in I$ eine linear unabhängige Menge ist. Insbesondere ist c dann regulär.

Definition/Bemerkung 1.42. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine Frenetkurve. Das *begleitende n-Bein* $\{e_1, \ldots e_n\}$ mit $e_i : I \to \mathbb{R}^n$ ist eindeutig durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert:

1. $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ ist für alle $t \in I$ eine positiv orientierte ONB des $\mathbb{R}^n$.
2. Für alle $1 \leq k \leq n-1$ und für alle $t \in I$ ist
$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{e_1(t), \ldots, e_k(t)\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{c'(t), \ldots, c^{(k)}(t)\}\,.$$
3. Für alle $1 \leq k \leq n-1$ und für alle $t \in I$ ist $\langle e_k(t), c^{(k)}(t)\rangle > 0$.

Beispiel 1.43.
- Im Fall $n = 2$ ist eine parametrisierte Kurve genau dann eine Frenetkurve, wenn sie regulär ist.
- Im Fall $n = 3$ ist eine parametrisierte Kurve genau dann eine Frenetkurve, wenn sie wendepunktfrei ist.

Satz 1.44 (Frenetgleichungen)**.** *Es sei $c : I \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Frenetkurve mit n-Bein $\{e_i\}_{i=1,\ldots,n}$. Dann gibt es glatte Funktionen $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ mit $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-2} > 0$ und*

$$\begin{aligned}
e_1' &= \|c'\|\kappa_1 e_2 \\
e_2' &= -\|c'\|\kappa_1 e_1 + \|c'\|\kappa_2 e_3 \\
e_3' &= -\|c'\|\kappa_2 e_2 + \|c'\|\kappa_3 e_4 \\
&\vdots \qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \ddots \\
e_{n-1}' &= -\|c'\|\kappa_{n-2} e_{n-2} + \|c'\|\kappa_{n-1} e_n \\
e_n' &= -\|c'\|\kappa_{n-1} e_{n-1}
\end{aligned}$$

oder etwas kürzer

$$E'(t) = \|c'(t)\| K(t) E(t)$$

mit

$$E := \begin{pmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{pmatrix} \quad \textit{und} \quad K := \begin{pmatrix} & \kappa_1 & & & & \\ -\kappa_1 & & \kappa_2 & & & \\ & -\kappa_2 & & \kappa_3 & & \\ & & \ddots & & \ddots & \\ & & & -\kappa_{n-2} & & \kappa_{n-1} \\ & & & & -\kappa_{n-1} & \end{pmatrix}.$$

Die Matrix K heißt die Krümmungsmatrix *der Frenetkurve c.*

Bemerkung 1.45. Sei $\{e_i\}$ das n-Bein einer Frenetkurve c und K sei dessen Krümmungsmatrix. Weiter ϕ ein positiver Parameterwechsel und $\Psi(x) = Ax + b$ eine orientierungserhaltende Bewegung, d.h. $A \in SO(n)$. Dann gilt:

1. $\{\tilde{e}_i\}$ mit $\tilde{e}_i = e_i \circ \phi$ ist das n-Bein zu $\tilde{c} = c \circ \phi$.
2. $\tilde{K}$ mit $\tilde{K} = K \circ \phi$ ist die Krümmungsmatrix zu $\tilde{c} = c \circ \phi$.
3. $\{\hat{e}_i\}$ mit $\hat{e}_i = Ae_i$ ist das n-Bein zu $\hat{c} = \Psi \circ c$.
4. $\hat{K}$ mit $\hat{K} = K$ ist die Krümmungsmatrix zu $\hat{c} = \Psi \circ c$.

Die allgemeine Variante der Sätze 1.28 und 1.40 ist der folgende Satz 1.46.

Satz 1.46 (Hauptsatz der lokalen Kurventheorie)**.** *Gegeben seien Funktionen $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1} : I \to \mathbb{R}$ mit $\kappa_i > 0$ für $1 \leq i \leq n-2$. Dann gibt es eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^n$ deren Frenetmatrix K gemäß Satz 1.44 gerade die κ_i enthält. Diese Kurve ist eindeutig bis auf positive Bewegungen.*

Beweisskizze. Mit E von oben schreiben wir die Frenetgleichungen als

$$E' = K\,E\,.$$

Geben wir in $t_0 \in I$ eine positive ONB $e_1^0, \ldots, e_n^0$ vor und schreiben $E_0 \in SO(n)$ mit $(E_0)_{ij} = (e_i^0)_j$, so gibt es genau eine Lösung $E(t)$ des obigen DGL-Systems mit $E(t_0) = E_0$.

Es bleibt zu zeigen, dass $E(t)$ in jedem Punkt eine ONB definiert, d.h. es gilt $E(t)E(t)^T = \mathbb{1}$. Unsere Lösung E liefert mit den Frenetgleichungen

$$(EE^T)' = E'E^T + E(E')^T = K(EE^T) - (EE^T)K\,.$$

Dies ist nun ein DGL-System für die Abbildung EE^T mit der konstanten Lösung $EE^T = \mathbb{1}$ zum Anfangswert $E_0E_0^T = \mathbb{1}$. Da aber für unsere alte Lösung $E(t)$ die Abbildung $E(t)E(t)^T$ ebenfalls eine Lösung mit dem gleichen Anfangswert ist, müssen beide Lösungen übereinstimmen.

Ist nun $c_0 \in \mathbb{R}^n$, so gibt es zum Anfangswert $c(t_0) = c_0$ genau eine Lösung $c : I \to \mathbb{R}^n$ der DGL

$$c' = e_1\,.$$

Um zu zeigen, dass $E(t) = \big(e_1(t), e_2(t), \ldots, e_n(t)\big)^T$ tatsächlich das n-Bein zu c liefert, müssen die Punkte 1., 2., und 3. aus Definition/Bemerkung 1.42 überprüft werden: 1. ist klar, und 2. und 3. zeigt man mit Induktion über den Index i von e_i.

Wählt man zwei Anfangsbedingungen (E_0, c_0) bzw. $(\tilde{E}_0, \tilde{c}_0)$ so gibt es dazu jeweils eine eindeutige Kurve c bzw. $\tilde{c}$. Schreiben wir nun $\tilde{E}_0 = E_0A^T$, also $\tilde{e}_i = Ae_i$, mit $A \in SO(n)$ und $b := \tilde{c}_0 - c_0$, so liefert das eine Bewegung $\Psi(\vec{x}) = A\vec{x} + b$. Die Kurve $\Psi \circ c$ hat nun die gleichen Krümmungen, wie c und erfüllt die obigen DGLn mit Anfangsbedingungen $(\tilde{E}_0, \tilde{c}_0)$. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung muss daher $\tilde{c} = \Psi \circ c$ sein. □

2 Ausgewählte globale Eigenschaften ebener Kurven

2.1 Geschlossene ebene Kurven

Bezeichnung 2.1.

1. Eine Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt *differenzierbar*, wenn es ein offenes Intervall $I \supset [a, b]$ gibt, sodass c dort definiert und differenzierbar ist. Sie heißt glatt, wenn Sie auf I glatt ist.
2. Eine glatte Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt *geschlossen*, wenn in den Randpunkten alle Ableitungen übereinstimmen, d. h. $c^{(k)}(a) = c^{(k)}(b)$ für $k = 0, 1, \ldots$.
3. Eine geschlossene Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt *einfach geschlossen*, wenn die Einschränkung $c|_{[a,b[} : [a, b[\to \mathbb{R}^2$ injektiv ist.
4. Eine geschlossene Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn für alle $t \in [a, b]$ das Bild $Sp(c)$ ganz in einer der durch die Tangente $c(t) + \text{span}_{\mathbb{R}}\{c'(t)\}$ definierten Halbebenen enthalten ist.

Beispiel 2.2. Die Kurve $c_a : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $c(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \frac{a}{4}\cos(2t) \end{pmatrix}$ ist einfach geschlossen für $a < 2$ und besitzt einen Doppelpunkt für $a > 2$. Für $a = 2$ ist die Kurve in einem Punkt nicht regulär, siehe Abbildung 9.

Definition 2.3. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit Krümmung κ. Dann heißt $t_0 \in I$, bzw. $c(t_0) \in Sp(c)$, ein *Scheitelpunkt* der Kurve, wenn $\kappa'(t_0) = 0$.

Beispiel 2.4. Die durch $c(t) = \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ b\sin(t) \end{pmatrix}$ beschriebene Ellipse mit Halbachsen $a > 0$ und $b > 0$ hat genau vier Scheitelpunkte. Diese liegen in den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen.

Satz 2.5 (Vierscheitelsatz)**.** *Eine einfach geschlossene, konvexe Kurve $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, die auf Bogenlänge parametrisiert ist, hat mindestens vier Scheitelpunkte.*

Einen Beweis des Vierscheitelsatzes findet man z.B. in [Wa, 1.3 Satz C].

Bemerkung 2.6. Ist $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve, so gilt dies auch für alle Ableitungen $c^{(k)}$, das Tangentialfeld $\mathbf{t}$ sowie das Normalenfeld $\mathbf{n}$.

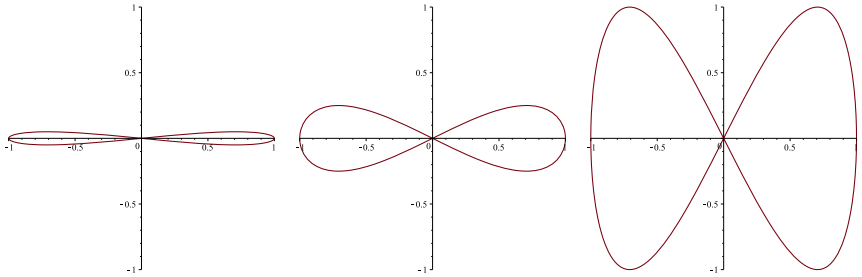
Beispiel 2.7. Es folgen einige Beispiele geschlossener Kurven c mit Abbildungen für c sowie für die Geschwindigkeitsfelder c' und Tangentialfelder $\mathbf{t} = \frac{1}{\|c'\|}c'$.

In den Graphiken werden blaue Teile einer Kurve doppelt bzw. dreifach durchlaufen und wir weisen speziell auf die gerahmten Sonderfälle hin.

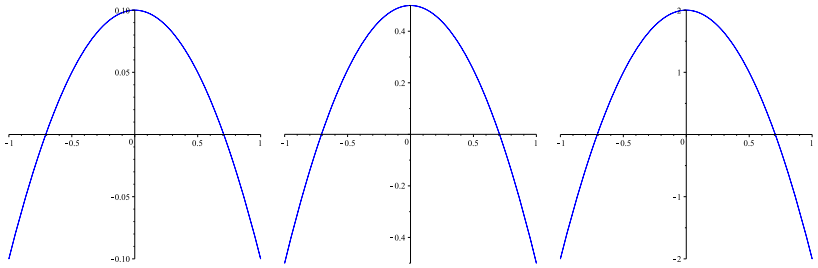
1. $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \frac{a}{4}\sin(2t) \end{pmatrix}$, $c'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \frac{a}{2}\cos(2t) \end{pmatrix}$, siehe Abbildung 7.

Abbildung 7: Bsp. 2.7.1 für Parameterwerte $a = 0.2,\ 1,\ 4$

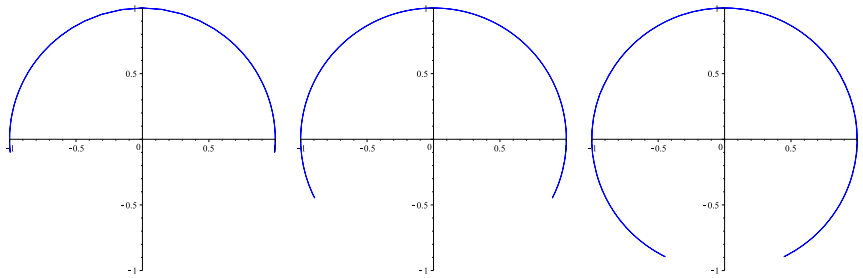
(a) Kurve $c(t)$



(b) Geschwindigkeit $\mathbf{c}'(t)$



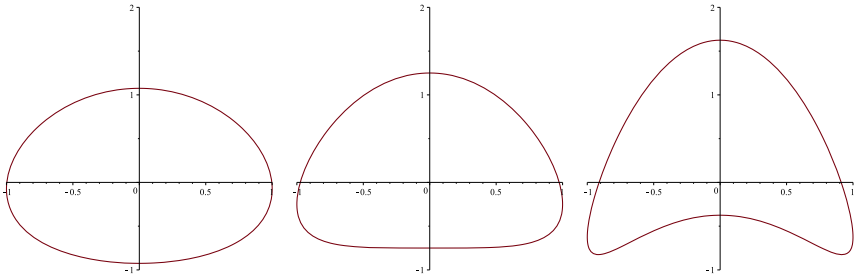
(c) Tangentialvektor $\mathbf{t}(t)$



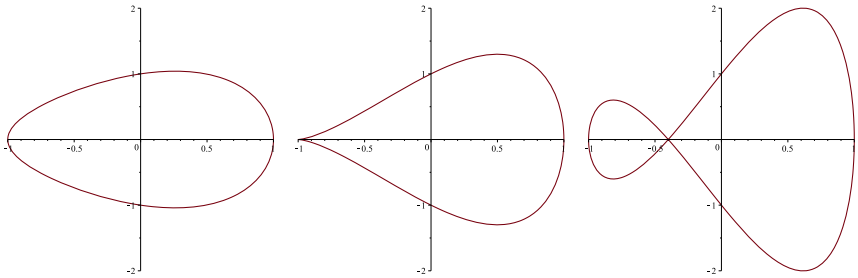
2. $c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \frac{a}{4}\cos(2t) \end{pmatrix}$, $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t - \frac{a}{2}\sin(2t) \end{pmatrix}$, siehe Abbildung 8.

Abbildung 8: Bsp. 2.7.2 für Parameterwert $a = 0.3$, $\boxed{1}$, 3

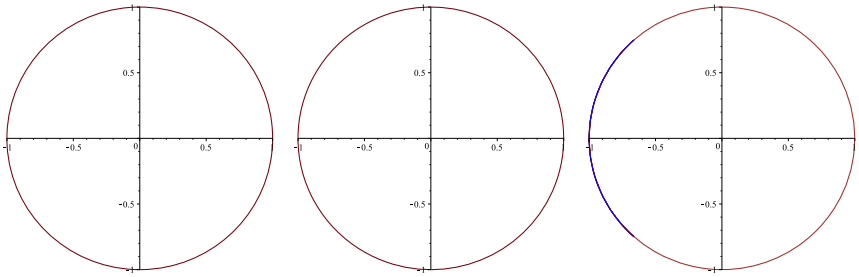
(a) Kurve $c(t)$



(b) Geschwindigkeit $\mathbf{c}'(t)$



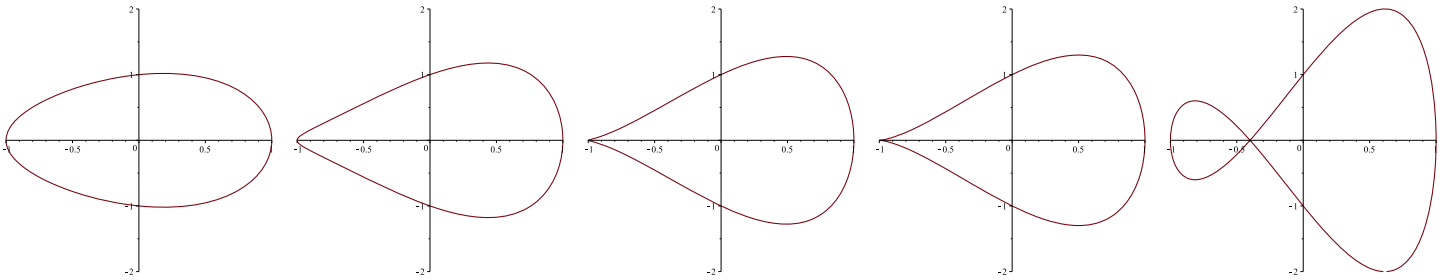
(c) Tangentialvektor $\mathbf{t}(t)$



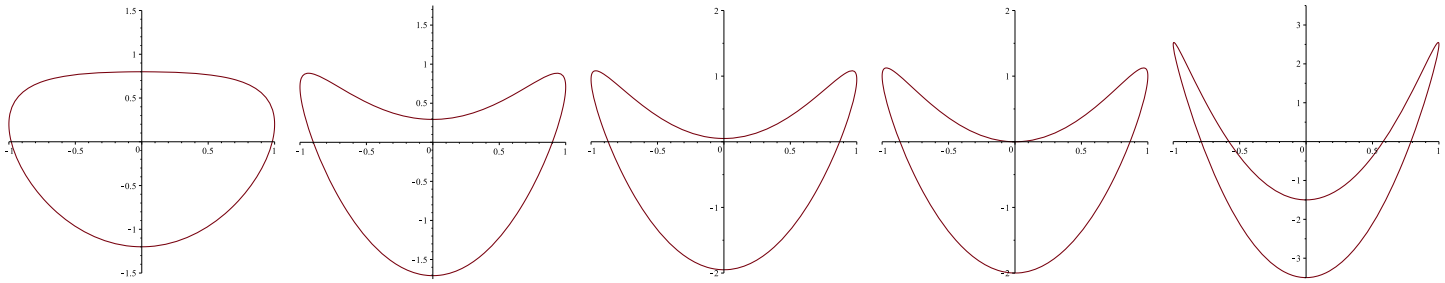
3. $c(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t + \frac{a}{4}\sin(2t) \end{pmatrix}$, $c'(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t + \frac{a}{2}\cos(2t) \end{pmatrix}$, siehe Abbildung 9.

Abbildung 9: Bsp. 2.7.3 für Parameterwerte $a = 0.4$, $\boxed{\sqrt{2}}$, 1.9, $\boxed{2}$, 5

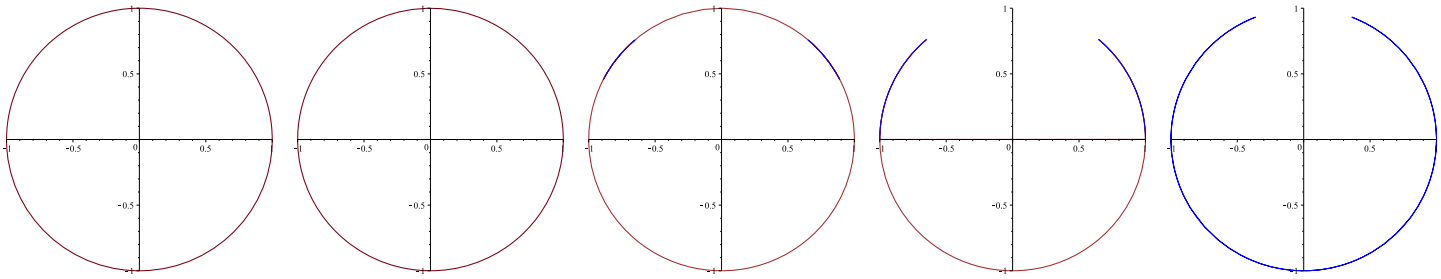
(a) Kurve $c(t)$



(b) Geschwindigkeit $c'(t)$



(c) Tangentialvektor $\mathbf{t}(t)$



2.2 Die Winkelfunktion einer ebenen Kurven

Im Folgenden seien die Kurven in der Regel auf Bogenlänge parametrisiert. Wir schreiben dann $c : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ wobei ℓ die Länge der Kurve bezeichnet. Eine große Rolle werden Kurven spielen, deren Bilder in $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ enthalten sind. Dies ist insbesondere beim Tangentialfeld einer Kurve der Fall.

Lemma 2.8. *1. Ist $c : [0,\ell] \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ eine stetige Kurve mit $Sp(c) \subset S^1$, so gibt es eine stetige Funktion $\varphi : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ mit*

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix} .$$

Diese Funktion ist eindeutig durch die Angabe von $\varphi(t_0) = \varphi_0$ bestimmt.

2. Ist die Kurve c glatt, so gilt das auch für die Winkelfunktion φ.

Bemerkung 2.9. 1. Ist $c = (c^1, c^2) : [0,\ell] \to S^1$ glatt, so lässt sich φ gemäß

$$\varphi(t) := \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \Big(c^1(\tau)(c^2)'(\tau) - (c^1)'(\tau)c^2(\tau) \Big) d\tau$$

berechnen.

2. Ist $c : [0,\ell] \to S^1$ eine geschlossene Kurve, so ist wegen $c(0) = c(\ell)$ dann $\varphi(\ell) = \varphi(0) + 2k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

2.3 Windungszahl, Index und der Hopfsche Umlaufsatz

Definition 2.10. Ist $c : [0,\ell] \to S^1$ eine geschlossene Kurve und $\varphi : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ die Winkelfunktion gemäß Lemma 2.8, dann nennt man

$$\deg(c) := \frac{1}{2\pi}\big(\varphi(\ell) - \varphi(0)\big) \in \mathbb{Z}$$

den *Grad von c*.

Beispiel 2.11. 1. Ist $c : [0,\ell] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, geschlossene Kurve und $p \in \mathbb{R}^2 \setminus Sp(c)$ so ist

$$w_{c,p} : [0,\ell] \to S^1 \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{mit} \quad w_{c,p}(t) := \frac{c(t) - p}{\|c(t) - p\|}$$

wohldefiniert. Ihr Grad heißt die *Umlaufzahl von c bezüglich p*:

$$W(c,p) := \deg\big(w_{c,p}\big) .$$

2. Ist $c : [0,\ell] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, geschlossene Kurve, so ist $\mathbf{t} = c' : [0,\ell] \to S^1$ eine wohldefinierte geschlossene Kurve. Der Grad dieser Kurve heißt der *Rotationsindex von c*, also

$$\mathrm{Ind}(c) := \deg\big(\mathbf{t}\big) .$$

a. Es gilt $\mathrm{Ind}(c) = W(c', 0)$.

b. Es bezeichne $\varphi : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ die Winkelfunktion von $\mathbf{t} = c'$, also $\mathbf{t}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(t)) \\ \sin(\varphi(t)) \end{pmatrix}$. Dann ist wegen $\mathbf{t}'(t) = \varphi'(t)\,\mathbf{n}(t)$ die Krümmung der Kurve c durch $\kappa = \varphi'$ gegeben. Mit $\varphi(\ell) - \varphi(0) = \int_0^\ell \varphi'(\tau)d\tau$ ist deshalb

$$\mathrm{Ind}(c) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \kappa(t)dt\,.$$

Einen Beweis des folgenden Satzes findet man in [Ri, §40.1].

Satz 2.12 (Jordanscher Kurvensatz[v])**.** *Sei $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, einfach geschlossene Kurve. Dann hat $\mathbb{R}^2 \setminus Sp(c)$ zwei Komponenten. Genau eine der beiden Komponenten ist beschränkt und $Sp(c)$ ist ihr gemeinsamer Rand.*

Bezeichnung 2.13.

- Die beschränkte Komponente gemäß Satz 2.12 nennt man *das Innere der Kurve c*.
- Man nennt eine reguläre, einfach geschlossene Kurve *positiv orientiert*, wenn ihr Inneres beim Durchlaufen links liegt.

Satz 2.14 (Hopfscher Umlaufsatz[vi])**.** *Es sei $c : [0, \ell] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, einfach geschlossene Kurve. Dann ist* $\mathrm{Ind}(c) = \pm 1$*, wobei das Vorzeichen von der Orientierung der Kurve abhängt.*

Für den Beweis des Hopfschen Umlaufsatzes 2.14 benötigen wir noch eine Verallgemeinerung von Lemma 2.8.

Lemma 2.15.

- *Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine bezüglich $x_0 \in M$ sternförmige Menge, d.h. für jedes $x \in M$ ist die Strecke $\overline{x_0 x} = \{x_0 + t(x - x_0) \,|\, t \in [0, 1]\}$ ganz in M enthalten. Weiter sei $f : M \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ stetig. Dann gibt es eine stetige Abbildung $\varphi : M \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi(x)) \\ \sin(\varphi(x)) \end{pmatrix}$ für alle $x \in M$.*
- *Diese Funktion wird eindeutig, wenn man $\varphi(x_0) = \varphi_0$ mit $f(x_0) = (\cos(\varphi_0), \sin(\varphi_0))$ vorgibt.*

[v] Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922)
[vi] Heinz Hopf (1894-1971)

- *Ist f glatt, so auch φ.*

Beweisansatz: Normiere c geeignet und definiere auf dem Dreieck

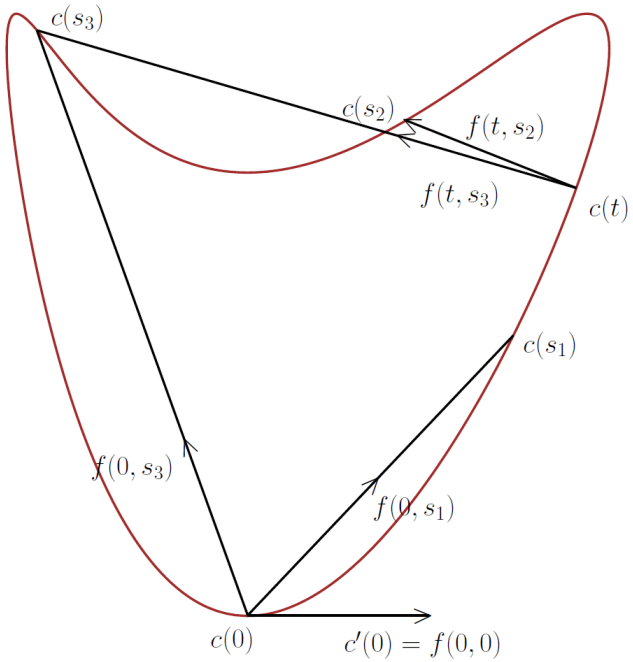
$$\triangle := \big\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, 0 \le t \le s \le \ell\big\}$$

die Sekantenabbildung

$$f : \triangle \to S^1 \quad \text{mit} \quad f(t,s) := \begin{cases} \dfrac{c(s)-c(t)}{\|c(s)-c(t)\|} & s > t, (t,s) \neq (0,\ell) \\ c'(t) & s = t \\ -c'(0) & (t,s) = (0,\ell) \end{cases}$$

Es sei nun $\varphi(s,t)$ die Winkelfunktion von $f(s,t)$ mit $\varphi(0,0) = 0$ gemäß Lemma 2.15. Dann ist $\hat{\varphi}(t) := \varphi(t,t)$ die Winkelfunktion von $c'(t)$ und es ist $\hat{\varphi}(\ell) - \hat{\varphi}(0) = \big(\varphi(\ell,\ell) - \varphi(0,\ell)\big) + \big(\varphi(0,\ell) - \varphi(0,0)\big)$. Zeigt man nun noch, dass beide Summanden jeweils den Wert π annehmen, dann folgt $\mathrm{Ind}(c) = 1$.

Abbildung 10: Die Sekantenabbildung $f : \triangle \to S^1$



Bemerkung 2.16. 1. Mit der Bemerkung in Beispiel 2.11.2b folgt nun, dass für eine einfach geschlossene, reguläre Kurve $\displaystyle\int_0^\ell \kappa(\tau)d\tau = \pm 2\pi$ gilt.

2. Es gibt auch eine Variante des Umlaufsatzes für stückweise reguläre, einfach geschlossene Kurven. Die zusätzliche vorkommenden Außenwinkel in den Ecken der Kurve haben jedoch keinen Einfluss auf den Rotationsindex und man erhält wieder $\mathrm{Ind}(c) = \pm 1$.

3. Drückt man allgemein den Rotationsindex wieder analog zur Bemerkung in Beispiel 2.11.2b mit Hilfe der Krümmung aus, so ergibt sich im Fall stückweise reguärer, einfach geschlossener Kurven

$$2\pi \mathrm{Ind}(c) = \int_0^\ell \kappa(t)dt + \sum \text{Außenwinkel}\,.$$

Dabei ist der Außenwinkel in einer Ecke der Winkel zwischen „Austrittstangente“ und „Eintrittstangente“ mit Werten in $[-\pi, \pi]$.

Bemerkung 2.17. 1. Der Beweis des Hopfschen Umlaufsatzes lässt sich auch mittels allgemeinerer Sätze der Theorie der Überlagerungen führen, wobei man insbesondere ausnutzt, dass $\mathbb{R}$ die universelle Überlagerung von S^1 ist. Man kann dann zeigen, dass der Grad einer Kurve $c : [0, \ell] \to S^1$ gemäß Definition 2.10 invariant unter stetigen Homotopien ist, die die Endpunkte der Kurve konstant lassen. Im oben skizzierten Beweis des Hopfschen Umlaufsatzes benutzt man die Homotopie zwischen c' als Einschränkung von f auf die Diagonale einerseits, und f eingeschränkt auf die Katheten des Dreiecks Δ andererseits.

2. Zwei geschlossene Kurven, die durch eine stetig differenzierbare Homotopie auseinander hervorgehen, haben den gleichen Rotationsindex, z.B. ein eingedellter Kreis ohne Ecken und der Kreis. Ist $H(s,t)$ die Homotopie zwischen den regulären Kurven $c_0(t)$ und $c_1(t)$, so ist $\partial_t H(t,s)$ eine zwischen $c_0'(t)$ und $c_1'(t)$. Insbesondere gibt es keine solche Homotopie zwischen „der liegenden Acht“ und S^1.

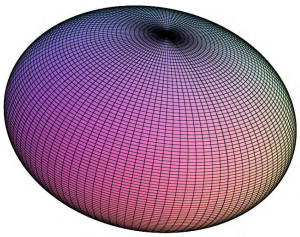
3. Die stetige Differenzierbarkeit der Homotopie H im vorigen Punkt ist aber nicht notwendig. Zum Beispiel sind der Einheitskreis S^1 und das Quadrat als Rand von $[-1,1] \times [-1,1]$ stetig homotop und haben den gleichen Rotationsindex. Ebenso sind allerdings S^1 und die „liegende Acht“aus Beispiel 2.7.1 homotop aber haben unterschiedliche Rotationsindizes.

3 Grundzüge der Flächentheorie

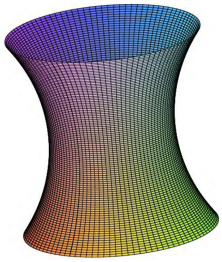
3.1 Grundbegriffe

Abbildung 11: Einige Punktmengen im $\mathbb{R}^3$

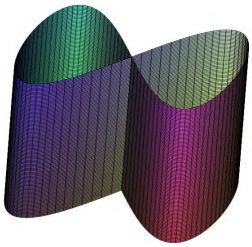
(a) Ellipsoid



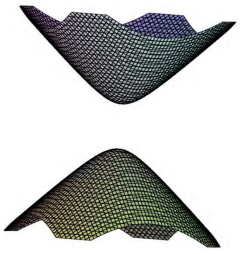
(b) Katenoid



(c) Zylindrische Acht



(d) Zweischaliges Hyperboloid



Definition 3.1. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Fläche*, wenn folgendes gilt:

1. Für alle $p \in M$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ mit $p \in V$ und eine Abbildung $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$, sodass
   (a) $\alpha(U) = M \cap V$,
   (b) $\alpha : U \to \alpha(U)$ ist ein Homöomorphismus.[vii]
2. $D_u\alpha$ hat für alle $u \in U$ vollen Rang zwei.

Bezeichnung 3.2. 1. Die Abbildung $\alpha : U \to \alpha(U) = M \cap V \subset \mathbb{R}^3$ heißt *Parametrisierung* von M um p.

2. $u = (u^1, u^2) \in U$ heißen die *Koordinaten* des Punktes $p = \alpha(u)$.

[vii] Der Homöomorphismus ist hier bezüglich der Relativtopologie auf M zu verstehen. Insbesondere ist $\alpha(U)$ wegen der Bedingung (a) selbst (relativ) offen.

3. $\alpha^{-1} : \alpha(U) \to U$ mit $\alpha^{-1}(p) = (u^1(p), u^2(p))$ heißt *Koordinatensystem* oder *Karte* und die $u^i : \alpha(U) \to \mathbb{R}$ heißen *Koordinatenfunktionen*. $\alpha(U) = M \cap V$ heißt *Koordinatenumgebung*.

4. Eine Menge $\{U_i, \alpha_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ von Parametrisierungen $\alpha_i : U_i \to M$ heißt *Atlas von* M, wenn sie ganz M überdecken, d.h.

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} \alpha_i(U_i) = M\,.$$

Der Atlas (und dann auch die Fläche) heißt *glatt*, wenn alle $\alpha_i : U_i \to \alpha_i(U_i)$ glatte Diffeomorphismen sind.

Definition/Bemerkung 3.3. 1. Ist $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ eine Abbildung, mit der Eigenschaft 2. aus Definition 3.1, so nennt man α oder auch $\alpha(U) \subset \mathbb{R}^3$ ein *parametrisiertes Flächenstück*.

2. Ist $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ ein parametrisiertes Flächenstück, dann gibt es um jeden Punkt $u \in U$ eine Umgebung $u \in U_0 \subset U$, sodass $\alpha(U_0)$ eine Fläche im Sinne von Definition 3.1 ist und $\alpha\big|_{U_0} : U_0 \to \alpha(U_0)$ eine Parametrisierung.

Beispiel 3.4.
- Jede Karte einer Fläche liefert ein parametrisiertes Flächenstück.
- Die Mengen in Abbildung 11 (a), (b) und (d) sind Flächen, zumindest wenn etwaige Ränder nicht zur Menge gehören.
- Die zylindrische Acht in Abbildung 11 (c) ist keine Fläche. Es gibt aber lokale Flächenstücke $\alpha_i : U_i \to \mathbb{R}^3$, die M ganz überdecken, d.h. $M = \bigcup_i \alpha_i(U_i)$.

Beispiel 3.5. Es sei $\gamma = (\rho, z) : I \to \mathbb{R}^2$ eine regulärte regulärer Kurve, und $\alpha : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\alpha(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho(t)\cos\varphi \\ \rho(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}\,.$$

Dann nennen wir $M = \alpha(I \times \mathbb{R})$ *Rotationsfläche* mit erzeugender Kurve γ.

1. M ist lokal um $p = \alpha(t_0, \varphi_0) \in M$ genau dann ein parametrisiertes Flächenstück, wenn $\rho(t_0) \neq 0$.

2. M ist eine Fläche, wenn γ die z-Achse nicht schneidet und γ injektiv ist.

Dies ist keine umfassende Klassifizierung von Rotationsflächen im umgangssprachlichen Verständnis, da z.B. die Sphäre nicht eingeschlossen ist.

Definition/Bemerkung 3.6. 1. Die Abbildung $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ erfüllt die Eigenschaft 2. – bzw. liefert ein parametrisiertes Flächenstück – genau dann, wenn die Spalten $\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u)$ und $\frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u)$ der Funktionalmatrix $D\alpha(u)$ in jedem Punkt $u \in U$ linear unabhängig sind. Insbesondere ist das gleichbedeutend mit $\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u) \neq 0$.

2. Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ eine Karte von M. Dann heißt

$$N^{(\alpha)}(u) := \frac{1}{\left\| \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u) \right\|} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u) \right)$$

der *Normalenvektor von M in $p = \alpha(u)$ bezüglich α*, siehe dazu auch Definition 4.11.

Definition 3.7. Es sei $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche M und $\phi : \tilde{U} \to U$ ein Diffeomorphismus zwischen den offenen Mengen $U, \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2$. Dann heißt $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \to \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\alpha} = \alpha \circ \phi$ eine *Umparametrisierung* der Fläche und ϕ der *Parameterwechsel*. In diesem Fall ist insbesondere $\alpha(U) = \tilde{\alpha}(\tilde{U})$.

Die folgenden zwei Beispiele liefern ganze Klassen von Flächen:

Satz 3.8. *1. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung. Dann ist ihr Graph*

$$G_f = \{y \in \mathbb{R}^3 \mid y = (x, f(x)) \text{ für ein } x \in U\}$$

eine Fläche in $\mathbb{R}^3$. Die Abbildung $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ mit $\alpha(x) := (x, f(x))$ ist eine globale Karte.

2. Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und für alle $p \in F^{-1}(c)$ sei der Rang von $DF(p)$ maximal, also 2. Dann ist $F^{-1}(c)$ eine Fläche.

Mit Satz A.35 besitzt das zuvor gesagte auch eine – zumindest lokale – Umkehrung, die wir mit dem vorigen Satz wie folgt zusammenfassen.

Satz 3.9 (Darstellungssatz für Flächen)**.** *Die folgenden drei Charakterisierungen einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^3$ sind äquivalent:*

1. *M ist eine Fläche.*

2. *Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine offene zusammenhängende Umgebung $N \subset M$ und eine offene Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$, sodass N der Graph einer Abbildung $f : U \to \mathbb{R}$ ist (gegebenenfalls nach Umsortierung der Koordinaten).*

3. *Zu jedem Punkt $p \in M$ gibt es eine offene Umgebung $N \subset M$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ mit $N \subset V$ und eine Abbildung $F : V \to \mathbb{R}$, sodass $N = F^{-1}(0)$.*

Etwas plakativ kann man sagen: Eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^3$ lässt sich lokal

- als Bild einer Parametrisierung $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ oder
- als Graph einer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ oder
- als Nullstellenmenge einer Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

darstellen.

Definition/Satz 3.10. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in M$. Weiter sei $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche mit $p \in \alpha(U)$. Mit $p = \alpha(u)$ ist die Menge*

$$T_pM := \operatorname{Bild}\big(D_u\alpha\big) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u) \right\}$$

unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Die Menge T_pM heißt der Tangentialraum *der Fläche M im Punkt p. Die Vektoren $v \in T_pM$ heißen* Tangentialvektoren.

Satz 3.11. *Ist die Fläche $M \subset \mathbb{R}^n$ als Nullstellenmenge einer Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \supset U \to \mathbb{R}$ gegeben, dann gilt*

$$T_pM = \ker(DF(p))$$

für alle $p \in M$.

Bemerkung 3.12. Es sei $v_p \in T_pM$ und $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung um p mit $\alpha(u) = p$. Dann lässt sich v_p in der Basis gemäß Definition/Satz 3.10 darstellen, das heißt es gibt $\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$v_p = D_u\alpha \cdot \vec{v} = v^1 \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u) + v^2 \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u)\,.$$

Ist nun $\hat{\alpha} = \alpha \circ \phi : \hat{U} \to M$ eine Umparametrisierung mit $\phi(\hat{u}) = u$, so hat v_p für einen Vektor $\vec{\hat{v}} = \begin{pmatrix} \hat{v}^1 \\ \hat{v}^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ in der Parametrisierung $\hat{\alpha}$ die Basisdarstellung

$$v_p = D_{\hat{u}}\hat{\alpha} \cdot \vec{\hat{v}} = \hat{v}^1 \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial \hat{u}^1}(\hat{u}) + \hat{v}^2 \frac{\hat{\partial} \alpha}{\partial \hat{u}^2}(\hat{u}) \,.$$

Schreiben wir $\phi = (\phi^1, \phi^2)$ mit $\phi^i : \hat{U} \to \mathbb{R}$, so ist

$$v^1 = \hat{v}^1 \frac{\partial \phi^1}{\partial \hat{u}^1}(\hat{u}) + \hat{v}^2 \frac{\partial \phi^1}{\partial \hat{u}^2}(\hat{u}), \qquad v^2 = \hat{v}^1 \frac{\partial \phi^2}{\partial \hat{u}^1}(\hat{u}) + \hat{v}^2 \frac{\partial \phi^2}{\partial \hat{u}^2}(\hat{u})$$

bzw.

$$\vec{v} = D_{\hat{u}}\phi \cdot \vec{\hat{v}} \quad \text{oder umgekehrt} \quad \vec{\hat{v}} = D_u \phi^{-1} \cdot \vec{v} \,.$$

3.2 Differenzierbarkeit

Satz 3.13. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $\alpha : U \to M$ eine lokale Parametrisierung. Sei weiter $V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : V \to \mathbb{R}^3$ mit $f(V) \subset \alpha(U) \subset M$. Dann ist f genau dann glatt, wenn $\alpha^{-1} \circ f : V \to \mathbb{R}^2$ glatt ist.*

Folgerung 3.14. Ist M eine glatte Fläche und sind $\alpha_i : U_i \to M$ für $i = 1, 2$ zwei lokale Parametrisierungen mit $\alpha_1(U_1) \cap \alpha_2(U_2) \neq \emptyset$, dann ist $\varphi_{12} := \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1 : \hat{U}_1 \to \hat{U}_2$ glatt. Hierbei ist $\hat{U}_k = \alpha_k^{-1}(\alpha_1(U_1) \cap \alpha_2(U_2)) \subset U_k$ für $k = 1, 2$.

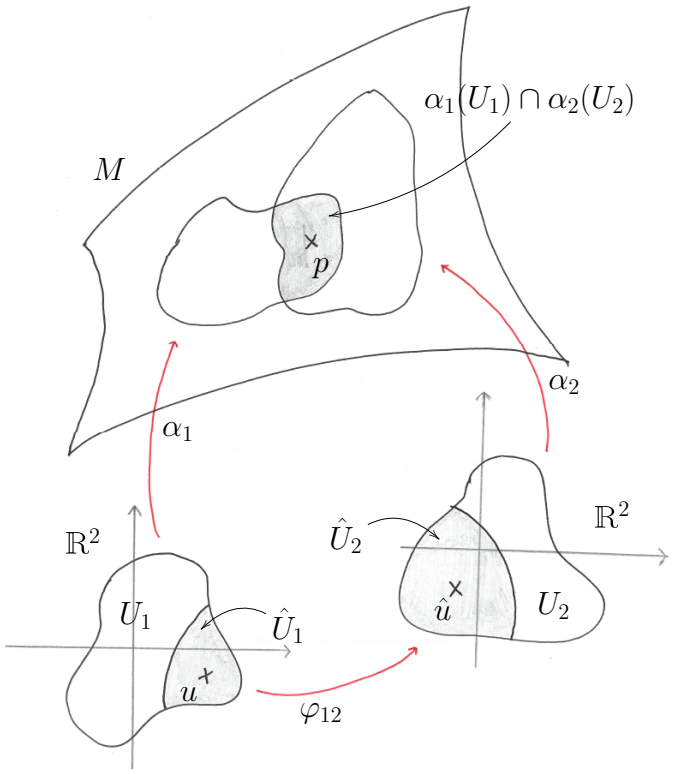
Die Abbildung φ_{12} bezeichnet man auch als *Übergangsfunktion* der Parametrisierungen α_1, α_2 – siehe dazu auch Definition 3.7 und Abbildung 12.

Definition/Bemerkung 3.15.

- Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche und $f : M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Die Abbildung f heißt *glatt um p*, wenn es eine Parametrisierung $\alpha : U \to M$ mit $p \in \alpha(U)$ gibt, sodass $f \circ \alpha : U \to \mathbb{R}^n$ glatt ist.
- f heißt *glatt*, wenn f glatt um p ist für alle $p \in M$.
- Diese Definition ist unabhängig von der gewählten Parametrisierung.

Bemerkung 3.16. Oft werden wir für eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^n$ nach der Wahl einer Parametrisierung $\alpha : U \to M$ sprachlich nicht zwischen den Funktionen $f\big|_{\alpha(U)} : \alpha(U) \to \mathbb{R}^n$ und $f \circ \alpha : U \to \mathbb{R}^n$ unterscheiden. Wollen wir den Unterschied jedoch betonen, so schreiben wir auch $f^{(\alpha)}$ für $f \circ \alpha$. Diese Notation wird sich als nützlich herausstellen.

Abbildung 12: Übergangsfunktion



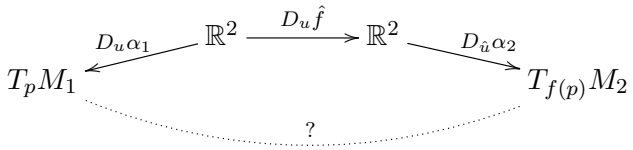
Satz 3.17. *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte Fläche und $f : M \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann ist f genau dann glatt um $p \in M$ wenn es eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^3$ mit $p \in V$ und eine Abbildung $\hat{f} : V \to \mathbb{R}^n$ mit $\hat{f}\big|_{M\cap V} = f\big|_{M\cap V}$ gibt, sodass $\hat{f}$ glatt ist.*

Definition 3.18. Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^3$ Flächen und $f : M_1 \to M_2$ eine Abbildung.

1. f heißt *glatt*, wenn es lokale Parametrisierungen $\alpha_i : U_i \to M_i$ gibt, sodass $\alpha_2^{-1} \circ f \circ \alpha_1 : U_1 \to U_2$ glatt ist.
2. f heißt *Diffeomorphismus*, wenn f bijektiv ist, und wenn f und f^{-1} glatt sind.

Bemerkung 3.19.
- Definition 3.18 ist unabhängig von den gewählten Parametrisierungen.

- Definition 3.18 lässt uns zwar entscheiden, ob eine Funktion differenzierbar ist, aber sie sagt uns nicht, was die „Ableitung“ bzw. das „Differential“ einer solchen Abbildung ist. Eine Idee bekommen wir aber schon, wenn wir uns das folgende Diagramm anschauen



  hierbei ist $u = \alpha_1^{-1}(p)$ und $\hat{u} = \alpha_2^{-1}(f(p)) = \hat{f}(u)$.

Definition 3.20. 1. Eine (glatte) Abbildung $X : M \to \mathbb{R}^3$ heißt *(glattes) Vektorfeld* auf M.

2. Ein Vektorfeld X auf M heißt *tangential*, wenn $X(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$

3. Ein Vektorfeld X auf M heißt *normal*, wenn $X(p) \perp T_pM$ für alle $p \in M$.

Bemerkung 3.21. Ist $\alpha : U \to M$ eine lokale Parametrisierung von M und X ein Vektorfeld auf M, so bezeichnet man $X \circ \alpha$ auch als lokales Vektorfeld. Man identifiziert dabei oft $X\big|_{\alpha(U)} : \alpha(U) \to \mathbb{R}^3$ und $X \circ \alpha : U \to \mathbb{R}^3$. Wenn wir den Unterschied betonen wollen, dann schreiben wir auch $X^{(\alpha)}$ statt $X \circ \alpha$.

Insbesondere ist X genau dann glatt, wenn $X^{(\alpha)}$ glatt ist.

Satz 3.22. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ ein Fläche. Ist $X : M \to \mathbb{R}^3$ ein glattes, tangentiales Vektorfeld und $\alpha : U \to M$ ein lokale Parametrisierung, dann gibt es glatte Funktionen $X_1, X_2 : \alpha(U) \to \mathbb{R}$ derart, dass*

$$X(p) = X_1(p)\frac{\partial\alpha}{\partial u^1}(\alpha^{-1}(p)) + X_2(p)\frac{\partial\alpha}{\partial u^2}(\alpha^{-1}(p))\,.$$

Die X_i oder auch die Abbildungen $X_i^{(\alpha)} := X_i \circ \alpha : U \to \mathbb{R}$ nennt man die Koordinaten des Vektorfeldes in der Parametrisierung α.

Bemerkung 3.23. 1. Die Darstellung im obigen Satz läßt sich ebenfalls lesen als

$$X^{(\alpha)}(u) = X_1^{(\alpha)}(u)\frac{\partial\alpha}{\partial u^1}(u) + X_2^{(\alpha)}(u)\frac{\partial\alpha}{\partial u^2}(u)$$

  mit $u \in U$.

2. Schreiben wir $\vec{X}^{(\alpha)} := \begin{pmatrix} X_1^{(\alpha)} \\ X_2^{(\alpha)} \end{pmatrix} : U \to \mathbb{R}^2$ und

$$I^{(\alpha)}_{\alpha(u)} := \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u), \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u), \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u) \right\rangle \end{pmatrix}$$
$$= \big(D_u\alpha\big)^T D_u\alpha$$

so lassen sich die X_i gemäß

$$\vec{X}^{(\alpha)}(u) = (I^{(\alpha)}_{\alpha(u)})^{-1} \cdot \big(D_u\alpha\big)^T \cdot X(\alpha(u))$$

berechnen.

Satz 3.24. *Es sei X ein tangentiales Vektorfeld auf der Fläche M und $\alpha : U \to M$, $\beta : V \to M$ zwei Parametrisierungen mit Übergangsfunktion $\phi = \beta^{-1} \circ \alpha = (\phi_1, \phi_2) : U \to V$.*[viii] *Seien weiter X_i und $\tilde{X}_i$ die Koordinaten von X bezüglich α und β so gilt für $i = 1, 2$*

$$\tilde{X}_i(p) = \frac{\partial \phi_i}{\partial u_1}(\alpha^{-1}(p))X_1(p) + \frac{\partial \phi_i}{\partial u_2}(\alpha^{-1}(p))X_2(p)$$

oder kürzer

$$\vec{\tilde{X}}(p) = D_{\alpha^{-1}(p)}\phi \cdot \vec{X}(p)\,.$$

Bemerkung 3.25. In Termen der Funktionen $X_i^{(\beta)} = \tilde{X}_i \circ \beta : V \to \mathbb{R}$ bzw. $X_i^{(\alpha)} := X_i \circ \alpha : U \to \mathbb{R}$ schreibt sich die Transformationsformel aus Satz 3.24 für $u \in U$ und $i = 1, 2$ als

$$X_i^{(\beta)}(\phi(u)) = \frac{\partial \phi_i}{\partial u_1}(u)X_1^{(\alpha)}(u) + \frac{\partial \phi_i}{\partial u_2}(u)X_2^{(\alpha)}(u)\,.$$

3.3 Der Tangentialraum und das Differential

Bisher hatten wir den Tangentialraum über Parametrisierungen definiert:

[viii] Durch Verkleinerung der Definitionsbereiche von α und β dürfen wir annehmen, dass $\alpha(U) = \beta(V)$ ist.

Definition/Satz 3.10. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in M$. Weiter sei $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung der Fläche mit $p \in \alpha(U)$. Dann ist die Menge*

$$T_pM := Im(D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(\alpha^{-1}(p)), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(\alpha^{-1}(p)) \right\}$$

unabhängig von der Wahl der Parametrisierung. Die Menge T_pM heißt der Tangentialraum *der Fläche M im Punkt p. Die Vektoren $v \in T_pM$ heißen* Tangentialvektoren.

Bezeichnung 3.26. Um etwas Schreibarbeit zu sparen, schreiben wir von nun an für eine Parametrisierung $\alpha : U \to M$ einer Fläche M mit $p = \alpha(u) \in \alpha(U)$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u^i}(p) := \frac{\partial \alpha}{\partial u^i}(\alpha^{-1}(p)) = \frac{\partial \alpha}{\partial u^i}(u)\,.$$

Gegebenenfalls verwenden wir ab und zu die noch platzsparendere Variante $\partial_i \alpha(p) := \frac{\partial \alpha}{\partial u^i}(p)$.

Die Definition des Tangentialraums und des Tangentialvektors wollen wir nun etwas "geometrisieren".

Satz 3.27. *Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche und $p \in M$. Sei weiter $c :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ eine Raumkurve mit $c(0) = p$. Dann ist einerseits $c'(0) \in T_pM$ und andererseits gibt es zu $v \in T_pM$ eine Raumkurve $c :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Das heißt also:*

$$T_pM = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \,|\, \exists c :]-\epsilon, \epsilon[\to M : c(0) = p\,, c'(0) = v \right\}$$

Bemerkung 3.28. 1. Man kann den Tangentialraum auch ausschließlich mit Hilfe von Kurven auf der Fläche definieren. Es sei

$$C_p := \{c :]-\epsilon, \epsilon[\to M \,|\, \epsilon > 0, c(0) = p, c \text{ glatt}\}.$$

Hierbei ist wegen Satz 3.13 c genau dann glatt, wenn $\rho = \alpha^{-1} \circ c :]-\epsilon, \epsilon[\to \mathbb{R}^2$ für eine Parametrisierung α glatt ist. Auf C_p definieren wir eine Äquivalenzrelation wie folgt: zwei Kurven $c_1, c_2 \in C_p$ heißen äquivalent, wenn es eine Parametrisierung α um p gibt, sodass die Vektoren $(\alpha^{-1} \circ c_1)'(0), (\alpha^{-1} \circ c_2)'(0) \in \mathbb{R}^2$ übereinstimmen, d.h.

$$c_1 \sim c_2 \Longleftrightarrow (\alpha^{-1} \circ c_1)'(0) = (\alpha^{-1} \circ c_2)'(0)\,.$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierung und für die Klasseneinteilung $C_p/\!\sim$ gilt

$$T_pM = C_p/\!\sim\,.$$

2. Den Umweg über die Parametrisierung können wir uns sparen und eine Äquivalenzrelation wie folgt definieren:

$$c_1 \sim c_2 \iff c_1'(0) = c_2'(0)\,.$$

   Die Klasseneinteilungen $C_p/\!\sim$ stimmen in beiden Fällen überein.

3. Der Vorteil in der ersten Definition der Äquivalenzrelation ist, dass wir sie allein mit Hilfe der Fläche und nicht mit Hilfe des ihn umgebenden Raumes erklären.

Beweisskizze. [Satz 3.27] Wir zeigen $T_pM \subset \widehat{C}_p$ und $T_pM \supset \widehat{C}_p$ für $\widehat{C}_p := \big\{v \in \mathbb{R}^3 \,|\, \exists c :]-\epsilon,\epsilon[\to M : c(0) = p\,, c'(0) = v\big\}$.

(„$\subset$“) Sei $v \in T_pM$, $\alpha : U \to M$ eine Karte um $p = \alpha(u)$ und $\vec{w} \in \mathbb{R}^2$ mit $v = D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha(\vec{w})$. Sei weiter c das Bild der Geraden durch $\alpha^{-1}(p)$ mit Richtung $\vec{w}$ unter α, also $c(t) = \alpha(\alpha^{-1}(p) + t\vec{w})$. Wegen der Offenheit von U ist $\alpha^{-1}(p) + t\vec{w} \in U$ für $|t|$ klein genug, sodass c auf einem Intervall um 0 wohldefiniert ist. Es ist nun $c(0) = \alpha(\alpha^{-1}(p)) = p$ und

$$\begin{aligned} c'(0) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\big(\alpha(\alpha^{-1}(p) + t\vec{w})\big) \\ &= D_{\alpha^{-1}(p)+0\,\vec{w}}\alpha \cdot \Big(\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\alpha^{-1}(p) + t\vec{w})\Big) \\ &= D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha \cdot \vec{w} = v\,, \end{aligned}$$

also $v \in \widehat{C}_p$.

(„$\supset$“) Sei nun $v \in \widehat{C}_p$ und $c : I \to M$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$, die ganz in einer Koordinatenumgebung von p verläuft, also $Sp(c) \subset \alpha(U)$ für eine Karte $\alpha : U \to M$ um p. Sei nun $\rho := \alpha^{-1} \circ c : I \to U$ und $\vec{w} := \rho'(0)$. Dann ist

$$D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha(\vec{w}) = (\alpha \circ \rho)'(0) = c'(0) = v\,,$$

also $v \in T_pM$. □

Beweisskizze. [Bemerkung 3.28] Zum Beweis der Umformulierung von Satz 3.27 gemäß der anschließenden Bemerkung 3.28 definieren wir Abbildungen $\Phi : T_pM \to C_p/\!\sim$ und $\Psi : C_p/\!\sim \to T_pM$ und zeigen dann $\Psi \circ \Phi = id_{T_pM}$ und $\Phi \circ \Psi = id_{C_p/\sim}$.

Es sei zu $v \in T_pM$ mit $v = D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha(\vec{w})$ die Kurve $c(t) = \alpha(\alpha^{-1}(p) + t\vec{w})$ genauso definiert wie im Beweis „$\subset$“ oben und wir setzen

$$\Phi(v) := [c]\,.$$

Obwohl hier die Definition der Kurve c von der Wahl einer Karte abhängt, ist die zugehörige Äquivalenzklasse unabhängig von dieser Wahl. Zur Begründung seien $c(t) = \alpha(\alpha^{-1}(p) + t\vec{w})$ und $\tilde{c}(t) = \tilde{\alpha}(\tilde{\alpha}^{-1}(p) + t\vec{\tilde{w}})$ mit $v = D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha(\vec{w}) = D_{\tilde{\alpha}^{-1}(p)}\tilde{\alpha}(\vec{\tilde{w}})$. Dann gilt

$$(\alpha^{-1} \circ c)'(0) = \vec{w} \quad \text{und} \quad (\alpha^{-1} \circ \tilde{c})'(0) = D_{\tilde{\alpha}^{-1}(p)}(\alpha^{-1} \circ \tilde{\alpha})(\vec{\tilde{w}})\,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha(\vec{w}) = v = D_{\tilde{\alpha}^{-1}(p)}\tilde{\alpha}(\vec{\tilde{w}}) &= D_{\tilde{\alpha}^{-1}(p)}(\alpha \circ \alpha^{-1} \circ \tilde{\alpha})(\vec{\tilde{w}}) \\ &= D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha \cdot D_{\tilde{\alpha}^{-1}(p)}(\alpha^{-1} \circ \tilde{\alpha})(\vec{\tilde{w}}) \end{aligned}$$

stimmen beide Ergebnisse überein.

Umgekehrt sei für eine Kurve $\tilde{c} \in [c] \in C_p/\!\sim$

$$\Psi([c]) := \tilde{c}'(0)\,.$$

Die Abbildung Ψ ist wohldefiniert: Einerseits ist $\tilde{c}'(0) \in T_pM$, da $\tilde{c}'(0) = D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha(\tilde{\rho}'(0))$ – analog zum Beweis „$\supset$“ und mit den dortigen Bezeichnungen. Andererseits ist die Abbildung von der Wahl des Repräsentanten $\tilde{c} \in [c]$ unabhängig, denn für $\tilde{c}, \hat{c} \in [c]$ ist per Definition $\hat{c}'(0) = \tilde{c}'(0)$.

Es gilt nun

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi(v) = \Psi([\alpha(\alpha^{-1}(p) + t\vec{w})]) &= \tfrac{d}{dt}\big|_{t=0}\big([\alpha(\alpha^{-1}(p) + t\vec{w})]\big) \\ &= D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha(\vec{w}) = v \end{aligned}$$

und

$$\Phi \circ \Psi([c]) = \Phi(c'(0)) = [\alpha(\alpha^{-1}(p) + t\rho'(0))] = [c]\,.$$

Hierbei gilt die letzte Gleichheit wegen $\alpha \circ \rho = c$, denn schreiben wir $\tilde{c}(t) := \alpha(\alpha^{-1}(p) + 0\,\rho'(0))$, dann ist einerseits $\tilde{c}(0) = c(0) = p$ und andererseits $\tilde{c}'(0) = D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha(\rho'(0)) = (\alpha \circ \rho)'(0) = c'(0)$, also $\tilde{c} \sim c$. □

Wegen der großen Bedeutung für praktische Anwendungen fassen wir einen Teil aus Satz 3.8 und Satz 3.11 noch einmal zusammen:

Satz 3.29. *Es sei $V \subset \mathbb{R}^3$ offen und $F : V \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $0 \in \mathrm{Bild}(F)$. Für $M := F^{-1}(0)$ gilt:*

1. *M ist eine Fläche, wenn $\mathrm{grad}F(p) \neq 0$ für alle $p \in M$.*

2. $T_pM = \mathrm{grad}F(p)^\perp = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle v, \mathrm{grad}F(p)\rangle = 0\}$ – *anschaulich: der Gradient steht senkrecht auf der Fläche.*

Wir haben im Abschnitt 3.2 die Differenzierbarkeit von Abbildungen zwischen Flächen diskutiert, siehe Definition 3.18. In der anschließenden Bemerkung 3.19 haben wir auch das Problem angesprochen, wie ein geeignetes Differential, bzw. eine geeignete Ableitung gegeben ist. Wir haben dort ein Diagramm skizziert und die Suche nach einer Abbildung, die dieses Diagramm kommutativ macht, vertagt. Dies wollen wir nun nachholen und uns dazu der geometrischen Beschreibung des Tangentialraums bedienen.

Definition 3.30. Sei $f : M_1 \to M_2$ eine Abbildung zwischen zwei Flächen. Dann ist die Abbildung

$$d_pf : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$$

definiert durch

$$d_pf(v) := (f \circ c)'(0) \in T_{f(p)}M_2\,.$$

Dabei ist $c :]-\epsilon, \epsilon[\to M_1$ eine Kurve, die $v \in T_pM_1$ repräsentiert, d.h. $c(0) = p$ und $c'(0) = v$.

Das diese Definition mit der Diskussion in Bemerkung 3.19 zusammenpasst, zeigt der folgende Satz 3.31.

Satz 3.31. *Für $f : M_1 \to M_2$ ist $d_pf : T_pM_1 \to T_{f(p)}M_2$ unabhängig von der gewählten Kurve. Insbesondere ist die Matrixdarstellung von d_pf bezüglich zweier Parametrisierungen $\alpha_1 : U_1 \to M_1$ um p bzw. $\alpha_2 : U_2 \to M_2$ um $f(p)$ gegeben durch*

$$D_{\alpha^{-1}(p)}(\alpha_2^{-1} \circ f \circ \alpha_1)\,.$$

Mit $\hat{f} = \alpha_2^{-1} \circ f \circ \alpha_1 : U_1 \to U_2$ ist das

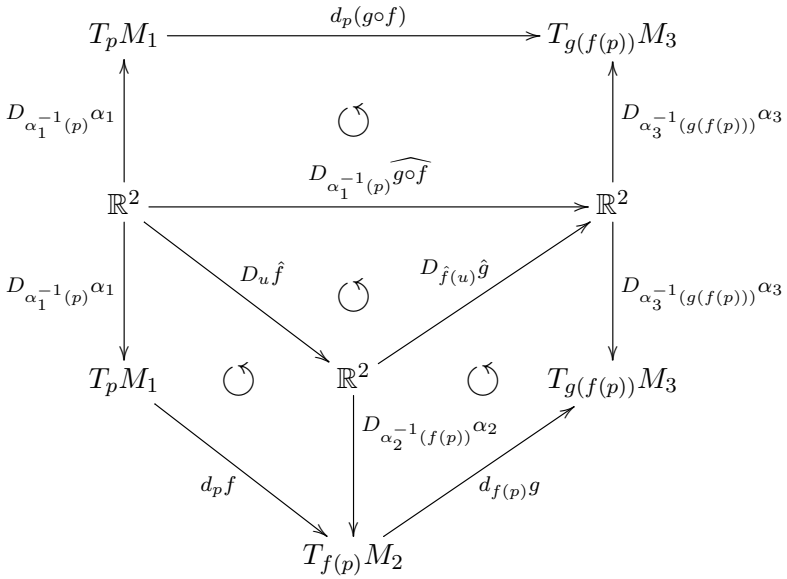
$$\begin{array}{ccc} T_pM_1 & \xrightarrow{d_pf} & T_{f(p)}M_2 \\ {\scriptstyle D_{\alpha_1^{-1}(p)}\alpha_1}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle D_{\alpha_2^{-1}(f(p))}\alpha_2} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[D_{\alpha_1^{-1}(p)}\hat{f}]{} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Das Differential erfüllt insbesondere die Kettenregel.

Satz 3.32. *Sind $f : M_1 \to M_2$ und $g : M_2 \to M_3$ glatte Abbildungen, dann ist das Differential der Verkettung $g \circ f : M_1 \to M_3$ gegeben durch*

$$d_p(g \circ f) = d_{f(p)}g \circ d_p f : T_pM_1 \to T_{g(f(p))}M_3$$

denn es ist $D_u(\widehat{g \circ f}) = D_{\hat{f}(u)}\hat{g} \circ D_u\hat{f}$



Bemerkung 3.33. (*Praktische Berechnung des Differentials.*)

Es sei $\alpha : U \to M_1$ eine Parametrisierung der Fläche M_1 um $p = \alpha(u)$. Speziell für die Vektoren $\frac{\partial\alpha}{\partial u^i}(p)$ sind Kurven $c_i :]-\epsilon, \epsilon[\to M_1$ gemäß Satz 3.27 gegeben durch

$$c_1(t) = \alpha(u^1 + t, u^2)\,, \quad c_1(t) = \alpha(u^1, u^2 + t)\,,$$

also $c_i = \alpha \circ \rho_i$ mit $\rho_i(t) = u + t\vec{e}_i$, siehe dazu auch den Beweis zu Satz 3.27.

Es sei $f : M_1 \to M_2$ eine glatte Abbildung. Dann ist mit $\rho_i'(0) = \vec{e}_i$

$$\begin{aligned} d_pf\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial u_i}(p)\Big) &= (f \circ c_i)'(0) = (f \circ \alpha \circ \rho_i)'(0) = D_u(f \circ \alpha)(\vec{e}_i) \\ &= \frac{\partial(f \circ \alpha)}{\partial u^i}(u)\,. \end{aligned}$$

Das heißt für einen beliebigen Vektor $w \in T_pM$ mit der Basisdarstellung

$w = D_u\alpha(\vec{w}) = w^1 \dfrac{\partial \alpha}{\partial u_1}(p) + w^2 \dfrac{\partial \alpha}{\partial u_i}(p)$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix}$ ist

$$d_u f(w) = D_u(f \circ \alpha)(\vec{w}) = w^1 \frac{\partial (f \circ \alpha)}{\partial u^1}(u) + w^2 \frac{\partial (f \circ \alpha)}{\partial u^2}(u)\,.$$

4 Geometrie auf Flächen

4.1 Die erste Fundamentalform

Bisher hatten wir die Tangentialräume an eine Fläche als eine Zuordnung $M \ni p \mapsto T_pM \subset \mathbb{R}^3$ von Vektorräumen definiert. Im folgenden wollen wir diese Vektorräume auf natürliche Weise mit einem Skalarprodukt versehen.

Definition 4.1. Es sei M eine Fläche. Die Einschränkung des Standardskalarproduktes des $\mathbb{R}^3$ auf die Tangentialräume liefert eine Abbildung I, die jedem $p \in M$ eine Bilinearform $I_p \in Bil(T_pM)$ zuordnet, d.h. für $v, w \in T_pM$ ist

$$I_p(v, w) := \langle v, w \rangle .$$

Diese Zuordnung, bzw. die Sammlung von bilinearen Abbildungen I_p, heißt *erste Fundamentalform* von M.

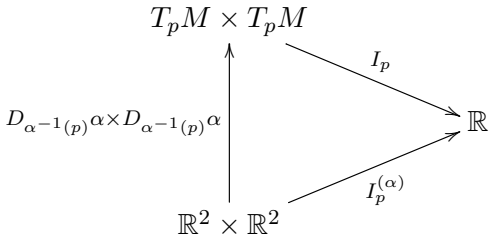
Bemerkung 4.2.

1. Die erste Fundamentalform liefert an jeder Stelle $p \in M$ ein Skalarprodukt I_p.

2. Es sei $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung von M. Dann ist die Matrixdarstellung von I_p bezüglich der Standardbasis $\{\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p)\}$ von T_pM gegeben durch

$$\begin{aligned} I_p^{(\alpha)} &= (D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha)^T D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha \\ &= \begin{pmatrix} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p) \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p) \right\rangle & \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p), \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p) \right\rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   oder



3. Wenn man den Punkt p in $\alpha(U)$ variiert, lassen sich die Einträge der Matrix $I_p^{(\alpha)}$ als Abbildungen von U nach $\mathbb{R}$ interpretieren. Wir erhalten

also eine Abbildung $I^{(\alpha)} : U \to Bil(\mathbb{R}^2) \simeq M_2\mathbb{R}$ mit

$$u \mapsto I_u^{(\alpha)} := I_{\alpha(u)}^{(\alpha)} .$$

Wir benutzen, wie üblich in der Literatur, manchmal die Bezeichnung

$$I^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} .$$

mit $E, F, G : U \to \mathbb{R}$.

Definition 4.3. 1. Eine Zuordnung μ, die jedem $p \in M$ ein k-lineares Funktional $\mu_p \in Mul_k(T_pM)$

$$\mu_p : \overbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}^{k\text{-mal}} \to \mathbb{R}$$

zuordnet, heißt *glatt*, wenn für alle glatten, tangentialen Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k : M \to \mathbb{R}^3$ die Funktion

$$p \mapsto \mu_p(X_1(p), \ldots, X_k(p))$$

glatt ist.

2. Eine Zuordnung Φ, die jedem $p \in M$ eine k-lineare Abbildung $\Phi_p \in Mul_k(T_pM, T_pM)$

$$\Phi_p : \overbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}^{k\text{-mal}} \to T_pM$$

zuordnet, heißt *glatt*, wenn für alle glatten, tangentialen Vektorfelder $X_1, \ldots, X_k : M \to \mathbb{R}^3$ das tangentiale Vektorfeld

$$p \mapsto \Phi_p(X_1(p), \ldots, X_k(p))$$

glatt ist.

Bemerkung 4.4. 1. μ und Φ sind genau dann glatt, wenn es eine Parametrisierung gibt, sodass die „Matrixdarstellungen“

$$\mu^{(\alpha)} : U \to Mul_k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}) , \quad \mu^{(\alpha)} : u \mapsto \mu_u^{(\alpha)}$$

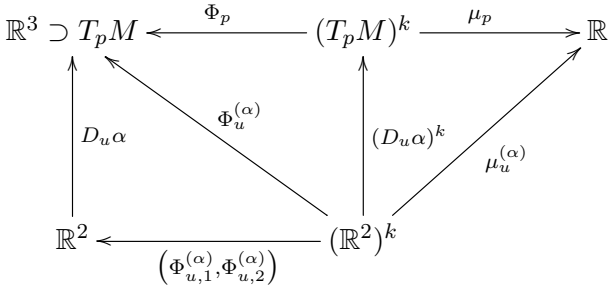
und

$$\Phi^{(\alpha)} : U \to Mul_k(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^3) , \quad \Phi^{(\alpha)} : u \mapsto \Phi_u^{(\alpha)}$$

glatte Einträge haben.

2. Für Φ ist das äquivalent dazu, dass die beiden k-linearen Funktionale $U \ni u \mapsto \Phi_{u,i}^{(\alpha)} \in Mul_k(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$ für $i = 1, 2$ glatte Einträge haben.

3. Mit $\alpha^{-1}(p) = u \in U$ ist das



Folgerung 4.5. Die erste Fundamentalform ist glatt.

Bemerkung 4.6. 1. Sind $\alpha : U \to M$ und $\beta : V \to M$ Parametrisierungen um p, und ist $\phi := \beta^{-1} \circ \alpha : U \to V$ die Übergangsabbildung, so gilt

$$I_p^{(\alpha)} = (D_{\alpha^{-1}(p)}\phi)^T \, I_p^{(\beta)} \, D_{\alpha^{-1}(p)}\phi \,,$$

oder mit $p = \alpha(u) = \beta(\phi(u))$

$$I_u^{(\alpha)} = (D_u\phi)^T \, I_{\phi(u)}^{(\beta)} \, D_u\phi \,.$$

2. Es sei $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung und $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Bewegung mit $\Phi(x) = Ax + b$. Weiter sei $I^{(\alpha)}$ die Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform von M bezüglich α. Dann ist Matrixdarstellung der ersten Fundamentalform $\hat{I}$ von $\hat{M} = \Phi(M)$ bezüglich der Parametrisierung $\hat{\alpha} = \Phi \circ \alpha : U \to \hat{M}$ gegeben durch

$$\hat{I}_{\Phi(p)}^{(\hat{\alpha})} = I_p^{(\alpha)} \,.$$

Definition 4.7. Es seien $M, \hat{M} \subset \mathbb{R}^3$ Flächen mit ersten Fundamentalformen $I, \hat{I}$.

1. Es sei $V \subset M$ eine offene Teilmenge von M und $f : V \to \hat{M}$ eine glatte Abbildung. f heißt *lokale Isometrie*, wenn für $p \in V$ und $v, w \in T_pM$

$$I_p(v, w) = \hat{I}_{f(p)}(d_pf(v), d_pf(w)) \,.$$

2. Ist $f : M \to \hat{M}$ ein Diffeomorphismus der die Eigenschaft aus 1. erfüllt, dann heißt f eine *Isometrie*.

Man sagt auch: dass M und $\hat{M}$ sind *(lokal) isometrisch*.

Bemerkung 4.8. 1. Die Gültigkeit der Identität aus Definition 4.7.1 lässt sich wie folgt überprüfen:

Wir wählen Parametrisierungen $\alpha : U \to M$ und $\hat{\alpha} : \hat{U} \to \hat{M}$, und testen statt dessen für $\hat{f} := \hat{\alpha}^{-1} \circ f \circ \alpha : U \to \hat{U}$ die Gültigkeit von

$$I_u^{(\alpha)} = (D_u \hat{f})^T \cdot \hat{I}^{(\hat{\alpha})}_{\hat{f}(u)} \cdot D_u \hat{f} \,.$$

2. Gibt es Parametrisierungen $\alpha : U \to M$ und $\hat{\alpha} : U \to \hat{M}$ auf der selben Grundmenge, sodass für die jeweiligen lokalen Darstellungsmatrizen $I^{(\alpha)}_{\alpha(u)} = \hat{I}^{(\hat{\alpha})}_{\hat{\alpha}(u)}$ gilt, dann ist die Abbildung $\hat{\alpha} \circ \alpha^{-1} : \alpha(U) \to \hat{M}$ eine lokale Isometrie.

3. Ist $f : M \to \hat{M}$ eine Isometrie und ist $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung, dann ist $\hat{\alpha} = f \circ \alpha : U \to \hat{M}$ eine Parametrisierung von $\hat{M}$. Für diese beiden Parametrisierungen gilt dann Punkt 2.

Beispiel 4.9. Gegeben seien die Flächen $M = \{(x, y, 0) \,|, x, y \in \mathbb{R}\}$ und $\hat{M} = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = R^2\}$. Weiter sei $f : M \to \hat{M}$ gegeben durch $f(x, y, 0) = \big(R \cos \frac{x}{R}, R \sin \frac{x}{R}, y\big)$. Dann ist f eine lokale Isometrie:

Wir wählen Abbildungen $\alpha : \mathbb{R}^2 \to M$ und $\hat{\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \hat{M}$ mit

$$\alpha(a, b) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \,, \quad \hat{\alpha}(t, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ t \end{pmatrix} \,.$$

mit $\alpha(\mathbb{R}^2) = M$ und $\hat{\alpha}(\mathbb{R}^2) = \hat{M}$. Diese liefern (eventuell nach Einschränkung des Definitionsbereiches) Parametrisierungen und es gilt $I^{(\alpha)}_{(a,b)} = \mathbb{1}$ und $\hat{I}^{(\hat{\alpha})}_{\hat{f}(a,b)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$. Weiter ist

$$\hat{f}(a, b) = \hat{\alpha}^{-1} \circ f(a, b, 0) = \hat{\alpha}^{-1}\big(R \cos \tfrac{a}{R}, R \sin \tfrac{a}{R}, b\big) = \big(b, \tfrac{a}{R}\big) \,,$$

also

$$D_{(a,b)} \hat{f} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix} \,.$$

Damit gilt wie notwendig

$$(D_{(a,b)}\hat{f})^T \hat{I}^{(\hat{\alpha})}_{\hat{f}(a,b)} D_{(a,b)}\hat{f} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{R} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I^{(\alpha)}_{(a,b)} .$$

Die Teilflächen $]0, 2\pi R[\times \mathbb{R} \times \{0\} \subset M$ und $\hat{M} \setminus \{(R, 0, t) \,|\, t \in \mathbb{R}\}$ sind sogar isometrisch.

Beispiel 4.10. Es seien M und $\hat{M}$ die Bilder der Flächenstücke

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 , \quad \alpha(t, s) = \begin{pmatrix} R\cosh(t)\cos(s) \\ R\sinh(t)\cos(s) \\ Rt \end{pmatrix}$$

und

$$\hat{\alpha} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 , \quad \hat{\alpha}(u, v) = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\sin(v) \\ Rv \end{pmatrix} .$$

Nach einer geschickten Umparametrisierung von $\hat{M}$ kann Bemerkung 4.8.2 verwendet werden, um zu zeigen, dass $\hat{M}$ und M lokal isometrisch sind.

4.2 Das Normalenfeld und Orientierbarkeit

Definition 4.11. Ist M eine Fläche und $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung, dann heißt die Abbildung $N^{(\alpha)} : U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$N^{(\alpha)}(u) = \frac{1}{\| \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u) \|} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u) \times \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u) \right)$$

lokales Normalenfeld von M (bzgl. der Parametrisierung α).

Bemerkung 4.12. Es seien $\alpha : U \to M$ und $\beta : V \to M$ Parametrisierungen von M um p und $\phi := \beta^{-1} \circ \alpha : U \to V$ die zugehörige Übergangsfunktion. Sind $N^{(\alpha)} : U \to \mathbb{R}^3$ und $N^{(\beta)} : V \to \mathbb{R}^3$ die zugehörigen lokalen Normalenfelder, so gilt

$$N^{(\beta)}(\phi(u)) = \operatorname{sign}\big(\det(D_u\phi)\big) N^{(\alpha)}(u) .$$

Das folgt aus $D_{\beta^{-1}(p)}\beta = D_{\beta^{-1}(p)}(\alpha \circ \alpha^{-1} \circ \beta) = D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha D_{\beta^{-1}(p)}\phi^{-1}$ oder

$$\frac{\partial \beta}{\partial v^j}(p) = \sum_{i=1}^{2} (D_{\beta^{-1}(p)}\phi^{-1})_{ij} \frac{\partial \alpha}{\partial u^i}(p) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \phi_i^{-1}}{\partial v^j}(\beta^{-1}(p)) \frac{\partial \alpha}{\partial u^i}(p) .$$

Definition 4.13. Sei $M \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche.

1. M heißt *orientierbar*, wenn es ein glattes, normales Einheitsvektorfeld gibt, d.h. eine glatte Abbildung $N : M \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$ mit $N(p) \perp T_pM$ für alle $p \in M$. Eine solche Abbildung heißt *(globales) Normalenfeld.*

2. M heißt *orientiert*, wenn M orientierbar ist und ein Normalenfeld fixiert ist.

Satz 4.14. *M ist genau dann orientierbar, wenn es eine Überdeckung von M mit Karten gibt – also einen Atlas –, sodass die Determinanten der Funktionalmatrizen der Übergangfunktionen positiv sind.*

Beweisskizze. Gibt es so einen Atlas, dann definiere für $p \in M$ das Vektorfeld N durch $N(p) := N^{(\alpha)}(\alpha^{-1}(p))$ für eine Karte $\alpha : U \to M$ um p. Dies ist unabhängig von der Wahl der Karte, wegen Bemerkung 4.12. Ist umgekehrt N gegeben und $\{\alpha_i : U_i \to M\}_{i\in\mathcal{I}}$ ein Atlas, so ändere diesen wie folgt: Ist $N \circ \alpha_i = N^{(\alpha_i)}$, so bleibt die Parametrisierung unverändert, ansonsten ersetze sie durch $\tilde{\alpha}_i$ oder $\hat{\alpha}_i$ gemäß des dritten Punktes der folgenden Bemerkung. Dann ist der neue Atlas vom gewünschten Typ. □

Bemerkung 4.15.

- Eine Orientierung von M liefert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Parametrisierungen, deren Klasseneinteilung aus genau zwei Elementen besteht: Die Menge der positiven Parametrisierungen und die Menge der negativen Parametrisierungen.

- Ein Atlas von M, der gemäß Satz 4.14 mit der gewählten Orientierung auf M verträglich ist, heißt auch ein *positiver Atlas.*

- Sei $\alpha : U \to M$ eine positive Parametrisierung. Schreiben wir $\alpha^{-1} : \alpha(U) \to \mathbb{R}^2$ als $\alpha^{-1}(p) = \big(u^1(p), u^2(p)\big)$, so sind $\hat{\alpha} : U \to M$ und $\tilde{\alpha} : U \to M$ mit

$$\hat{\alpha}^{-1}(p) = \big(-u^1(p), u^2(p)\big), \quad \tilde{\alpha}^{-1}(p) = \big(u^2(p), u^1(p)\big)$$

  negative Parametrisierungen.

- Ist eine Fläche orientiert, dann ist das Normalenfeld eindeutig bestimmt.

- Ist N das Normalenfeld und α eine positive/negative Parametrisierung, so ist

$$N(p) = N \circ \alpha(u) = \pm N^{(\alpha)}(u)$$

für $\alpha(u) = p$. Im Fall einer positiven Parametrisierung fallen unsere lokalen Bezeichnungsweisen gemäß Bemerkung 3.21 und Definition 4.11 und also zusammen.

- Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Bewegung mit $\Phi(x) = Ax + b$ und $N^{(\alpha)}$ die lokale Darstellung des Normalenfeldes auf M bezüglich einer Karte $\alpha : U \to M$. Dann ist die lokale Darstellung $\hat{N}^{(\hat{\alpha})}$ des Normalenfeldes auf der Fläche $\hat{M} = \Phi(M)$ bezüglich der Parametrisierung $\hat{\alpha} = \Phi \circ \alpha : U \to \hat{M}$ gegeben durch

$$\hat{N}^{(\hat{\alpha})}(\Phi(p)) = \det(A) A N^{(\alpha)}(p)\,.$$

Beispiel 4.16.

1. Die Sphäre S^2 ist orientierbar. Eine Orientierung ist etwa durch $N(p) = \frac{1}{\|p\|} p$ gegeben, wobei hier $p \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ als Vektor im $\mathbb{R}^3$ interpretiert wird.

2. Der Zylinder $Z = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 = R^2\}$ ist orientierbar. Eine Orientierung ist gegeben durch $N(p) = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ für $p = (x, y, z) \in Z$.

3. Es sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit $0 \in \text{Bild}(F)$ und es sei $M := F^{-1}(0)$. Dann ist M eine Fläche, wenn $\text{grad} F(p) \neq 0$ für alle $p \in M$, siehe Satz 3.29. Solche Flächen sind orientierbar, und eine Orientierung ist gegeben durch $N(p) = \frac{1}{\|\text{grad} F(p)\|} \text{grad} F(p)$. Die beiden ersten Beispiele sind von diesem Typ.

4. Das Möbiusband ist nicht orientierbar. Es sei α eine rechteckige Karte, die das Möbiusband „bis auf die Klebekante“ überdeckt. Dann gilt für ein Normalenfeld N auf diesem Bereich $N = N^{(\alpha)}$. Der Grenzwert von $N^{(\alpha)}$ gegen die beiden zu verklebenden Ränder hat jedoch entgegengesetztes Vorzeichen, sodass es aus Gründen der Stetigkeit keine globale Abbildung N geben kann.

4.3 Die Weingartenabbildung und die zweite Fundamentalform

Vorbemerkung: Im Folgenden setzen wir voraus, dass die betrachteten Flächen orientiert sind. D.h. M ist orientierbar und wir haben eine Überdeckung mit Karten, die die Eigenschaft aus Satz 4.14 haben.

Unabhängig davon sind die Ausdrücke, die wir einführen werden, ebenfalls für *Flächenstücke* definiert. Zur Wiederholung: Flächenstücke sind Abbildungen $\alpha : U \to \alpha(U) \subset \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rg}(D_u\alpha) = 2$ für alle $u \in U$ mit $U \subset \mathbb{R}^2$ offen. Diese unterscheiden sich von den Parametrisierungen einer Fläche dadurch, dass sie nicht notwendig injektiv sein müssen. Flächenstücke sind insbesondere immer orientierbar. Weiter haben Sie die Eigenschaft, dass es zu jedem Punkt $u \in U$ eine Umgebung $\tilde{U} \subset U$ gibt, sodass $\alpha(\tilde{U}) \subset \mathbb{R}^3$ eine Fläche mit globaler Parametrisierung $\alpha|_{\tilde{U}}$ ist.

Bemerkung 4.17. Es sei $N : M \to S^2$ das Normalenfeld der orientierten Fläche M. Dann ist dessen Differential durch $d_pN : T_pM \to T_{N(p)}S^2$ gegeben. Sei $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung um p. Dann ist $N^{(\alpha)} = N \circ \alpha : U \to S^2$, sodass

$$d_pN\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial u^i}(p)\Big) = \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^i}(p)\,,$$

siehe auch Bemerkung 3.33. Wir nutzen auch hier die abkürzende Schreibweise $\frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^i}(p) := \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^i}(\alpha^{-1}(p))$.

Wegen $\|N\| = 1$ ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\langle N^{(\alpha)}, N^{(\alpha)}\rangle = 2\left\langle \frac{\partial N^\alpha}{\partial u^i}, N^{(\alpha)}\right\rangle = 0$$

für $i = 1, 2$. Somit ist $N(p)$ orthogonal zum Bild

$$d_pN(T_pM) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^1}(p), \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^2}(p)\right\}.$$

Andererseits ist das orthogonale Komplement von $N(p)$ der Tangentialraum T_pM, sodass das Bild von d_pN im Tangentialraum T_pM enthalten. Wir können d_pN daher als Selbstabbildung auf T_pM interpretieren:

$$d_pN : T_pM \to T_pM\,.$$

Definition 4.18. Die Abbildung $L_p : T_pM \to T_pM$ mit

$$L_p(v) := -d_pN(v)$$

heißt *Weingartenabbildung* der Fläche M.[ix]

[ix] Julius Weingarten (1836-1910)

Bemerkung 4.19. 1. In einer lokalen Karte $\alpha : U \to M$ sei $u := \alpha^{-1}(p)$. Dann hat L_p die Matrixdarstellung $L_u^{(\alpha)}$ mit

$$D_u\alpha \circ L_u^{(\alpha)} = -D_u N^{(\alpha)}$$

wegen

$$\begin{array}{ccc} T_pM & \xrightarrow{L_p} & T_pM \\ {\scriptstyle D_u\alpha}\uparrow & \circlearrowleft & \uparrow{\scriptstyle D_u\alpha} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[L_u^{(\alpha)}]{} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

2. Die Abbildung $L : p \mapsto L_p$ ist glatt im Sinne von Definition 4.3.2, da $u \mapsto L_u^{(\alpha)}$ glatt ist.

Definition 4.20. Die Abbildung II, die jedem $p \in M$ durch

$$II_p(v, w) := I_p(L_p(v), w)$$

eine bilineare Abbildung $II_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ auf T_pM zuordnet, heißt *zweite Fundamentalform der Fläche* M.

Satz 4.21. *1. L_p ist selbstadjungiert bezüglich I_p*

2. II_p ist symmetrisch.

3. $II : p \mapsto II_p$ ist glatt im Sinne von Definition 4.3.1.

Bemerkung 4.22. Es sei $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung von M. Dann übertragen sich die Punkte aus dem Satz wie folgt.

1. Die Selbstadjungiertheit von L_p bezüglich I_p – oder äquivalent dazu die Symmetrie von II_p – ist gleichbedeutend mit der Gültigkeit von

$$\left\langle \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u^j} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^j}, \frac{\partial \alpha}{\partial u^i} \right\rangle = -\left\langle N^{(\alpha)}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^i \partial u^j} \right\rangle .$$

2. Bezüglich einer Parametrisierung benutzen wir manchmal auch hier die in der Literatur gebräuchliche Bezeichnung

$$II^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} \ell & m \\ m & n \end{pmatrix}$$

mit den glatten Funktionen $\ell, m, n : U \to \mathbb{R}$ mit

$$\ell = \left\langle N^{(\alpha)}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial (u^1)^2} \right\rangle, \quad m = \left\langle N^{(\alpha)}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^1 \partial u^2} \right\rangle, \quad n = \left\langle N^{(\alpha)}, \frac{\partial^2 \alpha}{\partial (u^2)^2} \right\rangle.$$

Damit ist dann

$$L^{(\alpha)} = (I^{(\alpha)})^{-1} II^{(\alpha)} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G\ell - Fm & Gm - Fn \\ Em - F\ell & En - Fm \end{pmatrix}.$$

3. Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Bewegung mit $\Phi(x) = Ax + b$ und $II^{(\alpha)}, L^{(\alpha)}$ seien die Matrixdarstellungen der zweiten Fundamentalform und der Weingartenabbildung auf M bezüglich einer Karte $\alpha : U \to M$. Dann sind die entsprechenden Matrixdarstellungen $\hat{II}^{(\hat{\alpha})}, \hat{L}^{(\hat{\alpha})}$ für die Fläche $\hat{M} = \Phi(M)$ bezüglich der Parametrisierung $\hat{\alpha} = \Phi \circ \alpha : U \to \hat{M}$ gegeben durch

$$\hat{II}^{(\hat{\alpha})}_{\Phi(p)} = \det(A) II^{(\alpha)}_p, \quad \hat{L}^{(\hat{\alpha})}_{\Phi(p)} = det(A) A L^{(\alpha)}_p A^T.$$

Definition/Bemerkung 4.23. Man definiert nun analog zur zweiten Fundamentalform die *dritte Fundamentalform* durch

$$III_p(v, w) := II_p(L_p(v), w) = I_p(L_p^2(v), w) = I_p(L_p(v), L_p(w)).$$

Diese ist linear abhängig von I_p und II_p, denn es gilt

$$III_p - \mathrm{Spur}(L_p) II_p + \det(L_p) I_p = 0.$$

4.4 Krümmung

Es sei $c : I \to M \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Kurve auf der Fläche M.[(x)] Dann ist $c'(t) \in T_{c(t)}M$ und mit $\mathbf{t} := \frac{c'}{\|c'\|}$ ist durch

$$\mathbf{t}'(t) = \|c'(t)\| \, \kappa(t) \, \mathbf{n}(t)$$

der Normalenvektor $\mathbf{n}(t)$ der Kurve definiert – zumindest dort, wo $\kappa(t) \neq 0$ ist. Der Vektor $\mathbf{n}$ ist in der Regel nicht tangential. Seine Normalkomponente, genauer die von $\mathbf{t}'$, ist durch

$$(\mathbf{t}'(t))_{\mathrm{norm}} = \langle \mathbf{t}'(t), N_{c(t)} \rangle N_{c(t)} = \|c'(t)\| \kappa(t) \left\langle \mathbf{n}(t), N_{c(t)} \right\rangle N_{c(t)}$$

[(x)] c ist also insbesondere eine Raumkurve. Diese muss allerdings nicht notwendigerweise eine Frenetkurve sein.

gegeben. Es bezeichne $\theta(t)$ den Winkel zwischen $\mathbf{n}(t)$ und $N_{c(t)}$, also

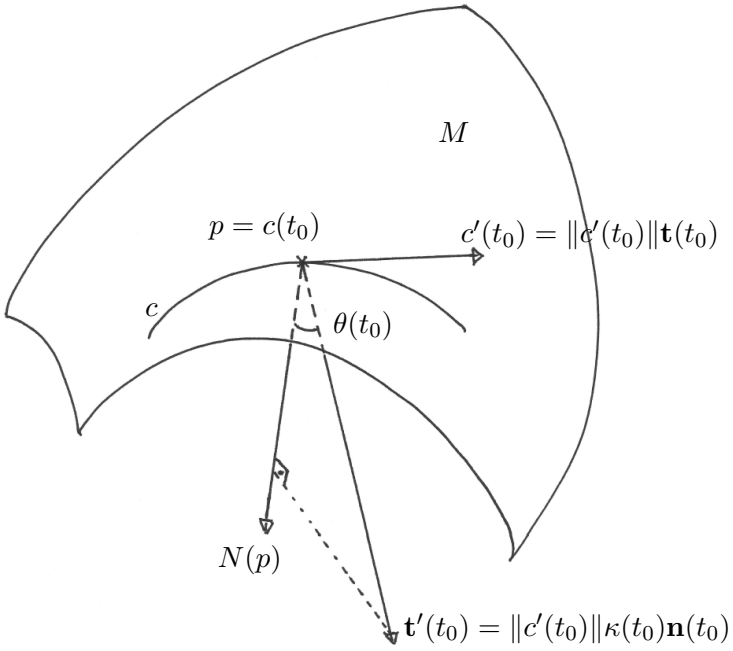
$$\cos(\theta(t)) = \langle \mathbf{n}(t), N_{c(t)} \rangle .$$

Die obige Diskussion motiviert nun die Einführung der folgenden Größe, die jedoch auch definiert ist, wenn $\kappa(t) = 0$:

$$\kappa_N(t) := \kappa(t) \cos(\theta(t)) .$$

$\kappa_N(t)$ ist invariant unter Umparametrisierung der Kurve, also insbesondere unabhängig von der Orientierung der Kurve. Sie ändert jedoch ihr Vorzeichen, wenn man die Orientierung der Fläche ändert, siehe Abbildung 13.

Abbildung 13: $\kappa_N(t)$



Bemerkung 4.24. $\kappa_N(t)$ erfüllt

$$\kappa_N(t) = \frac{I\!I_{c(t)}(c'(t), c'(t))}{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))} .$$

Dies hängt für ein festes $t_0 \in I$ nicht von der Form der Kurve c ab, sondern lediglich vom Punkt $p = c(t_0)$ und vom Tangentialvektor $c'(t_0)$ in p, d.h. $\tilde{\kappa}_N(t_0) = \kappa_N(t_0)$ für Kurven c, $\tilde{c}$ mit $c(t_0) = \tilde{c}(t_0)$ und $c'(t_0) = \tilde{c}'(t_0)$.

Die letzte Bemerkung motiviert die folgende Definition.

Definition 4.25. Es sei M ein Fläche $v \in T_pM \setminus \{0\}$ ein Tangentialvektor in $p \in M$. Dann ist die *Normalkrümmung in p in Richtung v* definiert durch

$$\kappa_N(p,v) := \frac{II_p(v,v)}{I_p(v,v)}\,.$$

Bemerkung 4.26.

- Die Berechnung von $\kappa_N(p,v)$ geschieht entweder über den obigen Quotienten oder – nach Auswahl einer Kurve c auf M mit $c(t_0) = p$ und $c'(t_0) = v$ – über $\kappa_N(p,v) = \kappa_N(t_0)$
- Eine ausgezeichnete Kurve erhält man, wenn man die Ebene $E_{p,v} := p + \operatorname{span}\{v, N_p\}$ mit M schneidet. Zumindest in einer Umgebung von p liefert das eine ebene Kurve c_N mit $c_N(0) = p$ und $c_N'(0) = v$. Diese Kurve heißt *Normalenschnitt der Fläche im Punkt p*. Diese Kurve erfüllt insbesondere $\mathbf{n}(0) = \pm N_p$, also $\theta(0) \in \{0, \pi\}$. Ist $\kappa(0) \neq 0$ die (ebene) Krümmung der Kurve c, so ist $|\kappa(0)|$ ihre Krümmung als Raumkurve. Dann gilt $|\kappa_N(p,v)| = |\kappa(0)|$ und $\cos(\theta(0))$ definiert das Vorzeichen.
- Ist c nun eine weitere ebene Kurve auf M mit $c(t_0) = p$ mit Tangente $p + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{v\}$, dann liegt diese insbesondere in der Ebene $p + \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{n}(t_0), v\}$ so sind wir in der folgenden geometrischen Situation, die wir im zweiten Punkt von Satz 4.27 formulieren.

Die obige Diskussion liefert zusammenfassend den *Satz von Meusnier*:[xi]

Satz 4.27. *1. Die Normalkrümmung $\kappa_N(p,v)$ ist unabängig von der zur Berechnung benutzten Wahl der Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$.*

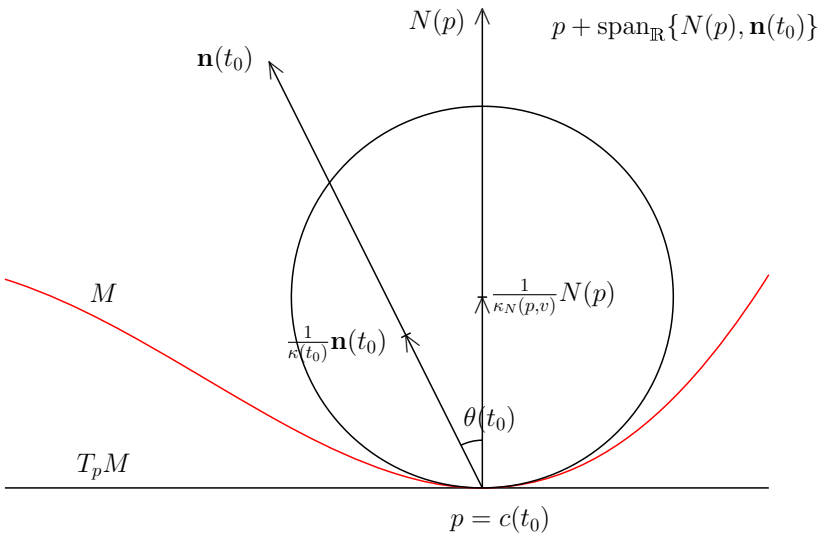
2. Die Krümmungskreise aller ebenen Kurven, die man als Schnitt von M mit einer Ebene erhält, deren einer Richtungsvektor durch $v \in T_pM$ vorgegeben ist, liegen alle auf einer Kugel. Diese Kugel hat den Mittelpunkt $p + \dfrac{1}{\kappa_N(p,v)} N(p)$ und den Radius $\dfrac{1}{\kappa_N(p,v)}$, siehe Abbildung 14.

Bemerkung 4.28. Die Abbildung $\kappa_N(p,\cdot) : T_pM \to \mathbb{R}$ erfüllt für alle $v \in T_pM$ und $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Gleichung

$$\kappa_N(p, rv) = \kappa(p,v)\,.$$

[xi] Jean Baptiste Marie Charles Meusnier de la Place (1754-1793)

Abbildung 14: Der Satz von Meusnier



Die Kurve c erfüllt $c'(t_0) = v$ und $v \in T_pM$ steht senkrecht auf der sichtbaren Ebene.

Somit kann man $\kappa_N(p, \cdot)$ als Funktion auf der kompakten Menge $S^1 \simeq \{v \in T_pM \mid \|v\|^2 = 1\}$ auffassen. Weiter ist

$$\kappa_N(p, v) = \frac{I_p(L_p(v), v)}{I_p(v, v)}$$

der *Rayleigh-Quotient* der selbstadjungierten Abbildung $L_p : T_pM \to T_pM$, siehe Definition/Satz A.21.

Folgerung 4.29. Es sei M eine Fläche und $\kappa_N(p, \cdot) : T_pM \to \mathbb{R}$ die Normalkrümmung im Punkt p. Die Eigenwerte $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ der Weingartenabbildung L_p sind durch das Maximum und das Minimum der Normalkrümmung gegeben.

Definition 4.30. Es sei M eine Fläche und L_p die Weingartenabbildung im Punkt p.

1. Die Eigenwerte $\kappa_1(p), \kappa_2(p)$ von L_p heißen *Hauptkrümmungen* von M im Punkt p.
2. Die Eigenvektoren von L_p – bzw. deren linearen Hüllen – heißen *Hauptkrümmungsrichtungen*.

3. Eine Kurve $c : I \to M$ heißt *Krümmungslinie*, wenn für alle $t \in I$ der Vektor $c'(t) \in T_{c(t)}M$ eine Hauptkrümmungsrichtung im Punkt $c(t)$ ist.

Folgerung 4.31. Eine reguläre Kurve $c : I \to M$ ist genau dann Krümmungsline, wenn es eine glatte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $(N \circ c)'(t) = f(t)c'(t)$ für alle $t \in I$.

Das folgende Beipiel ergänzt das Beispiel 3.5.

Beispiel 4.32. Es sei M die Rotationsfläche mit erzeugender Kurve $\gamma = (\rho, z) : I \to \mathbb{R}^2$, d.h.

$$\alpha(t, \varphi) = \begin{pmatrix} \rho(t)\cos\varphi \\ \rho(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix} .$$

Dann gilt

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} = \begin{pmatrix} \rho'(t)\cos\varphi \\ \rho'(t)\sin\varphi \\ z'(t) \end{pmatrix} , \quad \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -\rho(t)\sin\varphi \\ \rho(t)\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det(I_{(t,\varphi)}) = \left\| \frac{\partial\alpha}{\partial t}(t,\varphi) \times \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}(t,\varphi) \right\|^2 = \rho^2(t)\|\gamma'(t)\|^2 .$$

Die Komponenten der ersten Fundamentalform, der Normalenvektor und die Komponenten der zweiten Fundamentalform sind gegeben durch

$$\begin{aligned} &E(t,\varphi) = \|\gamma'(t)\|^2 , \quad F(t,\varphi) = 0 , \quad G(t,\varphi) = \rho^2(t) , \\ &N(t,\varphi) = \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \begin{pmatrix} -z'(t)\cos\varphi \\ -z'(t)\sin\varphi \\ \rho'(t) \end{pmatrix} , \\ &\ell(t,\varphi) = \|\gamma'(t)\|^2\kappa(t) , \quad m(t,\varphi) = 0 , \quad n(t,\varphi) = \frac{\rho(t)z'(t)}{\|\gamma'(t)\|} , \end{aligned}$$

wobei κ die Krümmung der ebenen Kurve γ bezeichnet. Damit berechnet sich die Weingartenabbildung zu

$$L_{(t,\varphi)} = \begin{pmatrix} \kappa(t) & 0 \\ 0 & \frac{z'(t)}{\rho(t)\|\gamma'(t)\|} \end{pmatrix} .$$

Insbesondere sind die Koordinatenlinien $c_{t_0}(s) = \alpha(t_0, s)$ und $c_{\varphi_0}(s) = \alpha(s, \varphi_0)$ auch Krümmungslinien.

Definition 4.33. Sei M eine Fläche und L_p die Weingartenabbildung im Punkt p.

1. Als *Gauß-Krümmung* von M in p bezeichnen wir die Determinante der Weingartenabbildung wir und schreiben
$$K(p) = \det(L_p) = \kappa_1(p)\kappa_2(p)\,.$$
2. Als *mittlere Krümmung* von M in p bezeichnen wir die Hälfte der Spur der Weingartenabbildung und wir schreiben
$$H(p) := \frac{1}{2}\mathrm{Spur}(L_p) = \frac{1}{2}(\kappa_1(p) + \kappa_2(p))\,.$$

Bemerkung 4.34.
1. Die Berechnung der Hauptkrümmungen, der Gauß-Krümmung sowie der mittleren Krümmung geschieht nach Auswahl einer Karte. Die berechneten Werte sind dann unabhängig von der gewählten Karte.[(xii)] Insbesondere sind die Funktionen $\kappa_1, \kappa_2, K, H : M \to \mathbb{R}$ glatt.
2. Es ist
$$K(p) = \frac{\det(II_p)}{\det(I_p)}\,,$$
wobei die Berechnung wieder mit Hilfe einer Karte geschieht und man I_p bzw. II_p durch die Matrizen $I^{(\alpha)}_{\alpha^{-1}(p)}$ bzw. $II^{(\alpha)}_{\alpha^{-1}(p)}$ darstellt.
3. K hängt nicht von der Wahl der Orientierung, also der Wahl eines Normalenfeldes, ab. H ändert bei Umorientierung der Fläche sein Vorzeichen.
4. Da die Weingartenabbildung bei geeigneter Wahl der Koordinatensysteme vor und nach der Anwendung einer positiven Bewegung die gleiche Matrixdarstellung hat, sind die Krümmungsgrößen unter positiven Bewegungen invariant, vergleiche Bemerkung 4.22.3. Ist also $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(x) = Ax + b$ eine positive Bewegung, dann gilt für die Krümmungsgrößen κ_1, κ_2, K, H von M und $\hat\kappa_1, \hat\kappa_2, \hat K, \hat H$ von $\hat M = \Phi(M)$
$$\kappa_1(p) = \hat\kappa_1(\Phi(p))\,, \quad \kappa_2(p) = \hat\kappa_2(\Phi(p))\,,$$
$$K(p) = \hat K(\Phi(p))\,, \quad H(p) = \hat H(\Phi(p))\,.$$

[(xii)] Ein Wechsel des Koordinatensystems liefert einen Basiswechsel im Tangentialraum und die Krümmungsgrößen sind als Invarianten einer linearen Abbildung definiert.

Allgemein gilt für die Normalkrümmungen $\kappa_N, \hat{\kappa}_N$:

$$\kappa_N(p, v) = \kappa_N(\Phi(p), Av)$$

und die Eigenvektoren der Weingartenabbildungen sind über $\hat{v} = Av$ verbunden.

Definition 4.35. Sei M eine Fläche und $p \in M$. Dann heißt p

$$\left.\begin{array}{l}\text{elliptisch}\\ \text{hyperbolisch}\\ \text{parabolisch}\\ \text{Flachpunkt}\\ \text{Nabelpunkt}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{cases} K(p) > 0 \\ K(p) < 0 \\ K(p) = 0 \text{ und } L_p \neq 0 \\ L_p = 0 \\ \kappa_1(p) = \kappa_2(p) \end{cases}$$

Insbesondere ist ein Nabelpunkt entweder elliptisch oder ein Flachpunkt und für die Weingartenabbildung gilt dann $L_p \sim \mathrm{id}$.

Bemerkung 4.36. Ist $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung der Fläche M um $p = \alpha(u_0)$, dann gilt für die Entwicklung von α um u_0

$$\begin{aligned}\alpha(u + u_0) = \alpha(u_0) &+ u^1 \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(u_0) + u^2 \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(u_0) \\ &+ \frac{1}{2}(u^1)^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial (u^1)^2}(u_0) + \frac{1}{2}(u^2)^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial (u^2)^2}(u_0) \\ &+ u^1 u^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^1 \partial u^2}(u_0) + f(u)\end{aligned}$$

mit $\lim\limits_{u \to (0,0)} \frac{f(u)}{\|u\|^2} = 0$. Betrachten wir nun das Skalarprodukt mit $N(p)$, so ergibt sich bis zur Ordnung 2

$$\left\langle N^{(\alpha)}(p), \alpha(u + u_0) - \alpha(u_0) \right\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}^T I\!I_p^{(\alpha)} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} .$$

Fassen wir nun die Tangentialebene als Koordinatenebene auf mit Koordinatenachsen $\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p)$ und $\frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p)$ und $\mathbb{R}N(p)$ als dazu senkrechte Achse, dann ist M um p in zweiter Ordnung ein Graph in diesem Koordinatensystem. Die Schnitte des Graphen mit zu der Koordinatenebene parallelen Ebenen sind die Quadriken

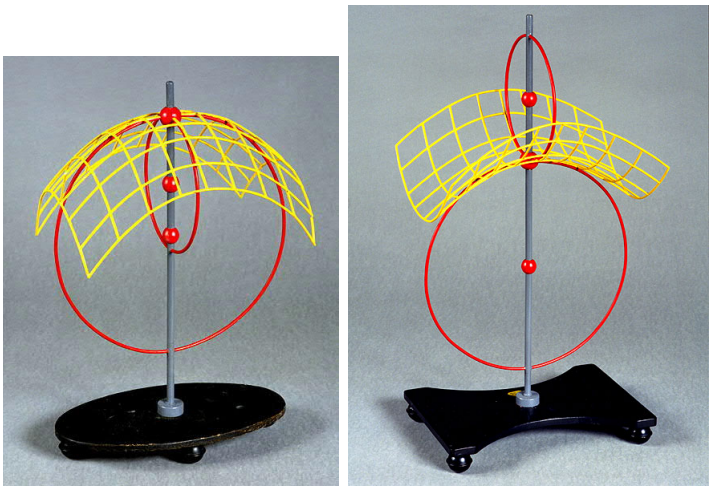
$$Q_C := \left\{ u \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}^T I\!I_p^{(\alpha)} \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = C \right\} .$$

Eine solche Quadrik heißt auch *Dupinsche Indikatrix*.

Die Quadriken Q_C sind Ellipsen bzw. Hyperbeln, wenn p elliptisch bzw. hyperbolisch ist, siehe Abbildung 15.[(xiii)]

Ist p parabolisch oder ein Flachpunkt, so lässt sich der Verlauf der Fläche lokal nicht mit Hilfe der Entwicklung zweiter Ordnung beschreiben. Vergleiche etwa die Fläche die bei Rotation der Funktion $y = 2 - x^4$ für $x \in]-1, 1[$ um die x-Achse entsteht (genauer dem Punkt zu $x = 0$), mit dem Zylinder über der ebenen Kurve $y = 1 + \sqrt{1 - x^2}$ (genauer dem Punkt zu $x = 0$).

Abbildung 15: Elliptischer bzw. hyperbolischer Punkt



Satz 4.37. *Ist M eine zusammenhängende Fläche, die nur aus Nabelpunkten besteht, so ist M Teimenge einer Sphäre oder einer Ebene.*

Beweisskizze. Es sei $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung und $p \in \alpha(U)$. Dann ist für alle $w \in T_pM$ laut Voraussetzung $d_pN(w) = \lambda(p)w$. Schreiben wir $w = w^1 \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p) + w^2 \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p)$ und setzen $(w^1, w^2) = (1, 0), (0, 1)$, dann ist das

$$\frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^1}(p) = \lambda(p)\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p)\,, \quad \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^2}(p) = \lambda(p)\frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p)\,.$$

Ableiten des ersten Ausdruck nach u^2 und des zweiten nach u^1 liefert mit dem Lemma von Schwarz $\frac{\partial \lambda}{\partial u^1}\frac{\partial \alpha}{\partial u^2} = \frac{\partial \lambda}{\partial u^2}\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}$ und wegen der linearen Un-

[(xiii)] Die Grafiken sind aus der Mathematischen Modellsammlung der Technischen Universität Dresden übernommen: http://www.math.tu-dresden.de/modellsammlung/

abhängigkeit schließlich $\frac{\partial\lambda}{\partial u^1} = \frac{\partial\lambda}{\partial u^2} = 0$. Damit ist $\lambda\big|_{\alpha(U)} = const$ und, da M zusammenhängend ist, sogar $\lambda = const$ auf ganz M.

Ist nun $\lambda = 0$, so ist $\frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^1} = \frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^2} = 0$ also $N^{(\alpha)} = N_0 = const$ und wie oben sogar $N = N_0$. Damit ist dann $M \subset p + \{x \,|\, \langle x, N_0\rangle = 0\}$.

Ist $\lambda \neq 0$, dann hat die Abbildung $X = \mathrm{id}_M - \frac{1}{\lambda}N$ die lokale Form $X^{(\alpha)} = \alpha - \frac{1}{\lambda}N^{(\alpha)}$ und es gilt $\frac{\partial X^{(\alpha)}}{\partial u^j} = \frac{\partial\alpha}{\partial u^j} + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial N^{(\alpha)}}{\partial u^j} = 0$ für $j = 1, 2$. Nun folgt $X^{(\alpha)} = X_0 = const$ und wieder wie oben sogar $X = X_0$. Damit ist dann $\|p - X_0\|^2 = \frac{1}{\lambda^2}$ also $M \subset S^2_{\frac{1}{\lambda}}(X_0)$. □ □

Krümmungslinien waren definiert, als diejenigen Kurven entlang derer κ_N maximal bzw. minimal ist. Analog dazu schauen wir uns als nächstes Kurven an, entlang derer κ_N verschwindet.

Definition 4.38. Es sei M eine Fläche.

1. $v \in T_pM$ heißt *Asymptotenrichtung*, wenn $\kappa_N(p, v) = 0$, also
$$II_p(v, v) = I_p(L_p(v), v) = 0\,.$$
2. Eine Kurve $c : I \to M$ heißt *Asymptotenlinie*, wenn $c'(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in I$ eine Asymptotenrichtung ist.

4.5 Beispiel: Regelflächen

Definition 4.39. Es sei $c : I \to \mathbb{R}^3$ eine Kurve und $v : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein Vektorfeld. Wenn durch die Abbildung
$$\alpha : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,, \qquad \alpha(t, s) := c(t) + sv(t)$$
ein parametrisiertes Flächenstück definiert ist, so heißt dieses *Regelfläche*. Die Kurve c heißt *Leitkurve* und die Gerade $E_t := \mathbb{R} \cdot v(t)$ heißt *Erzeugende*.

Bemerkung 4.40. Die Abbildung α definiert lokal um den Punkt $\alpha(s, t)$ ein Fächenstück, wenn
$$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}(t, s) \times \frac{\partial\alpha}{\partial s}(t, s)\right\| = \big\|\big(c'(t) + sv'(t)\big) \times v(t)\big\| \neq 0\,.$$

Beispiel 4.41. 1. *Zylinder:* $v(t) = v_0$.

Z.B. liefert $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also

$$\alpha(t,s) = \begin{pmatrix} s + \cos t \\ \sin t \\ s \end{pmatrix},$$

einen schiefen Zylinder über der Kreislinie in der xy-Ebene, siehe Abbildung 16(a).

2. *Kegel:* $v(t) = c(t) - v_0$.

   Z.B. liefert $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, also

   $$\alpha(t,s) = \begin{pmatrix} (s+1)\cos t \\ (s+1)sint \\ -s \end{pmatrix},$$

   einen Doppelkegel mit Spitze im Punkt $(0,0,1)$, siehe Abbildung 16(b). In der Spitze zum Parameter $s = -1$ gilt insbesondere $(c' + sv') \times v = 0$.

3. *Tangentenfläche:* $v(t) = c'(t)$.

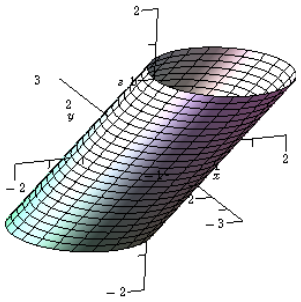
   Z.B. liefert die Schraubenlinie $c(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$, also

   $$\alpha(t,s) = \begin{pmatrix} \cos t - s\sin t \\ \sin t + s\cos t \\ t + s \end{pmatrix},$$

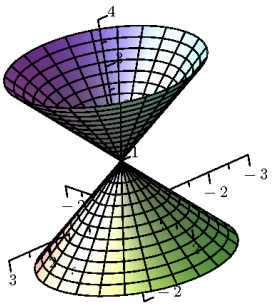
   die so genannte Schraubtorse, siehe Abbildung 16(c). Für diese Abbildung gilt $(c' + sv') \times v = sv' \times v$, sodass entlang der Leitkurve, Parameter $s = 0$, das Bild von α keine Fläche ist. Dies ist eine Eigenschaft, die für alle Tangentenflächen gilt.

Abbildung 16: Spezielle Regelflächen

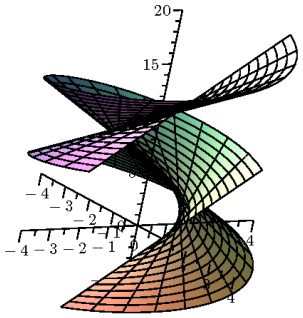
(a) Zylinder



(b) Kegel



(c) Tangentenfläche



Bemerkung 4.42. 1. Das Bild von α muss nicht unbedingt eine Fläche sein. Auch wenn das Bild von α eine Fläche ist, dann muss α keine Parametrisierung der Fläche sein.

Zum Beispiel liefert

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \alpha(t,s) = \begin{pmatrix} \left(1 + s\cos(\frac{t}{2})\right)\cos(t) \\ \left(1 + s\cos(\frac{t}{2})\right)\sin(t) \\ s\sin(\frac{t}{2}) \end{pmatrix}$$

ein parametrisiertes Flächenstück, also eine Regelfläche. Das Bild ist jedoch keine Fläche, da es Selbstdurchdringungen hat. Die Einschränkung des Definitionsbereiches auf $\mathbb{R} \times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ liefert als Bild eine Fläche, nämlich das Möbiusband. Die Einschränkung auf $]0,2\pi[\times]-\frac{1}{2},\frac{1}{2}[$ liefert sogar eine Parametrisierung eines Teils des Möbiusbandes.

2. In speziellen Fällen erlauben wir singuläre Punkte, das sind Punkte in denen $(c' + sv') \times v = 0$ ist. Siehe z.B. die Spitze des Doppelkegels im

obigen Beispiel 2 oder die Leitkurve als Teilmenge der Tangentenfläche im obigen Beispiel 3.

3. Eine Umparametrisierung der Leitkurve ist eine zulässige Umparametrisierung der Fläche. Also darf man c – falls regulär – als auf Bogenlänge parametrisiert annehmen.

4. Die Umparametrisierung $(t, s) \mapsto (t, \|v(t)\|s)$ ist eine zulässige Umparametrisierung der Fläche. Also darf man v als normiert annehmen, sodass $v : I \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Satz 4.43. *Es sei $\alpha(t, s) = c(t) + sv(t)$ mit $\|v(t)\| = 1$ die Parametrisierung einer Regelfläche. Dann ist die Leitkurve nicht eindeutig, aber es gibt ausgezeichnete Leitkurven:*

1. *Es gibt Leitkurven $\tilde{c}$, für die $\tilde{c}'(t) \perp v(t)$ ist.*

   Sei dazu
   $$\tilde{c}(t) := c(t) - \left(\int_{t_0}^{t} \langle c'(\tau), v(\tau) \rangle d\tau \right) v(t) \,.$$

   Eine Änderung von t_0 liefert dann eine parallel verschobene Kurve.

2. *Ist $\|v'(t)\| \neq 0$ so gibt eine Leitkurve $\hat{c}$, für die $\hat{c}'(t) \perp v'(t)$ ist. Diese ist eindeutig und unabhängig von der Leitkurve c mit der man gestartet ist. Diese nennen wir* ausgezeichnete Leitkurve.

   Sei dazu
   $$\hat{c}(t) = c(t) - \frac{\langle c'(t), v'(t) \rangle}{\|v'(t)\|^2} v(t) \,.$$

Satz 4.44. *1. Die erste Fundamentalform einer Regelfläche erfüllt*

$$\begin{aligned} E &= \|c'\|^2 + s^2 \|v'\|^2 + 2s\langle c', v' \rangle \,, \\ F &= \langle c', v \rangle + s\langle v', v \rangle \,, \\ G &= \|v\|^2 \,. \end{aligned}$$

2. *Die zweite Fundamentalform einer Regelfläche erfüllt*

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{\det(c'', c', v) + s\big(\det(v'', c', v) + \det(c'', v', v)\big) + s^2 \det(v'', v', v)}{\sqrt{EG - F^2}} \,, \\ m &= \frac{\det(v', c', v)}{\sqrt{EG - F^2}} \,, \\ n &= 0 \,. \end{aligned}$$

3. Für die Gauß-Krümmung einer Regelfläche gilt damit

$$K = -\Big(\frac{\det(c', v, v')}{EG - F^2}\Big)^2 \leq 0\,,$$

sodass eine Regelfläche keine elliptischen Punkte hat.

Bemerkung 4.45. Es sei die Regelfläche mit Hilfe der ausgezeichneten Leitkurve parametrisiert und gelte $\|v\| = 1$. Dann ist $c' \perp v'$ und $v \perp v'$, also $c' \times v \,\big|\, v'$. Damit gibt es eine Funktion η, die duch $c'(t) \times v(t) = \eta(t)v'(t)$ definiert ist. In Termen dieser Funktion ist

$$\det(I(t,s)) = (\eta^2(t) + s^2)\|v'(t)\|^2 \quad \text{und} \quad m = \frac{\eta(t)\,\|v'(t)\|}{\sqrt{\eta^2(t) + s^2}}\,,$$

also

$$K(t,s) = -\frac{\eta^2(t)}{(\eta^2(t) + s^2)^2}\,.$$

Insbesondere ist η konstant entlang der Erzeugenden E_t.

Die Fläche ist singlulär – d.h. $\frac{\partial\alpha}{\partial t}$ und $\frac{\partial\alpha}{\partial s}$ sind linear abhängig – genau in den Punkten mit $\eta^2(t) = s^2 = 0$, also in den Punkten $c(t)$ der Leitkurve mit $\eta(t) = 0$.

Insbesondere ist also $K = 0$ genau auf den Erzeugenden, die durch diese singulären Punkte gehen.

Definition 4.46.
1. Eine Erzeugende E_t einer Regelfläche heißt *torsal*, wenn die Tangentialfläche entlang der Erzeugenden konstant ist.
2. Eine Regelfläche heißt *Torse*, wenn alle Erzeugenden torsal sind.

Satz 4.47. *Eine Erzeugende E_t einer Regelfläche ist genau dann torsal, wenn $K(t,s) = 0$ für alle s.*

Eine Regelfläche ist genau dann eine Torse, wenn $K = 0$, d.h. wenn die Menge $\{c'(t), v(t), v'(t)\}$ stets linear abhängig ist.

Der letzte Punkt liefert uns nun die Möglichkeit zur Klassifikation:

Bemerkung 4.48. Die Standard-Torsen sind

1. *Zylinder:* $v(t), v'(t)$ linear abhängig

2. *Kegel:* $v(t), v'(t)$ linear unabhängig und $c'(t) = \alpha(t)v(t) + \beta(t)v'(t)$ mit $\alpha(t) = \beta'(t)$.

3. *Tangentenfläche:* $v(t), v'(t)$ linear unabhängig und $c'(t) = \alpha(t)v(t) + \beta(t)v'(t)$ mit $\alpha(t) - \beta'(t) \neq 0$.

Es gibt Torsen, die Mischformen aus den obigen Standardbeispielen sind.

5 Innere Geometrie von Flächen

5.1 Eigenschaften der Richtungsableitung von Vektorfeldern

Es sei M eine Fläche und $Y : M \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld. Bezüglich einer Parametrisierung $\alpha : U \to M$ hat seine lokale Variante $Y^{(\alpha)} = Y \circ \alpha$ die Form

$$Y^{(\alpha)} = Y^1 \frac{\partial \alpha}{\partial u^1} + Y^2 \frac{\partial \alpha}{\partial u^2} + Y^3 N^{(\alpha)}$$

mit drei lokalen Funktionen $Y^i : U \to \mathbb{R}$.

Definition 5.1. Es sei M eine Fläche, $p \in M$ und $v \in T_pM$ ein Tangentialvektor, dann ist die Richtungsableitung von Y in Richtung v durch

$$D_vY := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (Y \circ c)(t)$$

definiert. Hierbei ist $c :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ eine Kurve mit $c(0) = p$ und $c'(0) = v$. Die Richtungsableitung ist unabhängig von der Wahl der Kurve c mit den angegeben Eigenschaften.

Ist v in der Form $v = D_{\alpha^{-1}(p)}\alpha\binom{v^1}{v^2} = v^1 \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(p) + v^2 \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(p)$ gegeben und ist $p = \alpha(u_0)$, so berechnet sich die Richtungsableitung von Y in Richtung v gemäß

$$\begin{aligned} D_vY &= DY^{(\alpha)}(u_0; \tbinom{v^1}{v^2}) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Y^{(\alpha)}(u_0^1 + tv^1, u_0^2 + tv^2) \\ &= \sum_{i=1}^{2} v^i \left(\frac{\partial Y^1}{\partial u^i} \frac{\partial \alpha}{\partial u^1} + \frac{\partial Y^2}{\partial u^i} \frac{\partial \alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial Y^3}{\partial u^i} N \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} v^i \left(Y^1 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^i \partial u^1} + Y^2 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^i \partial u^2} + Y^3 \frac{\partial N}{\partial u^i} \right) , \end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite alles als in p bzw. $u_0 = \alpha^{-1}(p)$ ausgewertet zu verstehen ist. Die Normalenkomponente dieser Ableitung ist dann[(xiv)]

$$\langle D_vY, N \rangle = D_vY^3 + II(v, Y^{\text{tang}})$$

[(xiv)] Hier und im Folgenden bezeichnen wir für eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ ihre Richtungsableitung in Richtung v ebenfalls mit D_vf.

wobei $Y^{\text{tang}} = Y - \langle Y, N\rangle N$ hier und im Folgenden die Tangentialkomponente des Vektorfeldes Y bezeichnet.

Insgesamt liefert das die folgende Bemerkung.

Bemerkung 5.2. 1. Die Richtungsableitung eines Vektorfeldes Y auf M in Richtung $v \in T_pM$ berechnet sich gemäß

$$\begin{aligned} D_vY = &\sum_{i=1}^{2} D_vY^i \frac{\partial \alpha}{\partial u^i} + \sum_{i,j=1}^{2} Y^i v^j \Big(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^i \partial u^j}\Big)^{\text{tang}} + \sum_{i=1}^{2} Y^3 v^i \frac{\partial N}{\partial u^i} \\ &+ \big(D_vY^3 + II(v, Y^{\text{tang}})\big)N \end{aligned}$$

2. Ist Y selbst tangential so reduziert sich das zu

$$D_vY = \sum_{i=1}^{2} D_vY^i \frac{\partial \alpha}{\partial u^i} + \sum_{i,j=1}^{2} Y^i v^j \Big(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^i \partial u^j}\Big)^{\text{tang}} + II(v, Y)N$$

3. Ist Y tangential, so nicht unbedingt D_vY.

Bemerkung 5.3. 1. Ist X ein tangentiales Vektorfeld und Y ein Vektorfeld auf M, so bezeichnet D_XY das Vektorfeld mit

$$D_XY(p) := D_{X(p)}Y\,.$$

2. Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, X_1, X_2 tangentiale Vektorfelder auf M und Y_1, Y_2 Vektorfelder auf M. Dann gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} D_{X_1+X_2}Y &= D_{X_1}Y + D_{X_2}Y\,, \\ D_X(Y_1 + Y_2) &= D_XY_1 + D_XY_2\,, \\ D_{fX}Y &= fD_XY\,, \\ D_X(fY) &= (D_Xf)Y + fD_XY \end{aligned}$$

3. Es ist $D_{\frac{\partial \alpha}{\partial u^i}} \dfrac{\partial \alpha}{\partial u^j} = \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial u^i \partial u^j}$.

4. Sind Y, Z Vektorfelder und X ein tangentiales Vektorfeld auf M, so gilt

$$D_X\langle Y, Z\rangle = \langle D_XY, Z\rangle + \langle Y, D_XZ\rangle\,.$$

Definition 5.4. Sind X und Y tangentiale Vektorfelder auf M, dann bezeichnen wir den Ausdruck

$$[X,Y] = D_X Y - D_Y X$$

als *Kommutator von X und Y*.

Satz 5.5 (Eigenschaften des Kommutators)**.** *1. Sind X, Y tangentiale Vektorfelder und $f : M \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion, so ist*

$$\begin{aligned}[X,Y] &= -[Y,X]\,,\\ [fX,Y] &= f[X,Y] - (D_Y f)X\,.\end{aligned}$$

2. Es sei α eine Parametrisierung der Fläche M. Dann gilt für die lokalen Basisfelder

$$\left[\frac{\partial\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial\alpha}{\partial u^j}\right] = 0\,.$$

3. Sind X und Y tangential, so auch der Kommutator $[X,Y]$. Sind nämlich $Y = Y^1\dfrac{\partial\alpha}{\partial u^1} + Y^2\dfrac{\partial\alpha}{\partial u^2}$ und $X = X^1\dfrac{\partial\alpha}{\partial u^1} + X^2\dfrac{\partial\alpha}{\partial u^2}$, so ist

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^{2}\left(X^i\frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i\frac{\partial X^j}{\partial u^i}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial u^j}\,.$$

4. Sind X, Y und Z tangentiale Vektorfelder, dann gilt

$$[[X,Y],Z] + [[Z,X],Y] + [[Y,Z],X] = 0$$

5.2 Tensorialität, Metrik und 1-Formen

Wir haben uns schon in Abschnitt 4, genauer in Definition 4.3 und Bemerkung 4.4, mit Abbildungen beschäftigt, die eine spezielle Gestalt haben.

Definition 5.6. 1. Wir sagen, eine Zuordnung $M \ni p \mapsto \Phi_p$ ist vom Typ $(k,0)$, wenn es eine festes k gibt, sodass für jedes $p \in M$ die Abbildung Φ_p von der Form

$$\Phi_p : \overbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}^{k\text{-mal}} \to \mathbb{R}$$

ist, sie außerdem $\mathbb{R}$-linear in jedem ihrer k Argumente und glatt ist.

2. Wir sagen, die Zuordnung $p \mapsto \Phi_p$ ist vom Typ $(k,1)$, wenn es ein k gibt, sodass für alle $p \in M$ die Abbildung Φ_p von der Form

$$\Phi_p : \overbrace{T_pM \times \ldots \times T_pM}^{k\text{-mal}} \to T_pM$$

und $\mathbb{R}$-linear in jedem ihrer k Argumente ist.

3. Wir lassen $k = 0$ zu und ersetzen in diesem Fall den Definitionsbereich durch M.

4. Die Menge aller Abbildungen auf M vom Typ $(k,0)$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_0^k(M)$, die vom Typ $(k,1)$ mit $\mathcal{T}_1^k(M)$. Insbesondere ist $\mathcal{T}_0^0 = C^\infty(M)$ die Menge der glatten Funktionen auf M und $\mathcal{T}_1^0(M) = \mathfrak{X}(M)$ die Menge der tangentialen Vektorfelder an M, siehe auch Definition 5.16 und Bemerkung 5.17.

Satz 5.7. *Es bezeichne $\widehat{\mathcal{T}}_\epsilon^k(M)$ die Menge aller in jedem Argument $C^\infty(M)$-linearen Abbildungen*

$$\widehat{\Phi} : \overbrace{\mathfrak{X}(M) \times \ldots \mathfrak{X}(M)}^{k\text{-mal}} \to \begin{cases} C^\infty(M) & \text{falls } \epsilon = 0 \\ \mathfrak{X}(M) & \text{falls } \epsilon = 1 \end{cases}.$$

Dann gibt es eine Bijektion

$$\mathcal{T}_\epsilon^k(M) \simeq \widehat{\mathcal{T}}_\epsilon^k(M)\,.$$

Beweisansatz: 1) Haben wir eine Abbildung $\Phi \in \mathcal{T}_\epsilon^k(M)$ so definieren wir $\widehat{\Phi} \in \widehat{\mathcal{T}}_\epsilon^k(M)$ für $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ durch

$$\widehat{\Phi}(X_1, \ldots, X_k)(p) := \Phi_p(X_1(p), \ldots, X_k(p))\,.$$

2) Ist $\widehat{\Phi} \in \mathcal{T}_\epsilon^k(M)$ gegeben dann definiere $\Phi \in \mathcal{T}_\epsilon^k(M)$ für $v_1, \ldots, v_k \in T_pM$ durch

$$\Phi_p(v_1, \ldots, v_k) := \widehat{\Phi}(X_1, \ldots, X_k)(p)$$

mit $X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ mit $X_j(p) = v_j$ für alle $1 \leq j \leq k$.
Dazu müssen wir nun noch zeigen, dass die rechte Seite der Definition nicht von der Wahl der Vektorfelder abhängt. Mit anderen Worten, die Auswertung $\widehat{\Phi}(X_1, \ldots X_k)$ einer Abbildung $\widehat{\Phi} \in \widehat{\mathcal{T}}_\epsilon^k(M)$ in $p \in M$ hängt nur von den Werten der Vektorfelder im Punkt p ab. Der Beweis geschieht ebenfalls in zwei Schritten: i) Zeige zunächst, dass $\widehat{\Phi}(X_1, \ldots, X_k)$ auf einer Menge $U \subset M$ verschwindet, wenn eines der Vektorfelder dort verschwindet. ii) Zeige dann, dass $\widehat{\Phi}(X_1, \ldots, X_k)(p)$ verschwindet, wenn eines der Vektorfelder in p verschwindet.

Definition/Bemerkung 5.8 (Metrik auf einer Fläche)**.** • Es sei g eine Abbildung, die jedem $p \in M$ ein Skalarprodukt auf T_pM zuordnet. Dann ist insbesondere $g \in \mathcal{T}_0^2(M)$. Wir identifizieren g mit Hilfe des vorigen Satzes mit der zugehörigen C^∞-linearen Abbildung[(xv)] $g : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$.

Solch eine Abbildung g nennen wir *Metrik auf der Fläche* M.

- Eine Abbildung $\Phi \in \mathcal{T}_0^2(M)$ heißt *nicht-entartet*, wenn Φ_p nicht-entartet ist für alle p, d.h: ist $\Phi_p(v, w) = 0$ für alle $w \in T_pM$ so ist $v = 0$
- Äquivalent dazu gilt: Φ ist nicht-entartet, wenn $\Phi(X, Y) = 0$ für alle $Y \in \mathfrak{X}(M)$ so ist $X(p) = 0$ für alle $p \in M$.

Beispiel 5.9. 1. Die erste Fundamentalform von M ist eine Metrik auf der Fläche.

2. Es sei M die Fläche die als Nullstellengebilde der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 1$$

gegeben ist. Dann ist die Einschränkung der Bilinearform $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ auf die Tangentialräume von M eine Metrik auf M.

Definition 5.10. Die Menge $\Omega^1(M) := \mathcal{T}_0^1(M)$ heißt die Menge der 1-Formen auf M.

Satz 5.11. *1. Es sei $\Psi \in \mathcal{T}_0^2(M)$ nicht-entartet und $\omega \in \Omega^1(M)$. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $X_\omega \in X(M)$ mit*

$$\Psi(X_\omega, Y) = \omega(Y)$$

für alle $Y \in \mathfrak{X}(M)$. Ψ definiert einen C^∞-linearen Isomorphismus zwischen $\mathfrak{X}(M)$ und $\Omega^1(M)$.

2. Es sei $\Psi \in \mathcal{T}_0^2(M)$ nicht-entartet. Dann gilt die folgende unmittelbare Verallgemeinerung der vorigen Aussage:

Ψ definiert einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{T}_1^k(M)$ und $\mathcal{T}_0^{k+1}(M)$.

[(xv)] Wir werden ab jetzt die Abbildung $\Phi \in \mathcal{T}_\epsilon^k(M)$ und ihren Partner in $\widehat{\mathcal{T}}_\epsilon^k(M)$ mit dem selben Symbol bezeichnen. Außerdem verzichten wir auch bei den Mengen selbst auf den Akzent.

Beweisansatz: Da in der definierenden Gleichung beide Seiten nur von dem Wert von Y im Punkt p abhängen, schauen wir uns punktweise auf allen Tangentialräumen die Gleichung $\Psi_p(v_p, Y(p)) = \omega_p(Y(p))$ an. Hier ist dann ω_p ein Element das Dualraums $(T_pM)^*$ von T_pM und Ψ_p eine nicht-entartete Bilinearform auf T_pM. Es greift nun die folgende Aussage der linearen Algebra: Eine nicht-entartete Bilinearform auf einem Vektorraum V liefert einen Isomorphismus zwischen V und V^*. Dann ist $v_p \in T_pM$ der Vektor, der mit Hilfe des durch Ψ_p gegebenen Isomorphismus dem Element ω_p des Dualraums zugeordnet wird. Die Zuordnung $X_\omega : p \mapsto X_\omega(p) := v_p$ ist dann ein glattes Vektorfeld.

Bemerkung 5.12. Es sei $\omega \in \Omega^1(M)$ und $\Psi \in \mathcal{T}_0^2(M)$ nicht-entartet. Weiter sei $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung mit lokalen Vektorfeldern $e_1 := \frac{\partial \alpha}{\partial u^1}, e_2 := \frac{\partial \alpha}{\partial u^2}$, die punktweise die kanonische Basis von T_pM liefern.

Wir betrachten die Funktionen $\omega_1 := \omega(e_1)$ und $\omega_2 := \omega(e_2)$ und die Matrix $\Psi^{(\alpha)}$ deren Einträge die Funktionen $\Psi_{ij}^{(\alpha)} = \Psi(e_i, e_j)$ sind. Insbesondere ist Ψ nicht-entartet, wenn diese Matrix in jedem Punkt regulär ist. Dann sind die Komponenten des lokalen Vektorfeldes $X_\omega^{(\alpha)} = X^1 e_1 + X^2 e_2$ gegeben durch

$$\left(X^1, X^2\right) = \left(\omega_1, \omega_2\right) \left(\Psi^{(\alpha)}\right)^{-1}$$

5.3 Die kovariante Ableitung, Zusammenhang und Krümmung

Definition 5.13. Es sei M eine Fläche, Y ein Vektorfeld und X ein tangentiales Vektorfeld auf M. Der Ausdruck

$$\nabla_X Y := (D_X Y)^{\text{tang}}$$

heißt die *kovariante Ableitung von Y in Richtung X.*

Bemerkung 5.14. Ist Y ebenfalls tangential, so gilt

$$\nabla_X Y = D_X Y - I\!I(X, Y)N\,.$$

Satz 5.15 (Eigenschaften der kovarianten Ableitung)**.** *Es sei $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, Y, Y_1, Y_2 Vektorfelder und X, X_1, X_2 tangentiale Vektorfelder auf M. Dann gilt*

1. $\nabla_{fX_1+X_2} Y = f\nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$ *„C^∞-Linearität im ersten Argument“.*

2. $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$ *„Additivität im zweiten Argument“.*

3. $\nabla_X(fY) = (D_X f)Y + f\nabla_X Y$ *„Leibnizregel bzw. Produktregel im zweiten Argument“.*[(xvi)]

4. *Wegen 2. und 3. ist* $\nabla_X Y$ $\mathbb{R}$*-linear im zweiten Argument.*

5. *Wegen* $dN(v) \in T_pM$ *für* $v \in T_pM$ *ist* $D_X N = dN(X)$ *tangential, also*

$$\nabla_X N = D_X N = -L(X)\,.$$

6. *Sind* Y_1, Y_2 *tangential so gilt*

$$D_X\big(I(Y_1, Y_2)\big) = I(\nabla_X Y_1, Y_2) + I(Y_1, \nabla_X Y_2)$$

„Verträglichkeit mit der ersten Fundamentalform“.

7. *Sind* X, Y *tangential so ist* $[X, Y]$ *ebenfalls tangential und es gilt*

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

„Torsionsfreiheit“.

Definition 5.16. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{X}(M)$ die Menge der tangentialen Vektorfelder auf M.

Bemerkung 5.17. 1. $\mathfrak{X}(M)$ ist ein C^∞*-Modul.* Das heißt:

   (a) Die tangentialen Vektorfelder mit der Addition bilden eine Gruppe,

   (b) Multipliziert man ein tangentiales Vektorfeld mit einer Funktion, so erhält man wieder ein tangentiales Vektorfeld.

   Insbesondere ist $\mathfrak{X}(M)$ ein reeller Vektorraum.

2. Auf $\mathfrak{X}(M)$ ist durch $[X, Y]$ eine schiefsymmetrische Multiplikation erklärt. Diese Abbildung ist $\mathbb{R}$-bilinear und das macht $\mathfrak{X}(M)$ zu einer $\mathbb{R}$*-Algebra.*

3. Gemäß Satz 5.5 gilt für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ die Identität $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$. Durch diese zusätzliche Eigenschaft wird $\mathfrak{X}(M)$ zu einer so genannten *Lie-Algebra.*[(xvii)]

[(xvi)] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)
[(xvii)] Marius Sophus Lie (1842-1899)

Definition 5.18. Eine Abbildung

$$\widehat{\nabla} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)\,, \qquad \widehat{\nabla} : (X, Y) \mapsto \widehat{\nabla}_X Y\,,$$

mit den Eigenschaften 1.,2. und 3. aus Satz 5.15 heißt Zusammenhang auf der Fläche M.

Satz 5.19. *Es sei M eine Fläche und g eine Metrik auf M. Dann gibt es genau einen Zusammenhang ∇^g auf M, der mit g verträglich und torsionsfrei ist, d.h.*

$$\begin{aligned} D_X\big(g(Y_1, Y_2)\big) &= g(\nabla^g_X Y_1, Y_2) + g(Y_1, \nabla^g_X Y_2)\,, \\ [X, Y] &= \nabla^g_X Y - \nabla^g_Y X\,. \end{aligned}$$

Dieser heißt Levi-Civita-Zusammenhang von (M, g).[xviii]

Beweisskizze. Man zeigt, dass, wenn dieser Zusammenhang existiert, er die so genannte *Koszul-Formel*[xix] erfüllen muss:

$$\begin{aligned} g(\nabla^g_X Y, Z) = \frac{1}{2}\Big(& D_X(g(Y, Z)) + D_Y(g(X, Z)) - D_Z(g(X, Y)) \\ & - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) - g(Z, [Y, X])\Big) \end{aligned} \tag{1}$$

Wir bezeichnen die Funktion auf der rechten Seite mit $\omega_{XY}(Z)$ und sehen, dass die Zuordnung $\mathfrak{X}(M) \ni Z \mapsto \omega_{XY}(Z) \in C^\infty(M)$ C^∞-linear ist und somit $\omega_{XY} \in \Omega^1(M)$. Mit Satz 5.11 sei nun $\nabla^g_X Y$ das eindeutig definierte Vektorfeld, das mit Hilfe der Metrik g der 1-Form ω_{XY} zugeordnet ist. Nun muss man noch nachweisen, dass die so definierte Abbildung $(X, Y) \mapsto \nabla^g_X Y$ tatsächlich die Eigenschaften 1., 2. und 3. aus Satz 5.15 hat. □

Definition 5.20. Es sei M eine Fläche und $\widehat{\nabla}$ ein Zusammenhang auf M. Dann heißt $R^{\widehat{\nabla}} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ mit

$$R^{\widehat{\nabla}}(X, Y, Z) := \widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y Z - \widehat{\nabla}_Y \widehat{\nabla}_X Z - \widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

der *Krümmungstensor* des Zusammenhangs $\widehat{\nabla}$.

Satz 5.21. *Es sei M eine Fläche mit Zusammenhang $\widehat{\nabla}$. Dann ist $R^{\widehat{\nabla}} \in \mathcal{T}^3_1(M)$, also C^∞-linear in jedem Argument.*

[xviii] Tullio Levi-Civita (1873-1941)
[xix] Jean-Louis Koszul (*1921)

Beispiel 5.22. 1. Es sei M eine Fläche. Dann ist die kovariante Ableitung ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang der Fläche bezüglich der ersten Fundamentalform der Metrik, siehe Definition 5.13 und Satz 5.15.

2. Fassen wir die kovarianten Ableitung der Fläche in diesem Sinne als Zusammenhang auf, so können wir auch ihre Krümmung definieren. Diese bezeichnen wir einfach mit R und sprechen von der Krümmung der kovarianten Ableitung.

Bemerkung 5.23. 1. Es sei M eine Fläche und $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung und es seien $Y = \sum_i Y^i \frac{\partial \alpha}{\partial u^i}$ und $X = \sum_i X^i \frac{\partial \alpha}{\partial u^i}$ die lokalen Darstellungen der tangentialen Vektorfelder Y und X. Dann ist

$$\nabla_X Y = \sum_{ij} X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial u^i} + \sum_k \Gamma_{ik}^j Y^k \right) \frac{\partial \alpha}{\partial u^j}$$

wobei die $\Gamma_{ik}^j : U \to \mathbb{R}$ als Koeffizienten der kovarianten Ableitung der Basisvektoren definiert sind:

$$\nabla_{\frac{\partial \alpha}{\partial u^i}} \frac{\partial \alpha}{\partial u^k} = \sum_j \Gamma_{ik}^j \frac{\partial \alpha}{\partial u^j} .$$

2. Wir schreiben im Folgenden $\nabla_i Y$ oder $D_i Y$ wenn wir in Richtung des Vektorfeldes $\frac{\partial \alpha}{\partial u^i}$ ableiten. Wegen

$$\nabla_i \frac{\partial \alpha}{\partial u^j} = \left(D_i \frac{\partial \alpha}{\partial u^j} \right)^{\text{tang}} = \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^i \partial u^j} \right)^{\text{tang}}$$

ist

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k .$$

3. Wir schreiben für die verschieden lokalen Matrizen

$$I_{ij}^{(\alpha)} = g_{ij} , \quad (I^{(\alpha)})_{ij}^{-1} = g^{ij} , \quad II_{ij}^{(\alpha)} = h_{ij} , \quad L_{ij}^{(\alpha)} = L_i{}^j .$$

Dann ist insbesondere $\sum_k g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j$ mit dem Kronecker-Symbol[xx] $\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{falls } i \neq j \end{cases}$. Die Beziehung zwischen erster Fundamentalform, zweiter Fundamentalform und Weingarten Abbildung ist dann

$$L_i{}^j = \sum_k h_{ik} g^{kj} .$$

[xx] Leopold Kronecker (1823-1891)

4. Die Koszul-Formel (1) liefert

$$\sum_k \Gamma_{ij}^k g_{k\ell} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell}\Big)$$

oder

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_\ell g^{k\ell}\Big(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell}\Big)$$

Definition 5.24. Es sei M eine Fläche und $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung. Dann heißen die Komponenten $\Gamma_{ij}^k : U \to \mathbb{R}$ der kovarianten Ableitung der kanonischen Basis die *Christoffelsymbole 1. Art.*[(xxi)] Die *Christoffelsymbole 2. Art* sind durch

$$\Gamma_{ij;\ell} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{i\ell}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell}\Big)$$

definiert. Die beiden Definitionen sind über

$$\Gamma_{ij}^k = \sum_\ell g^{k\ell}\Gamma_{ij;\ell} \quad \text{oder} \quad \Gamma_{ij;k} = \sum_\ell g_{k\ell}\Gamma_{ij}^\ell$$

verknüpft.

Bemerkung 5.25. In der alten Schreibweise mit Hilfe der Komponenten E, F, G der ersten Fundamentalform lauten die Gleichungen, die die Christoffelsymbole definieren, wie folgt:

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{11;1}\\ \Gamma_{11;2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1\\ \Gamma_{11}^2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\partial E}{\partial u^1}\\ 2\frac{\partial F}{\partial u^1} - \frac{\partial E}{\partial u^2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{12;1}\\ \Gamma_{12;2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma_{12}^1\\ \Gamma_{12}^2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{\partial E}{\partial u^2}\\ \frac{\partial G}{\partial u^1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{22;1}\\ \Gamma_{22;2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E & F\\ F & G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{22}^2\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\frac{\partial F}{\partial u^2} - \frac{\partial G}{\partial u^1}\\ \frac{\partial G}{\partial u^2}\end{pmatrix}$$

Bemerkung 5.26. 1. Die lokalen Koordinaten des Krümmungstensors R der kovarianten Ableitung sind definiert durch

$$R\Big(\frac{\partial\alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial\alpha}{\partial u^j}, \frac{\partial\alpha}{\partial u^k}\Big) = \sum_\ell R_{ijk}{}^\ell \frac{\partial\alpha}{\partial u^\ell}$$

[(xxi)] Elwin Bruno Christoffel (1829-1900)

und lassen sich wie folgt berechnen:

$$R_{ijk}{}^{\ell} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^{\ell}}{\partial u^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^{\ell}}{\partial u^i} + \sum_m \left(\Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^{\ell} - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^{\ell} \right).$$

2. Mit Hilfe von Satz 5.12 und der ersten Fundamentalform definieren wir die Abbildung $\tilde{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ durch

$$\tilde{R}(X, Y, Z, T) = I(R(X, Y, Z), T).$$

Da $\tilde{R}$ dual zu R ist, nennen wir ebenfalls $\tilde{R}$ Krümmungstensor, da in der Regel aus dem Kontext klar ist, welche Variante gemeint ist. Bezüglich einer Parametrisierung hat $\tilde{R}$ die Koordinaten

$$R_{ijk\ell} = \tilde{R}\Big(\frac{\partial \alpha}{\partial u^i}, \frac{\partial \alpha}{\partial u^j}, \frac{\partial \alpha}{\partial u^k}, \frac{\partial \alpha}{\partial u^\ell} \Big) = \sum_m g_{\ell m} R_{ijk}{}^m .$$

Satz 5.27. *Der Krümmungstensor der kovarianten Ableitung hat für $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ die folgenden Symmetrien*

i) $\tilde{R}(X, Y, Z, T) = -\tilde{R}(Y, X, Z, T)$,

ii) $\tilde{R}(X, Y, Z, T) = -\tilde{R}(X, Y, T, Z)$,

iii) $\tilde{R}(X, Y, Z, T) = \tilde{R}(Z, T, X, Y)$,

iv) $\tilde{R}(X, Y, Z, T) + \tilde{R}(Z, X, Y, T) + \tilde{R}(Y, Z, X, T) = 0$.

Identität iv) ist gleichbedeutend mit

$$R(X, Y, Z) + R(Z, X, Y) + R(Y, Z, X) = 0 .$$

In Termen der Koordinaten schreiben sich die Symmetrien als

$$R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell}, \qquad R_{ijk\ell} = -R_{ij\ell k},$$
$$R_{ijk\ell} = R_{k\ell ij}, \qquad R_{ijk\ell} + R_{kij\ell} + R_{jki\ell} = 0 .$$

Bemerkung 5.28. Der obige Satz gilt genauso für den Krümmungstensor des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇^g zu einer beliebigen Metrik g auf M.

Beweis: Identität i) folgt direkt aus der Definition. Aus i), ii) und iv) folgt unmittelbar iii), denn

$$\begin{aligned} 2R_{ijk\ell} &= R_{ijk\ell} + R_{ijk\ell} \\ &= -R_{jik\ell} - R_{ij\ell k} \\ &= R_{ikj\ell} + R_{kji\ell} + R_{j\ell ik} + R_{\ell ijk}\,. \end{aligned}$$

Nach Vertauschen von i und k sowie j und ℓ erhalten wir

$$\begin{aligned} 2R_{k\ell ij} &= R_{ki\ell j} + R_{i\ell kj} + R_{\ell jki} + R_{jk\ell i} \\ &= R_{ikj\ell} + R_{\ell ijk} + R_{j\ell ik} + R_{kji\ell}\,, \end{aligned}$$

also dasselbe. Identität ii) und iv) rechnen wir mit Hilfe der Eigenschaften des Levi-Civita-Zusammenhangs nach. Insbesondere benötigen wir die Torsionsfreiheit und die Verträglichkeit mit der Metrik. Wir dürfen uns wegen der C^∞-Linearität auf eine lokale Basis beschränken. So gilt mit der Abkürzung $e_i = \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}$ und mit $[e_i, e_j] = 0$ sowie $\nabla_i e_j = \nabla_j e_i$:

$$\begin{aligned} &R_{ijk\ell} + R_{kij\ell} + R_{jki\ell} \\ &= I(\nabla_i\nabla_j e_k, e_\ell) - I(\nabla_j\nabla_i e_k, e_\ell) + I(\nabla_k\nabla_i e_j, e_\ell) - I(\nabla_i\nabla_k e_j, e_\ell) \\ &\quad + I(\nabla_j\nabla_k e_i, e_\ell) - I(\nabla_k\nabla_j e_i, e_\ell) \\ &= \cancel{D_i I(\nabla_j e_k, e_\ell)} - \cancel{I(\nabla_j e_k, \nabla_i e_\ell)} - \cancel{D_j I(\nabla_i e_k, e_\ell)} + \cancel{I(\nabla_i e_k, \nabla_j e_\ell)} \\ &\quad + \cancel{D_k I(\nabla_i e_j, e_\ell)} - \cancel{I(\nabla_i e_j, \nabla_k e_\ell)} - \cancel{D_i I(\nabla_k e_j, e_\ell)} + \cancel{I(\nabla_k e_j, \nabla_i e_\ell)} \\ &\quad + \cancel{D_j I(\nabla_k e_i, e_\ell)} - \cancel{I(\nabla_k e_i, \nabla_j e_\ell)} - \cancel{D_k I(\nabla_j e_i, e_\ell)} + \cancel{I(\nabla_j e_i, \nabla_k e_\ell)}\,, \\ &= 0 \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} &R_{ijk\ell} + R_{ij\ell k} \\ &= I(\nabla_i\nabla_j e_k, e_\ell) - I(\nabla_j\nabla_i e_k, e_\ell) + I(\nabla_i\nabla_j e_\ell, e_k) - I(\nabla_j\nabla_i e_\ell, e_k) \\ &= D_i I(\nabla_j e_k, e_\ell) - \cancel{I(\nabla_j e_k, \nabla_i e_\ell)} - D_j I(\nabla_i e_k, e_\ell) + \cancel{I(\nabla_i e_k, \nabla_j e_\ell)} \\ &\quad + D_i I(\nabla_j e_\ell, e_k) - \cancel{I(\nabla_j e_\ell, \nabla_i e_k)} - D_j I(\nabla_i e_\ell, e_k) + \cancel{I(\nabla_i e_\ell, \nabla_j e_k)} \\ &= D_i I(\nabla_j e_k, e_\ell) - D_j I(\nabla_i e_k, e_\ell) + D_i I(\nabla_j e_\ell, e_k) - D_j I(\nabla_i e_\ell, e_k) \\ &= \cancel{D_i D_j I(e_k, e_\ell)} - \cancel{D_i I(e_k, \nabla_j e_\ell)} - \cancel{D_j I(\nabla_i e_k, e_\ell)} + \cancel{D_i I(\nabla_j e_\ell, e_k)} \\ &\quad - \cancel{D_j D_i I(e_\ell, e_k)} + \cancel{D_j I(e_\ell, \nabla_i e_k)} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.29. 1. Identität iii) muss man nicht unbedingt nachrechnen, denn da der Tangentialraum zweidimensional ist, ist jede alternierende dreifach lineare Abbildung dort trivial. Wir haben hier gezeigt,

dass iii) unabhängig von diesem algebraischen Argument aus der Definition der kovarianten Ableitung folgt.

2. Wegen der vielen Symmetrien, die die R_{ijkl} haben, und da die Indizes nur die Werte 1 und 2 annehmen, hat der Krümmungstensor lediglich eine unabhängige Komponente, etwa R_{1212}.

Beispiel 5.30 (Fortsetzung von Beispiel 4.32)**.** Es sei wie dort M die Rotationsfläche mit erzeugender Kurve $\gamma(t) = (\rho(t), z(t))$, also

$$\alpha(t,\varphi) = \begin{pmatrix} \rho(t)\cos\varphi \\ \rho(t)\sin\varphi \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Mit der ersten Fundamentalform $I^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{t\varphi} \\ g_{t\varphi} & g_{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$ mit

$$g_{tt} = E = \|\gamma'\|^2, \quad g_{\varphi\varphi} = G = \rho^2, \quad g_{t\varphi} = F = 0$$

lassen sich die Christoffelsymbole mit Hilfe der Koszul-Formel berechnen:

$$\begin{aligned} &\Gamma_{tt;t} = \|\gamma'\|\|\gamma'\|', && \Gamma_{tt;\varphi} = 0, && \Gamma_{t\varphi;t} = 0, \\ &\Gamma_{t\varphi;\varphi} = \rho\rho', && \Gamma_{\varphi\varphi;t} = -\rho\rho', && \Gamma_{\varphi\varphi;\varphi} = 0, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &\Gamma^t_{tt} = \frac{\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|}, && \Gamma^\varphi_{tt} = 0, && \Gamma^t_{t\varphi} = 0, \\ &\Gamma^\varphi_{t\varphi} = \frac{\rho'}{\rho}, && \Gamma^t_{\varphi\varphi} = -\frac{\rho\rho'}{\|\gamma'\|^2}, && \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi} = 0. \end{aligned}$$

Die einzige unabhängige Krümmungskomponente ist

$$\begin{aligned} R_{t\varphi t\varphi} &= g_{\varphi\varphi} R_{t\varphi t}{}^{\varphi} \\ &= g_{\varphi\varphi}\Big(\frac{\partial\Gamma^\varphi_{\varphi t}}{\partial t} - \frac{\partial\Gamma^\varphi_{tt}}{\partial\varphi} + \Gamma^t_{\varphi t}\Gamma^\varphi_{tt} + \Gamma^\varphi_{\varphi t}\Gamma^\varphi_{t\varphi} - \Gamma^t_{tt}\Gamma^\varphi_{\varphi t} - \Gamma^\varphi_{tt}\Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}\Big) \\ &= \rho^2\Big(\frac{\rho'}{\rho}\Big)' - \rho^2\frac{\|\gamma'\|'}{\|\gamma'\|}\frac{\rho'}{\rho} + \rho^2\Big(\frac{\rho'}{\rho}\Big)^2 \\ &= \rho\rho'' - \frac{\rho''\rho' + z''z'}{\|\gamma'\|^2}\rho\rho' \\ &= -\frac{(z''\rho' - \rho''z')\rho z'}{\|\gamma'\|^2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\kappa\, z'}{\rho\, \|\gamma'\|}(\rho^2\|\gamma'\|^2) \\
&= -\det L^{(\alpha)} \det I^{(\alpha)} \\
&= -K \det I^{(\alpha)}
\end{aligned}
$$

und hängt direkt mit der Gauß-Krümmung der Fläche zusammen.

Bemerkung 5.31. 1. Es seien $\alpha : U \to M$ und $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \to M$ zwei Parametrisierungen der Fläche M mit $\alpha(U) = \tilde{\alpha}(\tilde{U})$ und es sei $\phi := \alpha^{-1} \circ \tilde{\alpha} : \tilde{U} \to U$ die Übergangstransformation.

Weiter seien g_{ij}, $\Gamma_{ij;k}$ und R_{ijkl} sowie $\tilde{g}_{ij}$, $\tilde{\Gamma}_{ij;k}$ und $\tilde{R}_{ijk\ell}$ die Komponenten der ersten Fundamentalform, die Christoffelsymbole und die Komponenten der Krümmung bezüglich α sowie $\tilde{\alpha}$. Dann gilt mit ${A_j}^i := (D\phi)^i{}_j$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{ij;k} &= \sum_{\ell,m,n} {A_i}^m {A_j}^n {A_k}^\ell \Gamma_{mn;\ell} + \sum_{m,n} g_{mn} \frac{\partial {A_j}^m}{\partial \hat{u}^i} {A_k}^n \,, \\
\tilde{\Gamma}^k_{ij} &= \sum_{\ell,m,n} {A_i}^m {A_j}^n (A^{-1})_\ell{}^k \Gamma^\ell_{mn} + \sum_m (A^{-1})_m{}^k \frac{\partial {A_j}^m}{\partial \hat{u}^i} \,, \\
\tilde{R}_{ijk\ell} &= \sum_{m,n,o,p} {A_i}^m {A_j}^n {A_k}^o {A_\ell}^p R_{mnop} \,, \\
\tilde{R}_{ijk}{}^\ell &= \sum_{m,n,o,p} {A_i}^m {A_j}^n {A_k}^o (A^{-1})_p{}^\ell R_{mno}{}^p \,.
\end{aligned}
$$

2. Es sei $f : M \to \tilde{M}$ eine Isometrie zwischen den Flächen M und $\tilde{M}$ und $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung von M. Weiter seien $\Gamma_{ij;k}$, Γ^k_{ij} ,$R_{ijk\ell}$ und $R_{ijk}{}^\ell$ die Christoffelsymbole und Krümmungskomponenten auf M bezüglich α. Dann stimmen die entsprechenden Größen auf $\tilde{M}$ mit diesen überein, wenn man sie auf $\hat{M}$ bezüglich der Parametrisierung $\tilde{\alpha} = f \circ \alpha : U \to \hat{M}$ berechnet, siehe Bemerkung 4.8.3.

5.4 Das Theorema Egregium und der Satz von Bonnet

Satz 5.32. *Es sei M eine Fläche und ∇ die kovariante Ableitung. Dann gelten für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ die folgenden Gleichungen*

1. Die Gauß-Gleichungen:

$$R(X,Y,Z) = II(Y,Z)L(X) - II(X,Z)L(Y) \,.$$

Formulieren wir das in Koordinaten, so liefert das

$$R_{ijk}{}^{\ell} = h_{jk}L_i{}^{\ell} - h_{ik}L_j{}^{\ell}$$
$$\text{oder} \quad R_{ijk\ell} = h_{jk}h_{i\ell} - h_{ik}h_{j\ell}\,.$$

2. Die Gleichungen von Mainardi & Codazzi: [(xxii)]

$$\nabla_X(L(Y)) - \nabla_Y(L(X)) - L([X,Y]) = 0$$

Ebenfalls in Koordinaten formuliert ist das

$$\frac{\partial h_{jk}}{\partial u^i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u^j} + \sum_{\ell}\left(\Gamma^{\ell}_{kj}h_{i\ell} - \Gamma^{\ell}_{ki}h_{j\ell}\right) = 0\,.$$

Bemerkung 5.33. Gemäß Bemerkung 5.29 hat der Krümmungstensor nur eine unabhängige Komponente, etwa R_{1212}. Wegen der Gauß-Gleichungen gilt für diese

$$R_{1212} = h_{21}h_{12} - h_{11}h_{22} = -\det(I\!I) = -K\det(I)\,.$$

Satz 5.34 (Theorema Egregium)**.** *Es sei M eine Fläche mit Gauß-Krümmung K. Weiter sei R der Krümmungstensor der kovarianten Ableitung und I die erste Fundamentalform. Dann gilt*

$$K = -\frac{R_{1212}}{\det(I)}\,.$$

Bemerkung 5.35. Das Theorema Egregium sagt aus, dass die Gauß-Krümmung einer Fläche durch die Komponenten der ersten Fundamentalform beschrieben wird. Mit anderen Worten: Allein durch Längen- und Winkelmessung auf der Fläche lässt sich ihre Krümmung bestimmen.

Satz 5.36 (Satz von Bonnet[(xxiii)])**.** *Es sei $U = J_1 \times J_2 \subset \mathbb{R}^2$ ein offenes Rechteck auf dem Funktionen $g_{ij}, h_{ij} : U \to \mathbb{R}$ für $1 \le i,j \le 2$ gegeben sind. Fasst man diese Funktionen zu zwei 2×2-Matrizen zusammen, nämlich $g := (g_{ij})$ und $h := (h_{ij})$, so sei g in jedem Punkt $u \in U$ symmetrisch und positiv definit und h in jedem Punkt $u \in U$ symmetrisch. Ferner sollen die mit Hilfe von g und h berechneten Funktionen[(xxiv)] $L_i{}^j$, Γ^k_{ij} und $R_{ijk\ell}$ die*

[(xxii)] Delfino Codazzi (1824-1873), Gaspare Mainardi (1800-1879)
[(xxiii)] Pierre Ossian Bonnet (1819-1892)
[(xxiv)] Diese Berechnung geschieht etwa mit den Formeln aus Bemerkung 4.22.2, Bemerkung 5.23.4 und Bemerkung 5.26.1.

Gleichungen von Gauß und von Mainardi & Codazzi erfüllen.
Dann existiert ein parametrisiertes Flächenstück $\alpha : U \to \mathbb{R}^3$, dessen erste und zweite Fundamentalform durch g und h gegeben ist, also $I^{(\alpha)} = g$ und $II^{(\alpha)} = h$. Dieses Flächenstück ist dann eindeutig bis auf eine Bewegung im Raum.

Beweisskizze. Idee: Suche zunächst $\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}$, $\frac{\partial \alpha}{\partial u^2}$ und N und integriere diese anschließend, um α zu bekommen.

1) g_{ij}, h_{ij} liefern mit Hilfe der Koszulformel Γ_{ij}^k und direkt $L_i{}^j = \sum g^{jk} h_{ik}$. Motiviert durch die Gleichung der kovarianten Ableitung und durch die Definition der Weingartenabbildung betrachten wir das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial x_i}{\partial u_j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k x_k + h_{ij} N$$
$$\frac{\partial N}{\partial u_j} = -\sum_k L_i{}^k x_k$$

aus 18 Gleichungen für die neun gesuchten Abbildungen $x_1, x_2, N : U \to \mathbb{R}^3$. Wir geben Anfangswerte $x_1(u_0) = a_1, x_2(u_0) = a_2, N(u_0) = a_3 \in \mathbb{R}^3$ vor, wobei

> $\{a_1, a_2, a_3\}$ eine positive Basis, $a_3 \perp \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{a_1, a_2\}$ mit $\|a_3\| = 1$ und $\langle a_i, a_j \rangle = g_{ij}(u_0)$

sein soll.

Die Gleichungen von Gauß und Mainardi & Codazzi sind nun genau die Bedingungen dafür, dass das DGL-System eindeutige Lösungen $x_1(u)$,$x_2(u)$ und $N(u)$ zu diesen Anfangsbedingungen hat.

Nun lösen wir die Differentialgleichung $\dfrac{\partial \alpha}{\partial u_j} = x_j$. Die Integrabilitätsbedingung $\dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} = \dfrac{\partial x_2}{\partial u_1}$ ist wegen der Symmetrie von Γ und h erfüllt und eine Lösung ist durch

$$\alpha(u) = \int_0^1 \big(x_1(u_0 + t(u - u_0))(u^1 - u_0^1) + x_2(u_0 + t(u - u_0))(u^2 - u_0^2)\big) dt$$

gegeben.

2) Es bleibt noch nachzuweisen, dass die erste und zweite Fundamentalform von α jeweils durch g und h gegeben ist. Zu zeigen ist

$$\langle x_i, x_j\rangle = g_{ij}\,, \quad \langle x_i, N\rangle = 0\,, \quad \|N\|^2 = 1 (\star)$$

für unsere Lösung x_1, x_2, N von oben. Wir leiten jeweils die linken Seiten der zu beweisenden Gleichungen ab. Das liefert mit 1) das folgende DGL-System

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\langle x_i, x_j\rangle}{\partial u^k} &= \sum_\ell \Gamma^\ell_{ik}\langle x_\ell, x_j\rangle + \sum_\ell \Gamma^\ell_{jk}\langle x_\ell, x_i\rangle + h_{ik}\langle x_j, N\rangle + h_{jk}\langle x_i, N\rangle \\
\frac{\partial\langle x_i, N\rangle}{\partial u^k} &= \sum_\ell L_k{}^\ell \langle x_i, N\rangle + \sum_\ell \Gamma^\ell_{ik}\langle x_\ell, x_j\rangle + h_{jk}\|N^2\| \\
\frac{\partial\|N\|^2}{\partial u^k} &= 2\sum_\ell L_k{}^\ell \langle x_\ell, N\rangle
\end{aligned}$$

aus 14 Gleichungen für die sieben Funktionen $\langle x_i, x_j\rangle$, $\langle x_i, N\rangle$ und $\|N\|^2$.

Insbesondere haben wir zwei Lösungen, nämlich die rechten Seiten von $(\star)$ – wie man durch Einsetzen prüft – und die linken Seiten – mit deren Hilfe wir das System ja definiert haben. Außerdem stimmen beide Lösungen in u_0 überein, sodass sie wegen der Eindeutigkeit der Lösung überall gleich sind.

3) Eindeutigkeit der Parametrisierung: Es gelten weiter die Bezeichnungen aus 1)+2). Sei nun $\tilde\alpha$ eine weitere Parametrisierung mit $\tilde I = g$, $\tilde{I\!I} = h$. Wir setzen $\tilde x_i := \frac{\partial\tilde\alpha}{\partial u_i}$ und $\tilde N$ sei das Normalenfeld.

Sei nun $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die Basiswechselmatrix mit $\tilde x_1(u_0) = Aa_2, \tilde x_2(u_0) = Aa_2, \tilde N(u_0) = Aa_3$. Da für die Basen insbesondere $\langle \tilde x_1(u_0), \tilde x_2(u_0)\rangle = g_{12}(u_0) = \langle a_1, a_2\rangle$ und $\langle \tilde x_i(u_0), \tilde N(u_0)\rangle = 0 = \langle a_i, a_3\rangle$ für $i = 1, 2$ gilt, erfüllt die Basiswechselmatrix $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$. Die Matrix A ist also orthogonal.

Weiter sei mit Hilfe dieser Matrix $\hat x_i := Ax_i$ und $\hat N := AN$. Dann erfüllen $\tilde x_1, \tilde x_2, \tilde N$ und $\hat x_1, \hat x_2, \hat N$ jeweils das System aus 2) mit den selben Anfangswerten in u_0. Deshalb ist insbesondere $\tilde x_i = \hat x_i$ bzw.

$$\frac{\partial\tilde\alpha}{\partial u^i} = A\frac{\partial\alpha}{\partial u^i} = \frac{\partial(A\alpha)}{\partial u^i}\,.$$

Deshalb gibt es nun ein $b \in \mathbb{R}^3$, sodass $\tilde\alpha = A\alpha + b$, d.h. $\tilde\alpha$ und α unterscheiden sich nur durch die Bewegung $v \mapsto Av + b$. □

6 Paralleltransport und Geodäten

6.1 Vektorfelder längs Kurven und Paralleltransport

Es sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein tangentiales Vektorfeld auf der Fläche M und $c : I \to M$ eine reguläre Kurve. Wir betrachten eine lokale Parametrisierung $\alpha : U \to M$ mit $c(I) \subset \alpha(U)$. Damit sei $X = X^1 \dfrac{\partial \alpha}{\partial u^1} + X^2 \dfrac{\partial \alpha}{\partial u^2} : \alpha(U) \to \mathbb{R}^3$ und $\beta = (c^1, c^2) : I \to U$ mit $c = \alpha \circ \beta$, also

$$\dot{c}(t) = D_{\beta(t)}\alpha \cdot \beta'(t) = \dot{c}^1(t)\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(c(t)) + \dot{c}^2(t)\frac{\partial \alpha}{\partial u^2}(c(t))\,.$$

Dann ist, siehe Bemerkung 5.23,

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{c}(t)}X &= \sum_{ij} \dot{c}^i(t)\Big(\frac{\partial X^j}{\partial u^i}(c(t)) + \sum_k \Gamma^j_{ik}(c(t))X^k(c(t))\Big)\frac{\partial \alpha}{\partial u^j}(c(t)) \\ &= \sum_j \Big(\underbrace{\sum_i \frac{\partial X^j}{\partial u^i}(c(t))\dot{c}^i(t)}_{= \frac{d(X^j \circ c)}{dt}(c(t))} + \sum_{ik} \Gamma^j_{ik}(c(t))\dot{c}^i(t)X^k(c(t))\Big)\frac{\partial \alpha}{\partial u^j}(c(t))\end{aligned}$$

Wir schreiben $x^j(t) = X^j \circ c(t)$ und $\Gamma^j_{ik}(t) := \Gamma^j_{ik} \circ c(t)$ und erhalten bei Vernachlässigung der Argumente

$$\nabla_{\dot{c}}X = \sum_j \Big(\frac{dx^j}{dt} + \sum_{ik} \Gamma^j_{ik}\dot{c}^i x^k\Big)\frac{\partial \alpha}{\partial u^j}\,. \tag{2}$$

Betrachten wir das nun in $t = t_0$, so sehen wir hier nochmal, dass der Ausdruck auf der rechten Seite nur von $v = \dot{c}(t_0)$ abhängt und $\nabla_v X$ somit unabhängig ist von der Wahl der Kurve mit dieser Eigenschaft. Weiter benötigen wir zur Berechnung von $\nabla_{\dot{c}}X$ nicht den gesamten Verlauf von X, sondern lediglich die Werte von X längs der Kurve c, nämlich statt X^j nur $x^j = X^j \circ c$. Somit macht die kovariante Ableitung auch Sinn für tangentiale Vektorfelder, die lediglich entlang der Kurve c definiert sind.

Definition 6.1. 1. Es sei $c : I \to M$ eine Kurve auf der Fläche M.

(a) Eine Abbildung $Y : I \to \mathbb{R}^3$ heißt[(xxv)] *(tangentiales) Vektorfeld*

[(xxv)] Wir werden im Folgenden in den meisten Fällen tangentiale Vektorfelder längs einer Kurve betrachten, deshalb lassen wir den Zusatz "tangential" in diesem Abschnitt fallen. Ist ein Vektorfeld explizit nicht notwendig tangential, so versehen wir es wie in (b) mit dem Zusatz "allgemein".

längs c, wenn $Y(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in I$.

(b) Ist der Definitionsbereich der Abbildung Y nicht wie im vorigen Punkt eingeschränkt, so sprechen wir auch von einem *allgemeinen Vektorfeld längs c*.

2. Ein Vektorfeld Y längs c heißt glatt, wenn für eine Karte $\alpha : U \to M$ mit $\alpha(U) \cap c(I) \neq \emptyset$ die Abbildungen $y^1, y^2 : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} y^1(t) \\ y^2(t) \end{pmatrix} = (D_{\alpha^{-1}(c(t))}\alpha)^{-1} Y(t)$$

glatt sind. Dabei ist $\tilde{I} \subset I$ so zu wählen, dass $c(\tilde{I}) \subset \alpha(U)$.

3. Es sei Y ein Vektorfeld längs c. Weiter sei $\tilde{V} \subset M$ eine offene Umgebung von $c(I)$, d.h. $\tilde{V} = M \cap V$ für eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^3$. Weiter sei $X : \tilde{V} \to \mathbb{R}^3$ mit $X(p) \in T_pM$ ein lokales Vektorfeld auf M mit $X\big|_{c(I)} = Y$. Dann heißt X eine *Erweiterung von Y*. Gibt es so ein X, dann heißt Y *erweiterbar*.

Bemerkung 6.2. 1. Ist Y ein Vektorfelds längs c, so muss es eine Erweiterung wie oben nicht immer geben, z.B. wenn $c(I)$ dicht in M ist.

2. Schränkt man allerdings c und Y auf ein hinreichend kleines Intervall ein, so ist diese Einschränkung erweiterbar.

3. Ist $c(I) \subset \alpha(U)$ für eine Karte $\alpha : U \to M$ so kann man Y für $t \in I$ schreiben als

$$Y(t) = \sum_i y^i(t) \frac{\partial \alpha}{\partial u^i}(c(t)) \,.$$

Das heißt, Y läßt sich lokal als Linearkombination erweiterbarer Vektorfelder längs c schreiben, wobei die Koeffizienten Funktionen auf I sind.

4. Die Menge der Vektorfelder längs einer Kurve c bilden eine reellen Vektorraum und einen $C^\infty(I)$-Modul.

Beispiel 6.3. 1. Ist $X \in \mathfrak{X}(M)$ und $c : I \to M$ eine Kurve, so ist $X \circ c : I \to M$ ein Vektorfeld längs c und X selbst eine Erweiterung.

2. Es sei $c : I \to M$ eine Kurve, dann ist das Geschwindigkeitsfeld $\dot{c} : I \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld längs c.

3. Ist $Y : I \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld längs $c : I \to M$, dann ist $Y' : I \to \mathbb{R}^3$ in der Regel lediglich ein allgemeines Vektorfeld längs c. Das gilt zum Beispiel für das Beschleunigungsfeld $\ddot{c} : I \to \mathbb{R}^3$ der Kurve c.

4. Ist M orientiert mit Normalenfeld $N : M \to S^2$, so ist für $c : I \to M$ die Abbildung $n : I \to \mathbb{R}^3$ mit $n(t) = N(c(t))$ ein allgemeines Vektorfeld längs c.

Definition 6.4. Es sei Y ein Vektorfeld längs der Kurve $c : I \to M$. Dann ist die *kovariante Ableitung von Y längs c* definiert durch

$$\nabla_{\dot{c}} Y := (\dot{Y})^{\text{tang}}.$$

Bemerkung 6.5. Wegen der Rechnungen zu Beginn dieses Kapitels, stimmt die kovariante Ableitung von Vektorfeldern längs Kurven gemäß Definition 6.4 mit der gewöhnlichen kovarianten Ableitung gemäß Definition 5.13 überein, wenn das betrachtete Vektorfeld erweiterbar ist.

Unabhängig vom umgebenen Raum kann man die kovariante Ableitung für Vektorfelder längs einer Kurve wie folgt charakterisieren

Satz 6.6. *Es sei M eine Fläche und $c : I \to M$ eine Kurve. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\mathcal{D}$ auf der Menge der Vektorfelder längs c mit den Eigenschaften*

i) $\mathcal{D}(fY) = \dot{f}Y + f\mathcal{D}Y$ für Vektorfelder Y längs c und Funktionen f auf I.

ii) Ist X eine Erweiterung von Y auf einer Umgebung $\tilde{I}$ von $t_0 \in I$, so ist $(\mathcal{D}Y)(t_0) = \nabla_{\dot{c}(t_0)} X$.

$\mathcal{D}$ ist dann genau die kovariante Ableitung gemäß Definition 6.4. Sind Y und $\tilde{Y}$ Vektorfelder längs c, so gilt

$$\frac{d}{dt} I_{c(t)}(Y(t), \tilde{Y}(t)) = I_{c(t)}(\mathcal{D}Y, \tilde{Y}) + I_{c(t)}(Y, \mathcal{D}\tilde{Y})$$

wobei I die erste Fundamentalform von M ist.

Beweisskizze: Angenommen die Abbildung $\mathcal{D}$ existiert. Dann liefert die lokale Beschreibung gemäß Bemerkung 6.2 zusammen mit den Bedingungen i) und ii) für $\mathcal{D}Y$ die rechte Seite der Formel (2). Dadurch ist die Abbildung dann eindeutig. Für die Existenz definieren wir $\mathcal{D}Y$ über die rechte Seite von (2). Dann erfüllt dies die Bedingungen i) und ii).

Bezeichnung 6.7. Es sei Y eine Vektorfeld längs c. Dann findet man für die kovariante Ableitung von Y längs c in der Literatur auch die Bezeichnung $\frac{\nabla}{dt}Y$. Wegen der Eigenschaft ii) des vorigen Satzes bzw. wegen Bemerkung 6.5 bevorzugen wir die Bezeichnung $\nabla_{\dot{c}}Y$.

Definition 6.8. Ein Vektorfeld Y längs c heißt *parallel*, wenn $\nabla_{\dot{c}}Y = 0$.

Bemerkung 6.9. Der Begriff „Parallelität“ hängt nicht von der Wahl der Parametrisierung der Kurve c ab.

Satz 6.10. *Sind $Y, \tilde{Y}$ parallele Vektorfelder längs der Kurve c, so ist der Winkel zwischen $Y(t)$ und $\tilde{Y}(t)$, also $\langle Y(t), \tilde{Y}(t)\rangle = I_{c(t)}(Y(t), \tilde{Y}(t))$, konstant.*

Satz 6.11. *Es sei $c : I \to M$ eine Kurve auf der Fläche M, $c(t_0) = p \in M$ und $v \in T_pM$. Dann gibt es genau ein paralleles Vektorfeld $Y : I \to \mathbb{R}^3$ längs c mit $Y(t_0) = v$.*

Definition 6.12. Es sei $c : [0, \ell] \to M$ eine Kurve auf M und $w \in T_{c(0)}M$. Weiter sei $Y_w : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$ das eindeutige parallele Vektorfeld längs c mit $Y_w(0) = w$. Die Abbildung

$$\Pi_t^c : T_{c(0)}M \to T_{c(t)}M \quad \text{mit} \quad \Pi_t^c(w) = Y_w(t)$$

heißt *Paralleltransport längs c*.

Bemerkung 6.13.

1. Der Paralleltransport Π_t^c ist wegen Satz 6.10 eine Isometrie zwischen den euklidischen Vektorräumen $(T_{c(0)}M, I_{c(0)})$ und $(T_{c(t)}M, I_{c(t)})$.
2. Ist $c : [0, \ell] \to M$ ein geschlossener Weg mit $p = c(0) = c(\ell)$, so ist $\Pi_p^c : T_pM \to T_pM$ ein Element aus $O(T_pM, I_p)$.

Beispiel 6.14. Der Paralleltransport entlang einer Kurve in der Ebene entspricht der gewöhnlichen Parallelverschiebung.

Bemerkung 6.15. Es seien $M, \tilde{M}$ Flächen und $f : M \to \tilde{M}$ eine Isometrie. Ist $c : I \to M$ eine Kurve und Y parallel längs c, so ist das Vektorfeld $df(Y)$ auf $\tilde{M}$ mit $df(Y)(p) := d_pf(Y(p))$ parallel bezüglich der Kurve $f \circ c$.
Das folgt aus der Tatsache, dass die Differentialgleichungen die gleiche Form haben, wenn man in M und $\tilde{M}$ geeignete Koordinaten wählt, siehe Bemerkung 5.31.2.

Bemerkung 6.16. Da der Paralleltransport entlang einer Kurve auf M nur von der Kurve und den Tangentialflächen entlang c abhängt, ist das Ergebnis das gleiche, wenn wir den Transport bezüglich einer anderen Fläche $\tilde{M}$ berechnen, die ebenfalls c enthält und deren Tangentialflächen entlang c mit denen von M übereinstimmen.

Ein Beispiel zur Konstruktion einer solchen „Ersatzfläche“ liefert das folgende Beispiel.

Beispiel 6.17. 1. Sei $c : I \to M$ eine Kurve auf der Fläche M und N das Normalenfeld von M. Für die Richtungsvektoren der Kurve sei $c'(t)$ nie eine Asymptotenrichtung. Es gilt also $I\!I(c', c') \neq 0$ und damit für $n : I \to \mathbb{R}^3$ mit $n := N \circ c$ insbesondere

$$\dot{n}(t) = d_{c(t)}N \cdot \dot{c}(t) \neq 0\,.$$

Nun betrachten wir

$$\alpha(t, s) = c(t) + s\frac{1}{\|\dot{n}(t)\|}n(t) \times \dot{n}(t)\,.$$

Das ist – zumindest für kleine s – die Parametrisierung einer Fläche, die die Eigenschaften aus der vorigen Bemerkung hat. Insbesondere ist das Ergebnis eine Regelfläche, siehe Kapitel 4.5. Ihre Gauß-Krümmung verschwindet, denn mit $v(t) := \frac{1}{\|\dot{n}(t)\|}n(t) \times \dot{n}(t)$ ist

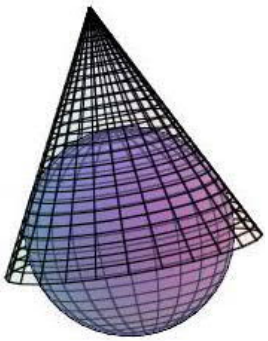
$$\dot{v} = \big(\frac{1}{\|\dot{n}(t)\|}\big)^{\cdot} n(t) \times \dot{n}(t) + \frac{1}{\|\dot{n}(t)\|}n(t) \times \ddot{n}(t)$$

und damit

$$\begin{aligned}\det\big(\dot{c}, \dot{v}, v\big) &= \frac{1}{\|\dot{n}\|^2}\det\big(\dot{c}, n \times \dot{n}, n \times \ddot{n}\big)\\ &= \frac{1}{\|\dot{n}\|^2}\langle \dot{c}, (n \times \dot{n}) \times (n \times \ddot{n})\rangle\\ &= \frac{1}{\|\dot{n}\|^2}\langle \dot{c}, \langle n \times \dot{n}, \ddot{n}\rangle n\rangle = 0\end{aligned}$$

2. Es sei $M = S^2_R$ die Sphäre mit Radius R und c ein Breitenkreis. Dann beschreibt α aus dem vorigen Beispiel einen Kegel, der die Sphäre in dem gegebenen Breitenkreis berührt, siehe Abbildung 17. Im Fall, dass der Breitenkreis der Äquator ist, entartet der Kegel zu einem Zylinder, und im Fall eines Pols zur Tangentialebene.

Abbildung 17: Kegel und Sphäre mit gemeinsamen Breitenkreis



Ist c der Breitenkreis zum Winkel $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, so ist der Paralleltransport eine Drehung um den Winkel $\eta = 2\pi \sin\theta$.

Das folgt aus der Tatsache, dass der Kegel isometrisch zu einem Kreissegment mit Öffnungswinkel $2\pi \sin\theta$ ist, und auf diesem – als Teilmenge der Ebene – der Paralleltransport die gewöhnliche Parallelverschiebung ist.

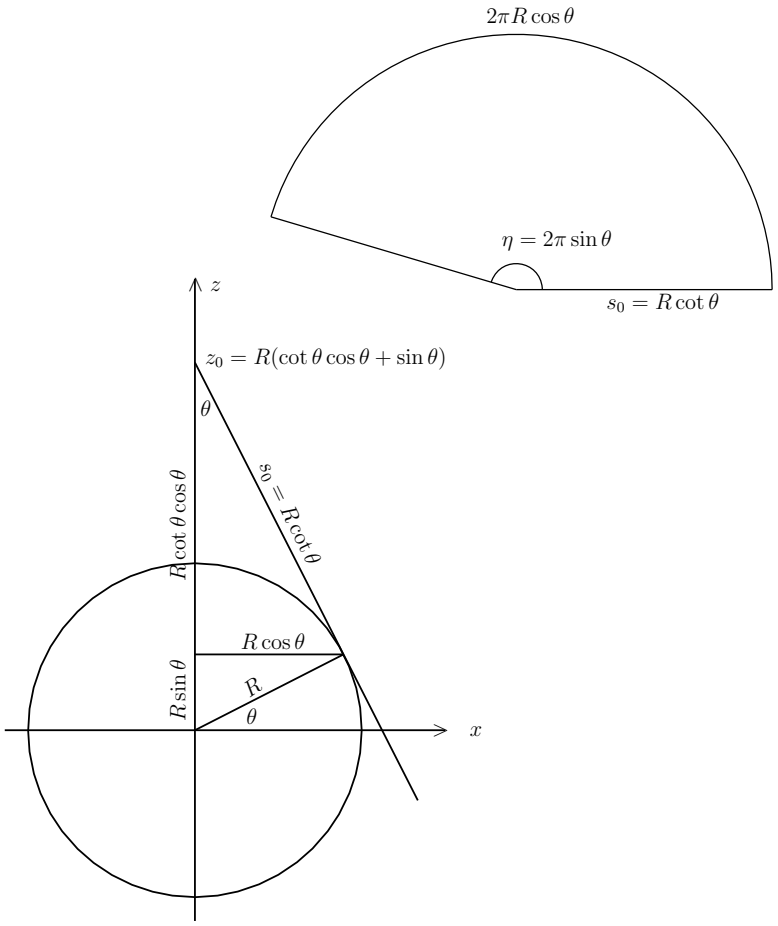
Das Kreissegment erhalten wir, indem wir den Kegel in die Ebene abwickeln. Um zu sehen, dass es sich hierbei tatsächlich um eine Isometrie handelt, wählen wir Parametrisierungen $\hat{\alpha}$ für das Kreissegment und α für den Kegel mit

$$\hat{\alpha}(t,\varphi) = \begin{pmatrix} Rt\cos\varphi \\ Rt\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha(t,\varphi) = \begin{pmatrix} Rt\sin\theta\cos\frac{\varphi}{\sin\theta} \\ Rt\sin\theta\sin\frac{\varphi}{\sin\theta} \\ R(\cot\theta\cos\theta + \sin\theta) - Rt\cos\theta \end{pmatrix},$$

die beide auf dem Intervall $[0, \cot\theta] \times [0, 2\pi\sin\theta]$ definiert sind. Die Isometrie folgt nun aus der Tatsache $I^{(\hat{\alpha})}_{(t,\varphi)} = I^{(\alpha)}_{(t,\varphi)} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2t^2 \end{pmatrix}$.

Zur Abwicklung des Kegels und zur Konstruktion der Parametrisierungen siehe Abbildung 18.

Abbildung 18: Abwicklung des Kegels



6.2 Geodäten und der Satz von Clairaut

Definition 6.18. 1. Eine Kurve $c : I \to M$ auf der Fläche M heißt *Geodäte*, wenn das Geschwindigkeitsfeld $\dot{c} : I \to \mathbb{R}^3$ parallel ist, d.h.

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = (\ddot{c})^{\text{tang}} = 0\,.$$

2. Eine unparametrisierte Kurve heißt Geodäte, wenn es eine Parametrisierung gibt, sodass diese eine Geodäte im Sinne von 1. ist.

Bemerkung 6.19. 1. Ist $c : I \to M$ eine Geodäte auf der Fläche M, gemäß Definition 6.18.1, dann hat das Geschwindigkeitsfeld konstante

Länge.

2. Die Eigenschaft einer Kurve Geodäte im Sinne von Definition 6.18.1 zu sein, ist abhängig von der Parametrisierung der Kurve.

3. Dieser Mangel, nämlich dass die Eigenschaft Geodäte zu sein nicht nur von der Form der Kurve abhängt, wird durch Defintion 6.18.2 repariert.

Bemerkung 6.20. Es sei $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung, sodass $c(I) \subset \alpha(U)$. Ist $\beta := (c^1, c^2) : I \to U$ mit $c = \alpha \circ \beta$, dann ist für alle $t \in I$

$$\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c} = \sum_k \left(\ddot{c}^k(t) + \sum_{ij} \Gamma^k_{ij}(t)\dot{c}^i(t)\dot{c}^j(t)\right)\frac{\partial \alpha}{\partial u^k}(c(t))\,.$$

Das sind zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die zwei Komponenten von β:

$$\begin{aligned}\ddot{c}^1 + \Gamma^1_{11}(\dot{c}^1)^2 + 2\Gamma^1_{12}\dot{c}^1\dot{c}^2 + \Gamma^1_{22}(\dot{c}^2)^2 = 0\,,\\ \ddot{c}^2 + \Gamma^2_{11}(\dot{c}^1)^2 + 2\Gamma^2_{12}\dot{c}^1\dot{c}^2 + \Gamma^2_{22}(\dot{c}^2)^2 = 0\,.\end{aligned}$$

Beispiel 6.21. Ist M eine Rotationsfläche mit $\alpha(s,\varphi) = \begin{pmatrix} r(s)\cos(\varphi) \\ r(s)\sin(\varphi) \\ h(s)\end{pmatrix}$ so ist $I_{(s,\varphi)} = \begin{pmatrix} r'(s)^2 + h'(s)^2 & 0 \\ 0 & r(s)^2\end{pmatrix}$ und die einzigen nicht verschwindenden Christoffelsymbole sind

$$\begin{aligned}\Gamma^s_{ss}(s,\varphi) &= \frac{r'(s)r''(s) + h'(s)h''(s)}{r'(s)^2 + h'(s)^2}\,,\\ \Gamma^\varphi_{s\varphi}(s,\varphi) &= \frac{r'(s)}{r(s)}\,,\\ \Gamma^s_{\varphi\varphi}(s,\varphi) &= -\frac{r(s)r'(s)}{r'(s)^2 + h'(s)^2}\,.\end{aligned}$$

Insbesondere hängen die Christoffelsymbole - ebenso, wie die erste Fundamentalform - nur von dem Parameter s ab. Schreiben wir nun $\beta(t) = (s(t), \varphi(t))$, dann ist $c = \alpha \circ \beta$ eine Geodäte, wenn

$$\begin{aligned}\ddot{s} &= \frac{r(s)r'(s)}{r'(s)^2 + h'(s)^2}\dot{\varphi}^2 - \frac{r'(s)r''(s) + h'(s)h''(s)}{r'(s)^2 + h'(s)^2}\dot{s}^2\,,\\ \ddot{\varphi} &= -2\frac{r'(s)}{r(s)}\dot{s}\dot{\varphi}\,.\end{aligned}$$

Hierbei ist zu beachten, dass $'$ die Ableitung nach dem Flächenparameter s bezeichnet und $\dot{}$ diejenige nach dem Kurvenparameter t. Insbesondere ist $(r(s))\dot{} = \frac{d}{dt} r(s) = r'(s)\dot{s}$.

Satz 6.22. *1. Es sei M eine Fläche und $p \in M$ sowie $v \in T_pM$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine eindeutige Geodäte $c :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = v$.*

2. Es sei M eine Fläche und $p \in M$. Dann gibt es $\epsilon, \delta > 0$ und eine glatte Abbildung $\hat{c} :]-\epsilon, \epsilon[\times B_\delta(0) \to M$, sodass $c_v := \hat{c}(\cdot, v) :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ die Geodäte mit $c_v(0) = p$ und $\dot{c}_v(0) = v$ ist.

Satz 6.23. *Ist $c : I \to M$ eine Geodäte auf der Fläche M, so ist diese eindeutig.*

Beispiel 6.24.

1. Die Geodäten der Ebene sind die (Teile von) Geraden. Zwei Punkte lassen sich durch genau eine Geodäte verbinden.
2. Die Geodäten auf der Sphäre entsprechen den (Teilen von) Großkreisen. Zwei Punkte lassen sich durch genau zwei Geodäten verbinden, wenn sie nicht diametral liegen. Ansonsten gibt es unendlich viele verbindende Geodäten.
3. Die Geodäten auf dem Zylinder sind die (Teile von) Schraubenlinien. Dabei interpretieren wir die Breitenkreise als Schraubenlinien mit Ganghöhe 0 und die den Zylinder erzeugenden Geraden als Schraubenlinien mit Ganghöhe ∞. Zwei Punkte auf dem Zylinder lassen sich durch unendlich viele Geodäten verbinden.

Sehr hilfreich zur Bestimmung von Geodäten ist der folgende Satz 6.25. Die Begründung ist ähnlich wie die analoge Aussage im Zusammenhang mit Paralleltransport, siehe Bemerkung 6.15.

Man kann den Satz insbesondere verwenden, indem man die Isometrie zwischen der Ebene und dem Zylinder ausnutzt: Eine Gerade in der Ebene wird zu einer Spirale auf dem Zylinder.

Satz 6.25. *Es sei $f : M \to \tilde{M}$ eine Isometrie zwischen den Flächen M und $\tilde{M}$. Ist c eine Geodäte auf M, dann ist $f \circ c$ eine Geodäte auf $\tilde{M}$.*

Beispiel 6.21 (Fortsetzung). Weiter sei M der Rotationskörper mit Profilkurve $(r(s), h(s))$ und $\beta : I \to \mathbb{R}^2$ mit $\beta(t) = (s(t), \varphi(t))$ sei das Urbild der Kurve $c : I \to M$ unter der Parametrisierung $\alpha : U \to M$. Wir schreiben $r(t) = r(s(t))$ und $h(t) = h(s(t))$, womit z.B. $\dot{r} = r'\dot{s}$ ist.

1. Es sei $c : I \to M$ eine beliebige Geodäte, dann ist der Wert
$$L := r^2(t)\dot{\varphi}(t)$$
eine Konstante, also $\dot{L} = 0$. Insbesondere gilt für die Meridiane $L = 0$.

2. **(Satz von Clairaut).**[xxvi] Es sei $c : I \to M$ mit $c(t) = \alpha(s(t), \varphi(t))$ eine beliebige Geodäte. Diese schneide zur Zeit t_0 den Breitenkreis zu $s(t_0)$ im Punkt $\alpha(s(t_0), \varphi(t_0))$ mit dem Winkel $\theta(t_0)$. Dann gilt $\cos(\theta(t_0)) = r(t_0)\dot{\varphi}(t_0)$, also
$$r(t_0)\cos(\theta(t_0)) = L\,.$$

3. Ist $L \neq 0$, so kann man im Parameterraum φ in Abhängigkeit von s als Graph wie folgt angeben:
$$\varphi(s) = L\int \frac{1}{r}\sqrt{\frac{(r')^2 + (h')^2}{r^2 - L^2}}ds\,.$$

4. Wir beschreiben einen Zylinder durch $r(s) = r_0$ und $h(s) = as$. Punkt 2. liefert dann einen konstanten Schnittwinkel $\cos(\theta_0) = \frac{L}{r_0}$. Weiter bekommen wir mit Punkt 3. $\varphi(s) = \frac{a}{r_0}\cot(\theta_0)s$ oder $s(\varphi) = \frac{r_0}{a}\tan(\theta_0)\varphi$. Benutzen wir als Kurvenparameter wieder t, so ist also $\beta(t) = (s(t), t)$ und schließlich $c(t) = r_0\begin{pmatrix}\cos(t)\\ \sin(t)\\ t\tan(\theta_0)\end{pmatrix}$, also eine Spiralkurve auf dem Zylinder.

6.3 Geodätische Polarkoordinaten

In diesem Abschnitt sei M eine Fläche und $p \in M$ ausgezeichnet. Mit c_v bezeichnen wir die Geodäte durch p mit Startrichtung $v \in T_pM$, also $c_v(0) = p$ und $c_v'(0) = v$.

Bemerkung 6.26. Ist $c_v :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ und $\lambda > 0$, dann ist die Geodäte $c_{\lambda v}$ auf $]-\frac{\epsilon}{\lambda}, \frac{\epsilon}{\lambda}[$ definiert und erfüllt $c_v(\lambda t) = c_{\lambda v}(t)$.

Definition 6.27. Es sei $v \in T_pM \setminus \{0\}$ derart, dass die Geodäte c_v durch p zur Zeit $t = 1$ definiert ist. Dann definieren wir
$$\exp_p(v) := c_v(1)\,.$$
Außerdem setzen wir $\exp_p(0) := p$.

[xxvi] Alexis-Claude Clairaut (1713-1765)

Satz 6.28. *1.* $\exp_p(v)$ *ist für* $\|v\| < \epsilon$ *definiert, wobei* ϵ *unabhängig von der Richtung* $\frac{1}{\|v\|}v$ *gewählt werden kann.*

2. $\exp_p : T_pM \supset B_\epsilon(0) \to M$ *ist für* ϵ *klein genug ein Diffeomorphismus.*

Bemerkung 6.29. Es sei $\alpha : U \to M$ eine Karte von M um p. Wir betrachten T_pM, und damit auch $B_\epsilon(0)$, selbst als Fläche mit globaler Parametrisierung

$$\tau : (x, y) \mapsto x\frac{\partial\alpha}{\partial u^1}(p) + y\frac{\partial\alpha}{\partial u^2}(p)\,.$$

Dann ist für $w = w^1\frac{\partial\alpha}{\partial u^1}(p) + w^2\frac{\partial\alpha}{\partial u^2}(p) \in T_pM$ insbesondere

$$\frac{\partial\tau}{\partial x}(w) = \frac{\partial\alpha}{\partial u^1}(p) \in T_w(T_pM)$$

und

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}(w) = \frac{\partial\alpha}{\partial u^2}(p) \in T_w(T_pM),$$

also

$$T_w(T_pM) \simeq T_pM\,.$$

Damit läßt sich das Differential der Abbildung $\exp : B_\epsilon(0) \to M$, also $d_w\exp_p : T_w(T_pM) = T_pM \to T_{\exp_p(w)}M$ als Abbildung $d_w\exp_p : T_pM \to T_{\exp_p(w)}M$ zwischen Tangentialräumen von M auffassen. Insbesondere für $w = 0$ ist $d_0\exp_p : T_pM \to T_pM$ die Identische Abbildung, denn es gilt für $v \in T_pM$:

$$\begin{aligned} d_0\exp_p(v) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp_p(0 + tv) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\exp_p(tv) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}c_{tv}(1) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}c_v(t) = v \end{aligned}$$

Definition 6.30. Es sei v_1, v_2 eine orthonormale Basis von T_pM und damit[(xxvii)] $B_\epsilon(0) = \{v \in T_pM \,|\, I_p(v, v) < \epsilon\} = \{xv_1 + yv_2 \in T_pM \,|\, x^2 + y^2 < \epsilon\}$. Wir wählen in $B_\epsilon(0) \subset T_pM$ Polarkoordinaten mit $0 < r < \epsilon$ und $0 < \varphi < 2\pi$, und schreiben $\alpha_g(r, \phi) = \exp_p\big((r\cos\varphi)v_1 + (r\sin\varphi)v_2\big)$, so ist $\alpha_g :]0, \epsilon[\times]0, 2\pi[\to M$ eine Parametrisierung von M. Diese Koordinaten heißen *geodätische Polarkoordinaten (von* M *um* p*).*

[(xxvii)] Man kann sogar stets ein Koordinatensystem $\alpha : U \to M$ um p wählen, sodass $\frac{\partial\alpha}{\partial u^1}(p) = v_1$, $\frac{\partial\alpha}{\partial u^2}(p) = v_2$.

1. Die Bilder der r-Koordinatenlinien $r \mapsto \alpha_g(r, \varphi_0)$ heißen *radiale Geodäten.*

2. Die Bilder der φ-Koordinatenlinien $\varphi \mapsto \alpha_g(r_0, \varphi)$ heißen *geodätische Kreise.* Diese sind in der Regel keine Geodäten.

Satz 6.31. *In geodätischen Polarkoordinaten α_g hat die erste Fundamentalform die Gestalt $I^{(\alpha_g)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{pmatrix}$ mit*

$$\lim_{r \to 0} G(r, \varphi) = 0\,, \qquad \lim_{r \to 0} \frac{\partial \sqrt{G(r, \varphi)}}{\partial r} = 1$$

Bemerkung 6.32. 1. Die geodätischen Kreise und die radialen Geodäten schneiden sich senkrecht.

2. Die Gauß-Krümmung berechnet sich gemäß

$$K = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}\,.$$

Beispiel 6.33. 1. $M = \mathbb{R}^2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3\}$ und $p = (p_1, p_2, 0) \in \mathbb{R}^2$. In diesem Fall stimmt α_g mit den gewöhnlichen Polarkoordinaten zentriert in p überein, also

$$\alpha_g(r, \varphi) = (p_1 + r \cos \varphi, p_2 + r \sin \varphi, 0)\,.$$

In diesem Fall ist $G = r^2$.

2. Im Fall $M = S^2_R$ und $p = n$ der Nordpol, dann ist $\exp : B_{\pi R}(0) \to M \setminus \{s\}$ und es gilt $\alpha_g(r, \varphi) = \alpha(\varphi, \vartheta(r))$ mit $\vartheta(r) = \frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}$. Hierbei ist α die Standardbeschreibung der Sphäre mit Längen- und Breitenwinkel $(\varphi, \vartheta) \in]0, 2\pi[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Insbesondere ist damit

$$G = R^2 \cos^2\big(\frac{\pi}{2} - \frac{r}{R}\big) = R^2 \sin^2 \frac{r}{R}\,.$$

Legt man den Tangentialraum $T_n S^2_R$ – wie üblich – als geometrisches Objekt tangential an den Nordpol n, dann werden durch die Abbildung α_g die Geraden durch n auf die Großkreise durch n gewickelt.

Satz 6.34. *Es seien M_1, M_2 zwei Flächen mit identischer konstanter Gauß-Krümmung. Dann sind M_1 und M_2 lokal isometrisch.*

Definition 6.35. Es M eine Fläche und $c : [a, b] \to M$ eine Kurve.

1. $\mathcal{L}(c) := \int_a^b \sqrt{I_{c(t)}(c'(t), c'(t))}\, dt$ heißt *(orientierte) Länge von c.*

2. $\mathcal{E}(c) := \frac{1}{2} \int_a^b I_{c(t)}(c'(t), c'(t))\, dt$ heißt *Energie von c.*

Die Zuordnungen $\mathcal{L} : c \mapsto \mathcal{L}(c)$ und $\mathcal{E} : c \mapsto \mathcal{E}(c)$ heißen auch *Längen-* und *Energiefunktional.*

Bemerkung 6.36. 1. Ist $\tilde{c} = c \circ \phi$ mit $\phi : \tilde{I} = [\tilde{a}, \tilde{b}] \to I = [a, b]$ eine Umparametrisierung mit $\phi' > 0$, so gilt

$$\mathcal{L}(\tilde{c}) = \mathcal{L}(c)$$

und

$$\mathcal{E}(\tilde{c}) = \int_a^b (\phi' \circ \phi^{-1})(t)\, I_{c(t)}(c'(t), c'(t))\, dt$$

2. Ist $I = [a, b]$ so gilt $\mathcal{L}(c)^2 \leq 2(b - a)\mathcal{E}(c)$ mit Gleicheit genau dann, wenn $\|c'\| = \text{const}$.

3. $\mathcal{E}(c)$ ist minimal $\iff$ $\mathcal{L}(c)$ ist minimal und $\|c'\| = \text{const}$.

Satz 6.37. *Es seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und $c : J \times I \to M$ eine glatte Abbildung auf der Fläche M, dann ist*

$$\nabla_{\frac{\partial c}{\partial s}} \frac{\partial c}{\partial t} = \nabla_{\frac{\partial c}{\partial t}} \frac{\partial c}{\partial s}\,.$$

Definition 6.38. Ist $c : I \to M$ eine Kurve und $\hat{c} :]-\epsilon, \epsilon[\times I \to M$ eine glatte Abbildung mit $\hat{c}(0, t) = c(t)$, dann nennt man $\hat{c}$ eine *Variation der Kurve c.* Wir schreiben $c_s : I \to M$, $c_t :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ mit $c_s(t) = c_t(s) := \hat{c}(s, t)$. Das Vektorfeld längs c, das durch

$$V(t) := \frac{\partial c}{\partial s}(0, t)$$

definiert ist, heißt *Variationsfeld* der Variation $\hat{c}$.

Satz 6.39. *Es sei M eine Fläche und $c : [a, b] \to M$ eine Kurve. Weiter sei $\hat{c} :]-\epsilon, \epsilon[\times I \to M$ eine Variation von c mit $c_s(a) = c(a)$, $c_s(b) = c(b)$ für alle $s \in]-\epsilon, \epsilon[$, sodass insbesondere $V(a) = V(b) = 0$ für das Variationsfeld V. Dann gilt*

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{E}(c_s) = -\int_a^b I_{c(t)}\big(V(t), \nabla_{c'} c'(t)\big) dt\,.$$

Folgerung 6.40. Es sei M eine Fläche $c : [a, b] \to M$. Dann gilt

$$\mathcal{E}(c) \text{ minimal } \Longrightarrow c \text{ ist Geodäte}.$$

Beweisskizze: Wir zeigen: Ist $\nabla_{c'} c'(t_0) \neq 0$ für ein $t_0 \in]a, b[$, so gibt es eine Variation $\hat{c}$ von c, sodass $\frac{d}{ds}\mathcal{E}(c_s)|_{s=0} < 0$ und somit $\mathcal{E}(c)$ nicht minimal ist. Es sei $\alpha : U \to M$ eine Koordinatenumgebung von $c(t_0)$. Nun sei $\hat{I} =]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset I$ mit $c(\hat{I}) \subset \alpha(U)$ und weiter

- $\beta : \hat{I} \to U$ mit $c\big|_{\hat{I}} = \alpha \circ \beta$,
- $X : \hat{I} \to \mathbb{R}^2$ mit $X(t) := \big(D_{\beta(t)}\alpha\big)^{-1}\big(\nabla_{c'} c'(t)\big)$,
- $\phi : I \to \mathbb{R}$ mit $\phi \geq 0$, $\phi(t_0) = 1$ und $\operatorname{supp}(\phi) \subset \hat{I}$ also insbesondere $\phi\big|_{I \setminus \hat{I}} = 0$.

Dann ist $\beta(t) + s\phi(t)X(t) \in U$ für $|s| < \epsilon$ klein genug und wir setzen

$$c_s : \hat{I} \to M\,, \quad c_s(t) := \alpha(\beta(t) + s\phi(t)X(t)) \in \alpha(U) \subset M$$

also insbesondere $c_0(t) = c(t)$. Eine Variation von c ist nun durch

$$\hat{c} :]-\epsilon, \epsilon[\times I \to M\,, \quad \hat{c}(s,t) := \begin{cases} c_s(t) & \text{falls } t \in \hat{I} \\ c(t) & \text{falls } t \in I \setminus \hat{I} \end{cases}$$

gegeben. Das zugehörige Variationsfeld V ist dann

$$V(t) = \frac{\partial \hat{c}}{\partial s}\Big|_{s=0} = \phi(t)\, D_{\beta(t)}\alpha(X(t)) = \begin{cases} \phi(t)\nabla_{c'} c'(t) & \text{falls } t \in \hat{I} \\ 0 & \text{falls } t \in I \setminus \hat{I} \end{cases}.$$

Damit ist schließlich

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mathcal{E}(c_s)\big|_{s=0} &= -\int_I I_{c(t)}(V(t), \nabla_{c'} c'(t))\, dt \\ &= -\int_{\hat{I}} \underbrace{\phi(t) I_{c(t)}(\nabla_{c'} c'(t), \nabla_{c'} c'(t))}_{\geq 0,\ \text{und} > 0 \text{ in } t_0}\, dt < 0 \end{aligned}$$

Bemerkung 6.41. Die Rückrichtung in Folgerung 6.40 gilt in der Regel nicht, wie das Beispiel der Sphäre zeigt.

7 Abstrakte Flächen

7.1 Abstrakte Flächen und Beispiele

Definition 7.1. Eine Menge M heißt *abstrakte Fläche*, wenn es eine Familie

$$\mathcal{A} := \{(\alpha_j, U_j)\}_{j\in\mathfrak{I}}$$

von Abbildungen $\alpha_j : U_j \to M$ gibt, die die folgenden Eigenschaften hat:

0. Für alle $j \in \mathfrak{I}$ ist $U_j \subset \mathbb{R}^2$ offen und $\alpha_j : U_j \to M$ injektiv.
1. $\bigcup_{j\in\mathfrak{I}} \alpha_j(U_j) = M$.
2. Für alle $i, j \in \mathfrak{I}$ mit $W_{ij} := \alpha_i(U_i) \cap \alpha_j(U_j) \neq \emptyset$ ist die
$$\alpha_i^{-1} \circ \alpha_j : \alpha_j^{-1}(W_{ij}) \to \alpha_i^{-1}(W_{ij})$$
als Abbildung zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ glatt.
3. Die durch die Familie $\mathcal{A}$ induzierte Topologie auf M ist hausdorffsch.
4. M läßt sich mit abzählbar vielen der Mengen $\alpha_j(U_j)$ überdecken.

Ist M eine abstrakte Fläche, so nennt man $\mathcal{A}$ einen *Atlas von* M.

Bemerkung 7.2.

- [zu 0.,1.,2.] Diese Eigenschaften fasst man auch unter dem Begriff *lokal euklidisch* zusammen.
- [zu 3.] Die von der Familie $\mathcal{A}$ induzierte Topologie auf M ist wie folgt definiert: Eine Teilmenge $V \subset M$ heißt genau dann offen, wenn für alle $i \in \mathfrak{I}$ die Menge $\alpha_i^{-1}(\alpha_i(U_i) \cap V) \subset \mathbb{R}^2$ offen ist. Dann sind insbesondere die Abbildungen α_i und α_i^{-1} stetig, also $\alpha_i : U_i \to \alpha_i(U_i)$ Homömorphismen.
- [zu 3.] Dieser Punkt folgt nicht aus den ersten beiden Punkten 1. und 2., wie das anschließende Beispiel zeigt.
- [zu 3.] Diese Bedingung kann man dadurch ersetzen, dass man fordert, dass M ein topologischer Haussdorffraum ist, die Bilder $\alpha_j(U_j)$ offen und die α_j Homöomorphismen.

- [zu 4.] Dies ist eine technische Bedingung, die durch die etwas schwächere Bedingung M *ist parakompakt* ersetzt werden kann. Da unsere Beispiele im Folgenden in der Regel sogar endliche Atlanten zulassen, reicht unsere strengere Bedingung hier aus. Zum Beispiel benötigt man die Abzählbarkeit des Atlas – bzw. die Parakompaktheit von M – dafür, zu zeigen, dass auf einer abstrakten Fläche eine Metrik existiert.

Definition 7.3. 1. Es sei $\mathcal{A} = \{(\alpha_j, U_j)\}_{j\in\mathfrak{I}}$ ein Atlas einer abstrakten Fläche M und $\alpha : U \to M$ injektiv auf der offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$. Dann heißt α *mit dem Atlas verträglich*, wenn für alle $j \in \mathfrak{I}$ mit $W_j := \alpha_j(U_j) \cap \alpha(U) \neq \emptyset$ die Kompositionen $\alpha^{-1} \circ \alpha_j : \alpha_j^{-1}(W_j) \to \alpha^{-1}(W_j)$ und $\alpha_j^{-1} \circ \alpha : \alpha^{-1}(W_j) \to \alpha_j^{-1}(W_j)$ glatt sind.

2. Ein Atlas $\mathcal{A}$ heißt *maximaler Atlas*, wenn für alle (α, U), die mit $\mathcal{A}$ verträglich sind, schon $(\alpha, U) \in \mathcal{A}$ gilt.

Es folgt ein Beispiel für eine Menge, die zwar lokal euklidisch ist, wo aber die induzierte Topologie nicht hausdorffsch ist.

Beispiel 7.4. Es sei $M := \mathbb{R}^2 \cup \{*\}$ und

$$\alpha_1 : \mathbb{R}^2 \to M\,, \quad \alpha_1(x) := x$$
$$\alpha_2 : \mathbb{R}^2 \to M\,, \quad \alpha_2(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \neq 0 \\ * & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

Dann ist insbesondere

$$V \subset M \text{ offen } \iff \begin{cases} V \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen, falls } * \notin V \\ (V \setminus \{*\}) \cup \{0\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ offen, falls } * \in V \end{cases}$$

und die Punkte $*$ und 0 lassen sich nicht durch offene Mengen trennen, d. h. jede offenen Menge, die $*$ enthält, hat nicht-leeren Schnitt mit jeder beliebigen offenen Menge, die 0 enthält. Also ist M nicht hausdorffsch.

Nichtsdestotrotz ist M lokal euklidisch, denn es ist $\alpha_1(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2 \subset M$ und $\alpha_2(\mathbb{R}^2) = (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \cup \{*\}$ und deshalb $W_{12} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, *\}$. Damit ist weiter $\alpha_1^{-1}(W_{12}) = \alpha_2^{-1}(W_{12}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und

$$\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 = \mathrm{id}\,, \quad \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1 = \mathrm{id}\,.$$

Insbesondere sind die Flächen, die wir bisher kennen gelernt haben, auch abstrakte Flächen.

Beispiel 7.5.

1. Eine Fläche im Sinne von Definition 3.1 ist eine abstrakte Fläche. Dabei stimmt die durch den Atlas induzierte Topologie mit der Teilraumtopologie, die durch den umgebenden $\mathbb{R}^3$ definiert wird, überein.
2. Ein parametrisiertes Flächenstück gemäß Definition/Bemerkung 3.3 ist ebenfalls eine abstrakte Fläche. In der Regel stimmen hier die durch den Atlas induzierte Topologie und die Teilraumtopologie nicht überein.

Definition 7.6. Es seien M, N abstrakte Flächen mit Atlanten $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

1. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}^n$ heißt *differenzierbar im Punkt* $p \in M$, wenn es eine Parametrisierung $(\alpha, U) \in \mathcal{A}$ mit $p \in \alpha(U)$ gibt, sodass $f \circ \alpha : U \to \mathbb{R}^n$ differenzierbar im Punkt $\alpha^{-1}(p) \in U$ ist.

   Solch eine Abbildung heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt differenzierbar ist.
2. Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ und $f : V \to M$ eine Abbildung. f heißt *differenzierbar (in $v \in V$)*, wenn es eine Karte $(\alpha, U) \in \mathcal{A}$ gibt, sodass $\alpha^{-1} \circ f : V \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar (in $v \in V$) ist.
3. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt *differenzierbar im Punkt* $p \in M$, wenn es Parametrisierungen $(\alpha, U) \in \mathcal{A}$ und $(\beta, V) \in \mathcal{B}$ mit $p \in \alpha(U)$ und $f(p) \in \beta(V)$ gibt, sodass $\beta^{-1}\big|_{\beta(V) \cap f(\alpha(U))} \circ f \circ \alpha : U \to V$ differenzierbar im Punkt $\alpha^{-1} \in U$ ist.

   Solch eine Abbildung heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt differenzierbar ist.

Bezeichnung 7.7.

- Wie üblich nennen wir für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ eine Abbildung $c : I \to M$ eine Kurve auf der abstrakten Fläche M.
- Die Menge aller glatten Funktionen auf der abstrakten Fläche M bezeichnen wir mit $C^\infty(M)$.

Beispiel 7.8 (Konstruktionsidee für abstrakte Flächen)**.**

▷ Nimm eine Fläche $\tilde{M} \subset \mathbb{R}^3$.

▷ Nimm eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\tilde{M}$ und definiere $M := \tilde{M}/\sim$ als die zugehörige Äquivalenzklasseneinteilung. Bezeichne die natürliche Projektion, die $\tilde{p} \in \tilde{M}$ auf die Äquivalenzklasse $[\tilde{p}] := \{\tilde{q} \in \tilde{M} \mid \tilde{q} \sim \tilde{p}\} \in M$ abbildet, mit $\pi : \tilde{M} \to M$, $\pi(\tilde{p}) = [\tilde{p}]$.

▷ Nimm einen Atlas $\tilde{\mathcal{A}} = \{(\tilde{\alpha}_j, U_j)\}_{j\in\mathfrak{J}}$ von $\tilde{M}$ und definiere

$$\alpha_j := \pi \circ \tilde{\alpha}_j : U_j \to M$$

und setze $\mathcal{A} := \{(\alpha_j, U_j)\}_{j\in\mathfrak{J}}$.

Überprüfen der Bedingungen aus Definition 7.1:

- [zu 0.] Für $u, v \in U_j$ ist $\alpha_j(u) = \alpha_j(v) \iff [\tilde{\alpha}_j(u)] = [\tilde{\alpha}_j(v)] \iff \alpha_j(u) \sim \alpha_j(v)$. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die α_j injektiv sind, ist also $\tilde{\alpha}_j(u) \not\sim \tilde{\alpha}_j(v)$ für alle $u, v \in U_j$ mit $u \neq v$.
- [zu 1.] Da π surjektiv ist, ist Punkt 1. aus Definition 7.1 für $\mathcal{A}$ erfüllt.
- [zu 2.] Es seien nun (α_j, U_j) und (α_i, U_i) und $W_{ij} = \alpha_i(U_i) \cap \alpha_j(U_j)$. Dann ist zu zeigen, dass

  $$\alpha_i^{-1} \circ \alpha_j : \alpha_j^{-1}(W_{ij}) \to \alpha_i^{-1}(W_{ij})$$

  differenzierbar ist. Wegen 0. gibt es zu $p \in W_{ij}$ genau ein $u_i \in U_i$ und genau ein $u_j \in U_j$, sodass $\alpha_i(u_i) = [\tilde{\alpha}_i(u_i)] = \alpha_j(u_j) = [\tilde{\alpha}_j(u_j)] = p$. Wir setzen $\tilde{\alpha}_i(u_i) = \tilde{p}_i$ und $\tilde{\alpha}_j(u_j) = \tilde{p}_j$.

  Insbesondere sind also die Abbildung

  $$f_{ij} := \tilde{\alpha}_i \circ \alpha_i^{-1} \circ \alpha_j \circ \tilde{\alpha}_j^{-1} : \tilde{\alpha}_j(\alpha_j^{-1}(W_{ij})) \to \tilde{\alpha}_i(\alpha_i^{-1}(W_{ij}))$$

  bijektiv. Diese liefern gerade die Zuordnungen $\tilde{p}_j \to \tilde{p}_i$.
- [zu 3.] Das muss man gesondert überprüfen: Es stimmt zwar die Quotiententopologie mit der durch $\mathcal{A}$ induzierten Topologie überein, aber im Allgemeinen bleibt die Hausdorff-Eigenschaft beim Bilden der Klasseneinteilung nicht erhalten.
- [zu 4.] Diese Eigenschaft überträgt sich beim Bilden des Quotienten.

Beispiel 7.9. Zur Veranschaulichung des Kommentars unter Punkt [zu 3.] betrachten wir als Fläche die Menge $\tilde{M} = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \cup \mathbb{R}^2 \times \{1\}$. Auf $\tilde{M}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation wie folgt:

$$(\vec{x}, r) \sim (\vec{y}, s) \iff \big((\vec{x}, r) = (\vec{y}, s) \text{ oder } \vec{x} = \vec{y} \neq \vec{0} \big) .$$

Die Äquivalenzklassen sind dann

$$\begin{aligned}[(\vec{x},0)] &= \{(\vec{x},0),(\vec{x},1)\} \quad \text{falls } \vec{x} \neq \vec{0}\,,\\ [(\vec{0},0)] &= \{(\vec{0},0)\}\,,\\ [(\vec{0},1)] &= \{(\vec{0},1)\}\,,\end{aligned}$$

und es ist $\mathbb{R}^2/\sim$ bijektiv zu $\mathbb{R}^2 \cup \{*\}$ durch $[(\vec{x},0)] \mapsto \vec{x}$ und $[(\vec{x},1)] \mapsto *$. Ebenso stimmt die Quotiententopologie auf $\mathbb{R}^2/\sim$ mit der Topologie auf $\mathbb{R}^2 \cup \{*\}$ aus Beispiel 7.4 überein und ist somit nicht hausdorffsch.

Beispiel 7.10 (Spezialisierung von Beispiel 7.8)**.**

Zur weiteren Untersuchung der Kartenübergänge hinsichtlich Definition 7.1.2 betrachten wir nun die folgende spezielle Situation. Die Äquivalenzrelation sei durch eine glatte Abbildung $f : \tilde{M} \to \tilde{M}$ mit $f^2 = id$ wie folgt definiert:

$$\tilde{p} \sim \tilde{q} \iff \big(\,\tilde{p} = \tilde{q} \;\text{ oder }\; \tilde{p} = f(\tilde{q})\,\big)$$

Mit den Bezeichnungen von oben kann nun genau eine der beiden folgenden Situationen vorliegen[(xxviii)]:

a) $\tilde{\alpha}_i(\alpha_i^{-1}(W_{ij})) = \tilde{\alpha}_j(\alpha_j^{-1}(W_{ij}))$ und damit $\tilde{p}_i = \tilde{p}_j$ also $f_{ij} = \mathrm{id}$. Das liefert aber, dass $\alpha_i^{-1} \circ \alpha_j = \tilde{\alpha}_i^{-1} \circ \tilde{\alpha}_j$ glatt ist.

b) $\tilde{\alpha}_i(\alpha_i^{-1}(W_{ij})) \cap \tilde{\alpha}_j(\alpha_j^{-1}(W_{ij})) = \emptyset$ und damit $f_{ij} = f$. Ähnlich zum ersten Fall erhalten wir $\alpha_i^{-1} \circ \alpha_j = \tilde{\alpha}_i^{-1} \circ f \circ \tilde{\alpha}_j$ also eine glatte Abbildung.

1. (Der 2-dimensionale, reell-projektive Raum).

   Wir betrachten $\tilde{M} = S^2$ und die Antipodenabbildung $f : S^2 \to S^2$ mit $f(\tilde{p}) = -\tilde{p}$. Zwei verschiedene Punkte der Sphäre sind also äquivalent, wenn sie sich gegenüber liegen, d.h. im Quotienten

   $$\mathbb{R}P^2 = S^2/\sim$$

   identifizieren wir diese beiden Punkte der Sphäre.

   Wir erinnern uns: Eine Teilmenge des Quotienten ist genau dann offen, wenn ihr Urbild unter der Projektion $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ offen ist. Zum Nachweis der Hausdorff-Eigenschaft konstruieren wir für zwei verschiedene Punkte $p, q \in \mathbb{R}P^2$ zwei offene disjunkte Umgebungen:

[(xxviii)] Dabei setzen wir hier und im Folgenden voraus, dass die Parameterbereiche U_j zusammenhängend sind

Es seien $p = \pi(\tilde{p}) = \{\tilde{p}, f(\tilde{p})\}$ und $q = \pi(\tilde{q}) = \{\tilde{q}, f(\tilde{q})\}$. Wir wählen offene Mengen $\tilde{p} \in \tilde{U} \subset S^2$ und $\tilde{q} \in \tilde{V} \subset S^2$ so, dass $\tilde{U}, \tilde{V}, f(\tilde{U})$ und $f(\tilde{V})$ paarweise disjunkt sind – etwa kleine geodätische Kreisscheiben um die jeweiligen Punkte. Damit sind $p \in U := \pi(\tilde{U}) = \pi(f(\tilde{U}))$ und $q \in V := \pi(\tilde{V}) = \pi(f(\tilde{V}))$ offen in $\mathbb{R}P^2$ und es ist $U \cap V = \emptyset$.

2. (Die Kleinsche Flasche).

   Wir betrachten den Torus als Rotationskörper um die $z - Achse$ und zentriert um zentriert um den Ursprung, $\tilde{M} = T$. Wie im obigen Beispiel ist $f : T \to T$ mit $f(\tilde{p}) := -\tilde{p}$ auch hier wohldefiniert und liefert eine Äquivalenzrelation $\sim$. Die Äquivalenzklasseneinteilung $K := T/\sim$ ist mit der gleichen Begründung wie im ersten Beispiel eine abstrakte Fläche.

Weitere Bemerkungen zu diesen Beispielen:

- Der 2D reell-projektive Raum und die Kleinsche Flasche enthalten jeweils ein Möbiusband: Dazu betrachten wir in Beispiel 1. eine Streifen um den Äquator und im zweiten Beispiel einen Streifen um den großen Breitenkreis. Ein Möbiusband erhält man nun als Bild dieser Streifens unter der natürlichen Projektion π. Insbesondere sind der projektive Raum und die Kleinsche Flasche nicht orientierbar.

- Man kann beide Flächen als parametrisierte Flächenstücke im $\mathbb{R}^3$ realisieren, jedoch sind beide Realisierungen keine Flächen im Sinne von Definition 3.1. Realisieren meint hier, dass die abstrakte Fläche und das Flächenstück diffeomorph sind. Insbesondere ist das Flächenstück in natürlicher Weise mit der ersten Fundamentalform versehen. Da wir aber K und $\mathbb{R}P^2$ noch nicht mit Metriken versehen haben, macht es an dieser Stelle keinen Sinn, zu fragen, ob die Diffeomorphismen auch Isometrien sind. Zum Problem der Existenz einer Metrik auf einer abstrakten Fläche, siehe Satz 7.27.

  – Eine Parametrisierung der Kleinschen Flasche ist durch

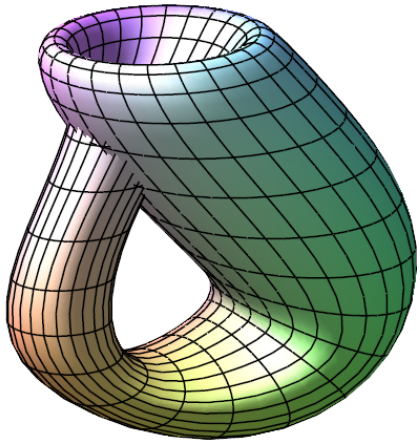
$$\alpha : [0, 2\pi]^2 \to \mathbb{R}^3\,,$$
$$\alpha(s,t) := \begin{pmatrix} 2(1-\sin s)\cos s + (2-\cos s)\cos t\big(2e^{-(\frac{s}{2}-\pi)^2} - 1\big) \\ (2-\cos s)\sin(t) \\ 2\sin s + \frac{1}{2}((1-\cos s))\sin s\cos t e^{-(s-\frac{3\pi}{2})^2} \end{pmatrix}$$

gegeben. Das Ergebnis findet man in Abbildung 19 und eine Konstruktionsanleitung in Abbildung 20.

– Eine Realisierung des $\mathbb{R}P^2$ im $\mathbb{R}^3$ erhält man wie folgt: Man nehme eine Möbisuband und verklebe dessen Rand mit dem Rand einer Kreisscheibe – beide Ränder sind jeweils ein Kreis! Das Ergebnis einer solchen Verklebung liefert die so genannte *Kreuzhaube*, siehe Abbildung 21. Eine Parametrisierung einer solchen Verklebung ist etwa gegeben durch

$$\alpha : [0, 2\pi] \times [0, \tfrac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3\,, \quad \alpha(s,t) = \begin{pmatrix} \cos s \sin(2t) \\ \sin s \sin(2t) \\ \cos^2 t - \cos^2 s \sin^2 t \end{pmatrix}$$

Abbildung 19: Die Kleinsche Flasche im $\mathbb{R}^3$



Beispiel 7.11 (Der flache Torus)**.**

Als weiteres Beispiel betrachten wir $\tilde{M} = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$. Zur Definition einer Äquivalenzrelation auf $\tilde{M}$ fixieren die zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ und setzen

$$(\vec{x}, 0) \sim (\vec{y}, 0) \iff \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \,:\, \vec{x} - \vec{y} = k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2\,.$$

Dann ist die Klasseneinteilung $T_F := \tilde{M}/\sim$ bijektiv zu $Q = [0,1[^2 \times \{0\} \subset \tilde{M}$, denn sind für $[(a,b,0)] \in T_F$ die Zahlen $0 \le \hat{a}, \hat{b} < 1$ die eindeutigen nicht-negativen Ganzteilreste von a und b, so ist $[(a,b,0)] = [(\hat{a},\hat{b},0)]$ und $(\hat{a},\hat{b},0) \in Q$.

Abbildung 20: Konstruktion der Kleinschen Flasche

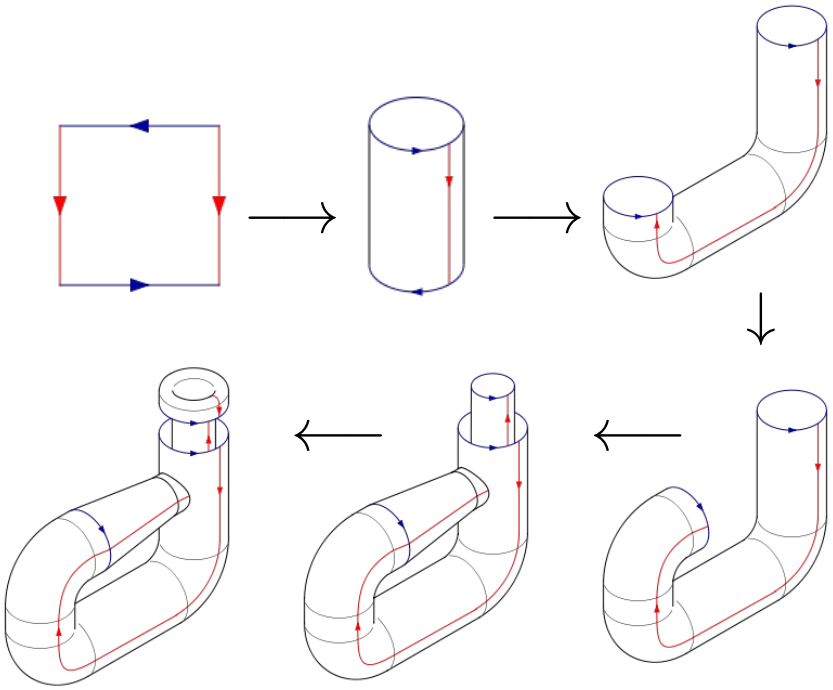
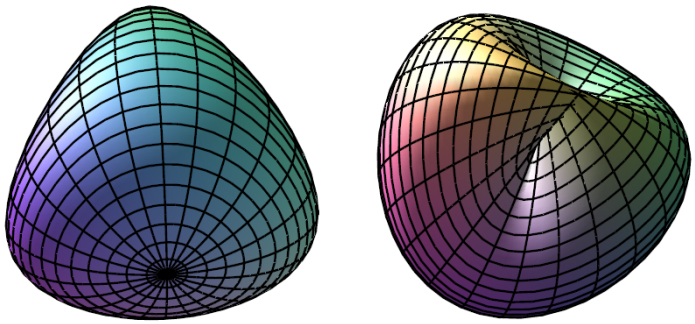


Abbildung 21: Die Kreuzhaube im $\mathbb{R}^3$



Es sei nun $Q_0 :=]0,1[^2$, sodass $Q_0 \times \{0\}$ gerade das Innere von Q ist. Weiter seien $U_1 := \binom{-\epsilon}{-\epsilon} + Q_0$, $U_2 := \binom{\epsilon}{-\epsilon} + Q_0$, $U_3 := \binom{\epsilon}{\epsilon} + Q_0$, $U_4 := \binom{-\epsilon}{\epsilon} + Q_0$ offene Teilengen des $\mathbb{R}^2$. Dann sind $\tilde{\alpha}_i : U_i \to \tilde{M}$ mit $\tilde{\alpha}_i = id \times \{0\}$ Parametrisierungen von $\tilde{M}$.

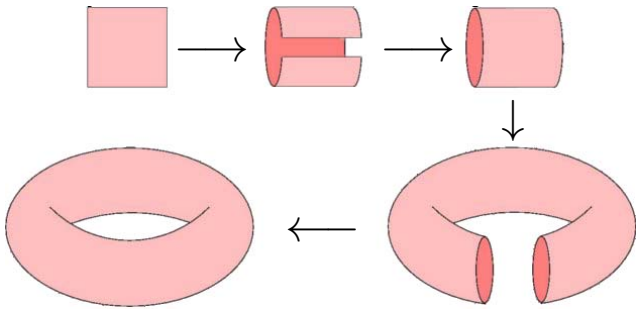
Wegen der Wahl von Q_0 sind die $\alpha_i = \pi \circ \tilde{\alpha}_i : U_i \to T_F$ injektiv und, da die Bilder $\tilde{\alpha}_i(U_i)$ die Teilmenge $Q \subset \tilde{M}$ überdecken, überdecken die Bilder $\alpha_i(U_i)$ ganz T_F. Sie liefern dann einen Atlas bei dem jede Übergangsfunktion die Identität ist.

Dass die Topologie hausdorffsch ist zeigt man wieder, indem man als offene Umgebungen zweier unterschiedlicher Äquivalenzklassen wieder die Bilder hinreichend kleiner offenere Umgebungen von Repräsentanten wählt.

Die so entstandene abstrakte Fläche nennt man den *flachen Torus*. Sie lässt sich als Fläche in $\mathbb{R}^3$ realisieren und ist uns hinlänglich bekannt: betrachte die Abbildung $T_F \to [0,1[^2 \to T$ gemäss der Konstruktion in Abbildung 22.

Der Zusatz „flach“ im Namen dieser abstrakten Fläche bekommt ihren Sinn auch erst später, wenn wir Metriken auf abstrakten Flächen einführen. Insbesondere ist für eine kanonisch gewählte Metrik auf T_F der in Abbildung 22 definierte Diffeomorphismuskeine Isometrie, wenn man T mit der ersten Fundamentalform versieht.

Abbildung 22: Die Abbildung $T_F \to T$



Beispiel 7.12 (Eine explizite Parametrisierung von $\mathbb{R}P^2$)**.**

Betrachten wir auf der Menge $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die Äquivalenzrelation

$$\vec{x} \sim \vec{y} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \vec{x} = k\vec{y},$$

so entspricht die Äquivalenzklasse $[\vec{x}]$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ der Geraden durch den Ursprung mit Richtungsvektor $\vec{x}$ – allerdings ohne den Ursprung selbst. Insbesondere ist die Klasseneinteilung $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}/\sim$ homöomorph zu $\mathbb{R}P^2$ gemäß Beispiel 7.10.1. Diese Sichtweise hat den Vorteil, dass wir auf die Normierung des Repräsentanten verzichten können.

Wir betrachten die drei Abbildungen $\alpha_i : U_i \to \mathbb{R}P^2$ mit $U_i := \mathbb{R}^2$ und

$$\alpha_1(u^1,u^2) := [(1,u^1,u^2)]\,, \quad \alpha_2(u^1,u^2) := [(u^1,1,u^2)]\,,$$
$$\alpha_3(u^1,u^2) := [(u^1,u^2,1)]\,.$$

Man überzeugt sich leicht davon, dass diese drei Karten $\mathbb{R}P^2$ überdecken. Um die Kartenübergänge $\alpha_i^{-1} \circ \alpha_j$ zu berechnen, benötigen wir ihr gemeinsames Bild $\alpha_i(\mathbb{R}^2) \cap \alpha_j(\mathbb{R}^2) = \{[(x^1,x^2,x^3)] \,|\, x^i, x^j \neq 0\} \subset \mathbb{R}P^2$. Aus Symmetriegründen beschränken wir uns auf $i = 1$ und $j = 2$. Für $p \in \alpha_1(\mathbb{R}^2) \cap \alpha_2(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$p = \alpha_2(u,v) = [(u,1,v)] = [(1,\tfrac{1}{u},\tfrac{v}{u})] = \alpha_1(\tfrac{1}{u},\tfrac{v}{u})\,.$$

Damit ist

$$\alpha_1^{-1} \circ \alpha_2(u,v) = \left(\frac{1}{u},\frac{v}{u}\right)$$

und ist differenzierbar.

Im Hinblick auf Beispiel 7.10 wird unser hier konstruierter Atlas von dem Atlas auf S^2 induziert, der aus 6 Karten besteht und jeweils eine offene Rotationshalbsphäre um die Koordinatenachsen abdeckt. Für die x-Achse sind das etwa $\tilde{\alpha}_1(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}(1,u,v)$ und $\tilde{\alpha}_4(u,v) = \frac{1}{1+u^2+v^2}(-1,-u,-v) = -\alpha_1(u,v)$. Nach der Verknüpfung mit der Projektion $\pi : S^2 \to \mathbb{R}P^2$ liefern diese zwei dann die gleiche Karte, nämlich $\alpha_1 = \pi \circ \tilde{\alpha}_1 = \pi \circ \tilde{\alpha}_4$.

7.2 Tangentialraum und Metrik

Wiederholung: Es sei M eine Fläche oder ein parametrisiertes Flächenstück gemäß Definition 3.1 oder 3.3, und $c : I =]-\epsilon,\epsilon[\to M$ eine Kurve durch $p = c(0)$. Weiter sei $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung und $\beta = (c^1,c^2) : I \to U$ die Kurve im Parameterbereich mit $c = \alpha \circ \beta$, insbesondere ist also $c(I) \subset \alpha(U)$. Dann ist

$$\dot{c}(t) = \frac{d}{dt}(\alpha \circ \beta)(t) = \dot{c}^1(t)\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(\beta(t)) + \dot{c}^2(t)\frac{\partial \alpha}{\partial u^1}(\beta(t))$$

Nun sei $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \to M$ eine weitere Parametrisierung – wobei wir voraussetzen, dass $\tilde{\alpha}(\tilde{U}) = \alpha(U)$ gilt – und $\tilde{\beta} = (\tilde{c}^1,\tilde{c}^2) : I \to \tilde{U}$ mit $c = \tilde{\alpha} \circ \tilde{\beta}$, so gilt

$$\dot{c}^i = \sum_{j=1}^{2} \dot{\tilde{c}}^j \frac{\partial(\alpha^{-1} \circ \tilde{\alpha})^i}{\partial \tilde{u}^j}\,.$$

Sei nun $f \in C^\infty(M)$ eine differenzierbare Funktion, dann ist $f \circ c : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und bezüglich der Karte α rechnen wir

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha \circ \beta)(t) = \sum_{j=1}^{2} \dot{c}^j(t) \frac{\partial (f \circ \alpha)}{\partial u^j}(\beta(t)) \,.$$

Obwohl sie in die Rechnung einfließt, hängt die rechte Seite nicht von der Wahl der Parametrisierung ab.

Wir führen nun die folgende neue Schreibweise ein:

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p (f) := \frac{\partial (f \circ \alpha)}{\partial u^j}(\alpha^{-1}(p))$$

und interpretieren $\frac{\partial}{\partial u^j}\big|_p$ als Operator, der einer Funktion $f \in C^\infty(M)$ gemäß der obigen Vorschrift eine reelle Zahl zuordnet. Dieser Operator hängt von der gewählten Parametrisierung ab und bei Änderung der Parametrisierung transformiert er sich wie folgt:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{2} \frac{(\alpha^{-1} \circ \tilde{\alpha})^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\alpha}^{-1}(p)) \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p \,.$$

In Termen dieser Operatoren schreibt sich die Ableitung von $f \circ c$ an der Stelle $t = 0$ als

$$\frac{d}{dt}(f \circ c)(0) = \Big(\dot{c}^1(0) \frac{\partial}{\partial u^1}\Big|_p + \dot{c}^2(0) \frac{\partial}{\partial u^2}\Big|_p\Big)(f) \,.$$

In dieser Form läßt sich der Tangentialvektor $\dot{c}(0) \in T_pM$ der Fläche als Operator auffassen:

$$\dot{c}(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \dot{c}(0)(f) := \frac{d}{dt}(f \circ c)(0) \,.$$

In der lokalen Karte läßt sich das bezüglich der Operatoren $\frac{\partial}{\partial u^j}\big|_p$ ausdrücken:

$$\dot{c}(0) = \dot{c}^1(0) \frac{\partial}{\partial u^1}\Big|_p + \dot{c}^2(0) \frac{\partial}{\partial u^2}\Big|_p$$

Im Gegensatz zu den Operatoren $\frac{\partial}{\partial u^j}\big|_p$ selbst, hängt die rechte Seite hier nicht von der Wahl der Parametrisierung ab.

$\dot{c}(0)$ als Operator hat die folgende Eigenschaften: Sind $f, g \in C^\infty(M)$ Funktionen auf M und $\rho \in \mathbb{R}$ so gilt

$$\dot{c}(0)(\rho\, f + g) = \rho\, \dot{c}(0)(f) + \dot{c}(0)(g) \,,$$

$$\dot{c}(0)(fg) = \dot{c}(0)(f)g(p) + f(p)\dot{c}(0)(g)\,.$$

Insbesondere ist $\dot{c}(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

Diese Vorüberlegungen motivieren nun die Definition des Tangentialvektors auf einer abstrakten Fläche.

Definition 7.13. Es sei M eine abstrakte Fläche und $p \in M$. Eine Abbildung $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ heißt *Tangentialvektor an M in p*, wenn es eine Kurve $c :]-\epsilon, \epsilon[\to M$ mit $c(0) = p$ gibt, sodass

$$v(f) = \dot{c}(0)(f)\,.$$

für alle $f \in C^\infty(M)$. Hierbei ist der Tangentialvektor $\dot{c}(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ definiert durch $\dot{c}(0)(f) := \frac{d}{dt}(f \circ c)(0)$. Die Menge aller Tangentialvektoren in $p \in M$ nennen wir *Tangentialraum in $p \in M$* und bezeichnen ihn mit T_pM.

Bemerkung 7.14. Es sei $c : I =]-\epsilon, \epsilon[\to M$ eine Kurve auf der abstrakten Fläche M und $v = \dot{c}(0) \in T_pM$. Weiter sei $\alpha : U \to M$ eine Karte mit $c(I) \subset \alpha(U)$ und $\beta = (c^1, c^2) : I \to U$ mit $c = \alpha \circ \beta$. Dann ist wegen $f \circ c = f \circ \alpha \circ \beta$

$$\dot{c}(0)(f) = \Big(\dot{c}^1(0)\frac{\partial}{\partial u^1}\Big|_p + \dot{c}^2(0)\frac{\partial}{\partial u^2}\Big|_p\Big)(f)$$

mit

$$\frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p(f) := \frac{d}{dt}(f \circ \alpha^j)(0)$$

wobei

$$\alpha^1(t) := \alpha(u_0^1 + t, u_0^2)\,, \quad \alpha^2(t) := \alpha(u_0^1, u_0^2 + t)$$

die Koordinatenlinien durch $p = \alpha(u_0^1, u_0^2)$ bezeichnen. Damit ist

$$T_pM = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial u^1}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial u^2}\Big|_p \right\}.$$

wobei das Transformationsverhalten der Basis beim Übergang zu einer anderen Karte $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \to M$ durch

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{u}^i}\Big|_p = \sum_{j=1}^{2} \frac{(\alpha^{-1} \circ \tilde{\alpha})^j}{\partial \tilde{u}^i}(\tilde{\alpha}^{-1}(p))\frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p\,.$$

gegeben ist. Wegen der Ausführungen in der Vorbemerkung, stimmt diese Definition des Tangentialraums für den Fall, dass M eine Fläche ist, mit Definition 3.10 und Satz 3.27 überein.

Folgerung 7.15. Ist $v \in T_pM$ ein Tangentialvektor auf der abstrakten Fläche M, so gilt

$$v(f+g) = v(f) + v(g) \quad \text{und} \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)\,.$$

Definition 7.16. Es sei M eine abstrakte Fläche und $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung. Dann nennt man die Zuordnungen

$$\frac{\partial}{\partial u^j} : p \in M \mapsto \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p$$

lokale Basisfelder. Damit definieren wir für $\alpha(U) \subset M$ die Abbildungen

$$\frac{\partial}{\partial u^j} : C^\infty(\alpha(U)) \to C^\infty(\alpha(U))$$
$$\frac{\partial}{\partial u^j} : f \mapsto \frac{\partial}{\partial u^j}(f) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial}{\partial u^j}(f) : p \mapsto \frac{\partial}{\partial u^j}\Big|_p(f)\,.$$

Definition 7.17. Es sei M eine abstrakte Fläche. Ein *Vektorfeld* auf M ist eine Zuordnung

$$X : M \ni p \mapsto X_p \in T_pM\,.$$

Ein Vektorfeld heißt glatt, wenn für alle $f \in C^\infty(M)$ die Abbildung

$$X(f) : M \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad X(f) : p \mapsto X_p(f)$$

glatt ist. Die Menge aller glatten Vektorfelder bezeichnen wir mit $\mathfrak{X}(U)$.

Bemerkung 7.18.

1. Es sei $\alpha : U \to M$ eine Parametrisierung der abstrakten Fläche M. Dann sind die (lokalen) Vektorfelder $\frac{\partial}{\partial u^j} \in \mathfrak{X}(\alpha(U))$ glatt.

2. Ist X ein Vektorfeld, so läßt sich X_p für $p \in \alpha(U)$ schreiben als $X_p = X^1(p)\frac{\partial}{\partial u^j}\big|_p + X^2(p)\frac{\partial}{\partial u^2}\big|_p$. Dann ist X glatt, genau dann, wenn $p \mapsto X^1(p)$ und $p \mapsto X^2(p)$ glatt sind. Damit lässt sich X lokal schreiben als
$$X = X^1\frac{\partial}{\partial u^j} + X^2\frac{\partial}{\partial u^2}$$
mit $X^1, X^2 \in C^\infty(\alpha(U))$.

3. Ist X ein glattes Vektorfeld, so gilt mit den Bezeichnungen aus Definition 7.17 für alle $f, g \in C^\infty(M)$
$$X(f+g) = X(f) + X(g) \quad \text{und} \quad X(fg) = gX(f) + fX(g)\,. \qquad (3)$$

Die Art, wie Tangentialvektoren und nun auch Vektorfelder auf Produkte wirken, hat offensichtlich eine besondere Bedeutung.

Definition 7.19. 1. Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum A heißt $\mathbb{R}$-Algebra, wenn es auf A ein $\mathbb{R}$-bilineares Produkt gibt. Das heißt es gibt eine Abbildung $A \times A \to A$, $(a, b) \mapsto ab$, sodass $a(b + c) = ab + ac$, $(b + c)a = ba + ca$ und $a(\rho b) = (\rho a)b = \rho(ab)$ für alle $a, b, c \in A$ und $\rho \in \mathbb{R}$. Beispiele für $\mathbb{R}$-Algebren sind der Körper $\mathbb{R}$ selbst und die Menge $C^\infty(M)$.

2. Es sei A eine $\mathbb{R}$-Algebra. Ein Endomorphismus $\Phi : A \to A$ heißt *Derivation*, wenn
$$\Phi(ab) = \Phi(a)b + a\Phi(b)$$
für alle $a, b \in A$. Die Menge aller Derivationen auf A wird mit $\mathfrak{Der}(A) \subset \mathrm{End}(A)$ bezeichnet.

3. Ist speziell $A = C^\infty(M)$ und $p \in M$, dann nennt man eine lineare Abbildung $\Phi : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ eine *Derivation in p*, wenn
$$\Phi(gf) = g(p)\Phi(f) + f(p)\Phi(g)$$
für alle $f, g \in C^\infty(M)$ gilt. Die Menge aller Derivationen in p wird mit $\mathfrak{Der}_p(C^\infty(M)) \subset \mathrm{Hom}(C^\infty(M), \mathbb{R})$ bezeichnet.

Bemerkung 7.20. Derivationen in p gemäß Definition 7.19.3 haben die folgende Eigenschaft: Sind $f, g \in C^\infty(M)$ und gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von p, sodass $g|_U = f|_U$, so gilt $v(f) = v(g)$ für alle $v \in \mathfrak{Der}_p(C^\infty(M))$.

Daher kann man die Definition von $\mathfrak{Der}_p(C^\infty(M))$ etwas „verfeinern“. Dazu betrachten wir auf $C^\infty(M)$ die Äquivalenzrelation
$$f \sim g \iff \exists U \subset M \text{ offen} : p \in U \text{ und } f|_U = g|_U .$$
Die zugehörige Äquivalenzklasseneinteilung bezeichnen wir mit $C^\infty_p(M) := C^\infty(M)/\sim$. Dies ist ebenfalls eine $\mathbb{R}$-Algebra und es gibt die repräsentantenunabhänige Auswertungsabbildung $M \ni p \mapsto [f](p) := f(p)$. Damit gilt dann $\mathfrak{Der}_p(C^\infty_p(M)) = \mathfrak{Der}_p(C^\infty(M))$ mit Bezeichnungen analog zu Definition 7.19.3.

Es gelten insbesondere die Umkehrungen von Folgerung 7.15 und Bemerkung 7.18.

Satz 7.21. *Es sei M eine abstrakte Fläche und $p \in M$. Weiter sei $\mathfrak{X}(M)$ die Menge der glatten Vektorfelder und T_pM der Tangentialraum in p. Dann gilt*

$$\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{Der}(C^\infty(M)) \quad \textit{und} \quad T_pM = \mathfrak{Der}_p(C^\infty(M))\,.$$

Bemerkung 7.22. Es seien M, N abstrakte Flächen und $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Weiter sei $v \in T_pM$ ein Tangentialvektor, der durch die Kurve $c : I =]-\epsilon, \epsilon[\to M$ realisiert wird, also $v = \dot{c}(0)$ oder $v(f) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(0)$ für alle $f \in C^\infty(M)$. Dann ist $\tilde{c} := F \circ c : I \to M$ eine Kurve auf N mit $\tilde{c}(0) = F(p)$ und es ist $w := \dot{\tilde{c}}(0) \in T_{F(p)}N$. Die Berechnung von w ist unabhängig von der Wahl der Kurve c, die v realisiert, und hängt somit nur von F und v ab.

Das motiviert die folgende Definition.

Definition 7.23. Es seien M, N abstrakte Flächen und $F : M \to N$ eine glatte Abbildung. Dann ist das *Differential von F in p* definiert als die lineare Abbildung $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$ mit

$$d_pF(v) = \dot{\tilde{c}}(0)\,,$$

wobei $\tilde{c} = F \circ c$ und $c : I \to M$ den Tangentialvektor $v \in T_pM$ realisiert.

Bemerkung 7.24. Das Differential der glatten Abbildung $F : M \to N$ lässt sich auch wie folgt beschreiben. Es sei $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ ein Tangentialvektor in T_pM. Der Tangentialvektor $d_pF(v) : C^\infty(N) \to \mathbb{R}$ in $T_{F(p)}N$ ist dann gegeben durch

$$d_pF(v)(f) = v(f \circ F)$$

für alle $f \in C^\infty(N)$.

Bemerkung 7.25. Gegeben seien zwei Parametrisierungen $\alpha : U \to M$ und $\tilde{\alpha} : \tilde{U} \to N$ von M und N mit $F(\alpha(U)) \subset \tilde{\alpha}(\tilde{U})$. Dann ist für $v = \sum_{i=1}^{2} v^i \frac{\partial}{\partial u^i}\big|_p \in T_pM$

$$d_pF(v) = w = \sum_{j=1}^{2} w^j \frac{\partial}{\partial \tilde{u}^j}\Big|_{F(p)} \quad \text{mit} \quad w^j = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \hat{F}^j}{\partial u^i}(\alpha^{-1}(p))v^i\,,$$

wobei $\hat{F}^j$ die j-te Komponente von $\hat{F} = (\tilde{\alpha}^{-1} \circ F \circ \alpha)^j : U \to \tilde{U}$. Daraus folgt die Linearität von $d_pF : T_pM \to T_{F(p)}N$. Weiter ist $D_{\alpha(p)}\hat{F}$ die Matrixdarstellung von d_pF bezüglich der Basen $\left\{\frac{\partial}{\partial u_i}\big|_p\right\}$ von T_pM und $\left\{\frac{\partial}{\partial \tilde{u}_i}\big|_{F(p)}\right\}$ von $T_{F(p)}M$.

Definition/Bemerkung 7.26. Es sei M eine abstrakte Fläche. Eine Zuordnung $g : p \mapsto g_p$, die jedem $p \in M$ ein Skalarprodukt $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ zuordnet, heißt *glatt*, wenn es eine Parametrisierung $\alpha : U \to M$ gibt, sodass die lokalen Funktionen $g_{ij} : \alpha(U) \to \mathbb{R}$ mit

$$g_{ij}(p) := g_p\Big(\tfrac{\partial}{\partial u^i}\big|_p, \tfrac{\partial}{\partial u^j}\big|_p\Big)$$

glatt sind. Das ist äquivalent dazu, dass für alle Vektorfelder $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ die Funktionen $g(X, Y) : M \to \mathbb{R}$ mit $g(X, Y) := g_p(X_p, Y_p)$ glatt sind.

Ein solche glatte Verteilung von Skalarprodukten, g, heißt *Riemannsche Metrik* auf M.[xxix]

Die Frage, ob es auf einer abstrakten Fläche stets eine Riemannsche Metrik gibt, beantwortet der folgende Satz.

Satz 7.27. *Auf einer abstrakten Fläche gibt es immer ein Riemannsche Metrik.*

Bemerkung 7.28. Man hat jetzt alle Vorbereitungen, um für abstrakte Flächen alle Rechnungen und Begriffe aus den vorigen Kapiteln zu übernehmen, die sich nur mit Hilfe der ersten Fundamentalform beschreiben lassen.

So kann man analog zu den Ausführungen in Kapitel 5 und 6 nun Zusammenhänge und deren Krümmungen definieren und, wenn wir eine Riemannsche Metrik haben, macht der Begriff des Levi-Civita Zusammenhangs Sinn. Ebenso lassen sich sämtliche lokalen Größen, wie z.B. die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k und die Krümmungskomponenten $R_{ijk}{}^{\ell}$ berechnen. Ebenso bekommt man analog die Begriffe parallel, Paralleltransport und damit den Begriff der Geodäte sowie Exponentialabbildung und geodätische Polarkoordinaten.

[xxix] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

A Grundlagen Lineare Algebra & Analysis

A.1 Lineare Algebra

Grundbegriffe: Vektorraum (hier in der Regel dim $< \infty$), Matrix, linear abhängig und linear unabhängig, Basis, Erzeugendensystem, lineare und bilineare Abbildungen, Matrixdarstellungen, Eigenwerte, Eigenvektoren.

Die Grundlage bildet in dieser Vorlesung der Zahlenraum $\mathbb{R}^n$ sowie dessen Untervektorräume. Obwohl wir uns im Folgenden auf die Fälle $n = 2, 3$ beschränken, werden wir Aussagen, die für beide Fälle – und eigentlich für beliebige $n \in \mathbb{N}$ – gültig sind, allgemein formulieren und dann ggf. spezialisieren.

Bezeichnung A.1. Die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ bezeichnen wir mit

$$\mathcal{E} = \left\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ bzw.}$$
$$\mathcal{E} = \left\{ \vec{\epsilon}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\epsilon}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Bemerkung A.2.

- Es sei $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und es sei $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ definiert durch die *Linearkombination*

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= a_{11}\vec{w}_1 + a_{12}\vec{w}_2 + a_{13}\vec{w}_3 \\ \vec{v}_2 &= a_{21}\vec{w}_1 + a_{22}\vec{w}_2 + a_{23}\vec{w}_3 \\ \vec{v}_3 &= a_{31}\vec{w}_1 + a_{32}\vec{w}_2 + a_{33}\vec{w}_3 \end{aligned}$$

Das letzte läßt sich kompakter in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_2 \\ \vec{w}_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Dann gelten folgende Äquivalenzen:

$\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ ist eine Basis
$\Leftrightarrow$ A ist invertierbar
$\Leftrightarrow$ A hat maximalen Zeilenrang, nämlich $\mathrm{Zrg}(A) = 3$
$\Leftrightarrow$ A hat maximalen Spaltenang, nämlich $\mathrm{Srg}(A) = 3$

$\Leftrightarrow$ A hat maximalen Rang, nämlich $\mathrm{rg}(A) = 3$

$\Leftrightarrow$ A hat nach Durchführung des Gauß-Algorithmus[(xxx)] keine Nullen auf der Diagonalen

$\Leftrightarrow$ A hat nichtverschwindende Determinante, $\det(A) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ A hat nur nichtverschwindende (ggf. komplexe) Eigenwerte

- Ist $\mathcal{V}$ ebenfalls eine Basis, dann nennt man die Matrix A die *Basiswechselmatrix* (von der Basis $\mathcal{V}$ zur Basis $\mathcal{W}$).
- Ist $\mathcal{W} = \mathcal{E}$ die Standardbasis, und schreibt man statt $\vec{v}_i = \sum_{k=1}^{3} a_{ik}\vec{e}_k$ wie üblich $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ a_{i3} \end{pmatrix}$, dann sieht man, dass die Vektoren $\vec{v}_i$ gerade die Spalten von A liefern.
- Diese Aussagen gelten für $n = 2$ (und für $n > 3$) komplett analog.

Bemerkung A.3.

- Die Menge aller $m \times n$-Matrizen bezeichnen wir mit $M_{m,n}\mathbb{R}$. Ist $m = n$, so schreiben wir $M_n\mathbb{R} := M_{n,n}\mathbb{R}$.
- Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen bezeichnen wir mit

$$GL_n\mathbb{R} := \{A \in M_{\mathbb{R}} \mid \det(A) \neq 0\} \subset M_n\mathbb{R}\,.$$

  $GL_n\mathbb{R}$ ist bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe.
- Es sei $C \in M_n\mathbb{R}$. A heißt *diagonalisierbar*, wenn es reelle Zahlen $\{a_1, \ldots, a_n\}$ und eine Matrix $A \in GL_n\mathbb{R}$ gibt, sodass

$$A^{-1}CA = \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

- Sind $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ und $\mathcal{W} = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_n\}$ Basen des $\mathbb{R}^n$, dann gibt es eine Matrix $A \in GL_n\mathbb{R}$, sodass

$$W = A^{-1}VA\,,$$

  wobei V die Matrix ist deren Spalten gerade die Vektoren aus $\mathcal{V}$ sind und analog für W. A heißt dann die *Basiswechselmatrix*.

Definition A.4. 1. Ein Vektorraum V wird durch die Fixierung einer symmetrischen, positiv definiten Bilinearform g zu einem *euklidischen Vektorraum*[xxxi]. Solch ein g heißt auch *Skalarprodukt*.

2. Durch
$$\|\cdot\|_g : V \to \mathbb{R} \text{ mit } \|\vec{v}\|_g := \sqrt{g(\vec{v},\vec{v})}$$
wird eine Norm auf V erklärt.

3. Der *Winkel* (*bezüglich* g) zwischen zwei Vektoren $\vec{v},\vec{w} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ ist definiert durch
$$\cos(\varphi) = \frac{g(\vec{v},\vec{w})}{\|\vec{v}\|_g \|\vec{w}\|_g}\,.$$

4. $\vec{v},\vec{w} \in V$ heißen *orthogonal*, wenn der Winkel zwischen den beiden $\cos(\varphi) = 0$ erfüllt, also: $\vec{v} \perp \vec{w} \iff g(\vec{v},\vec{w}) = 0$. Insbesondere ist der Nullvektor $\vec{0}$ senkrecht zu allen Vektoren.

Wir verwenden im Folgenden lediglich das Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^n$ und damit zusammenhängende Skalarprodukte auf Untervektorräumen von $\mathbb{R}^n$.

Beispiel A.5. • Die Abbildung
$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{mit}$$
$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle := v^1w^1 + v^2w^2 + \cdots + v^nw^n$$
für $\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ heißt das *Standardskalarprodukt des* $\mathbb{R}^n$. In diesen Fällen gibt die Norm $\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}$ gerade die Länge des Vektors $\vec{v}$ und berechnet sich zu
$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(v^1)^2 + (v^2)^2 + \ldots (v^n)^2}.$$
Das ist der *Satz von Pythagoras*.

• Für $n = 2$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist
$$\langle\vec{v},\vec{w}\rangle = v^1w^1 + v^2w^2 \quad \text{und} \quad \|\vec{v}\|^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2\,.$$

[xxxi] Euklid von Alexandria (3. Jhd. v. Chr.)

$$\text{Für } n = 3 \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ ist}$$

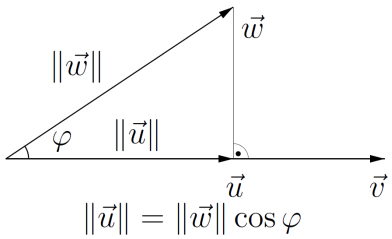
$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3 \quad \text{und} \quad \|\vec{v}\|^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 \,.$$

Bemerkung A.6. Als Norm erfüllt $\|\cdot\|$ die folgenden (Un-)Gleichungen:

Dreiecksungleichung:	$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$
Cauchy-Schwarz-Ungleichung [xxxii]:	$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \|\vec{w}\|^2$
Parallelogrammgleichung:	$2\|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2$

Bemerkung A.7 (Geometrische Interpretation des Skalarproduktes)**.** Es seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ zwei Vektoren und $\vec{u}$ die Projektion von $\vec{w}$ auf die Gerade, die von $\vec{v}$ aufgespannt wird. Dann entspricht der Betrag des Skalarproduktes von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ der Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $\|\vec{v}\|$ und $\|\vec{u}\|$, siehe Abbildung 23.

Abbildung 23: Skalarprodukt



Wegen der Symmetrie von $\langle \cdot, \cdot \rangle$ liefert ein Vertauschen der Vektoren in der Konstruktion ein weiteres aber in der Regel anderes Rechteck mit dem gleichen Flächeninhalt.

Definition A.8. Auf $\mathbb{R}^3$ gibt es eine bilineare Abbildung, die zwei Vektoren einen neuen Vektor zuordnet. Dieses Produkt nennen wir *Kreuzprodukt*

$$\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \text{mit} \quad (\vec{v}, \vec{w}) \mapsto \vec{v} \times \vec{w} \,.$$

Diese Abbildung ist durch folgende Eigenschaften eindeutig charakterisiert:

1. Ist $\varphi \in [0, \pi[$ der Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$, so ist

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| := \|\vec{v}\| \|\vec{w}\| \sin(\varphi)$$

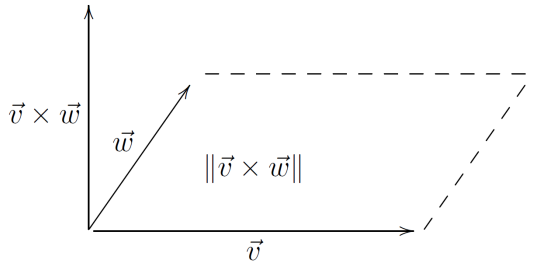
2. Ist $\|\vec{v}\times\vec{w}\| \neq 0$ so ist $\vec{v}\times\vec{w} \perp \vec{v}$ und $\vec{v}\times\vec{w} \perp \vec{w}$ sowie $\det(\vec{v},\vec{w},\vec{v}\times\vec{w}) > 0$

Insbesondere ist $\times$ schiefsymmetrisch und es gilt $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ genau dann, wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.

Bemerkung A.9.

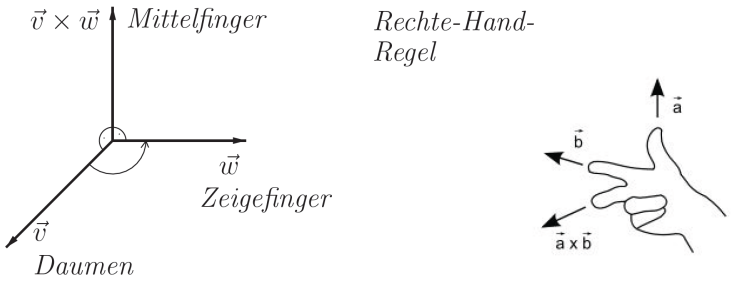
- Die Eigenschaft 1. fixiert die Länge des Vektors $\vec{v} \times \vec{w}$ und die Eigenschaft 2. seine Richtung.
- Wegen der Eigenschaft 1. haben wir die folgende geometrische Interpretation: die Länge $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$ entspricht der Fläche des von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ gebildeten Parallelogramms. Wegen der Eigenschaft 2. steht der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ senkrecht auf diesem Parallelogramm, siehe Abbildung 24.

Abbildung 24: Kreuzprodukt



- Wegen der Eigenschaft 2. gilt die "Rechte-Hand-Regel", siehe Abbildung 25.

Abbildung 25



- Sind $\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$, so ist

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v^2 w^3 - v^3 w^2 \\ v^3 w^1 - v^1 w^3 \\ v^1 w^2 - v^2 w^1 \end{pmatrix} .$$

Satz A.10. *Es sei $V \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum, dann ist für $\vec{v}, \vec{w} \in V$ durch*

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle_V := \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

eine bilineare Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_V : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert. Diese ist ein Skalarprodukt auf V, das vom Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Skalarprodukt auf V.

Bemerkung A.11.

- Es sei b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Für fixiertes $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist die Abbildung $\vec{w} \mapsto b(\vec{v}, \vec{w})$ eine lineare Abbildung. Man sagt b ist entartet, wenn es ein $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$ gibt, sodass diese Abbildung $b(\vec{v}, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Nullabbildung ist. Insbesondere gibt es dann in der Sylvester-Form[xxxiii] von b mindestens eine Null auf der Diagonalen.

- Es sei b eine beliebige Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann induziert diese wie oben eine Bilinearform b_V auf jeden Unterraum V. Auch wenn b nicht-entartet ist, so muss dieses für b_V im Allgemeinen nicht gelten. Insbesondere sind Skalarprodukte nicht-entartet und wir sehen, dass die positive Definitheit für die Vererbung dieser Eigenschaft eine wichtige Rolle spielt.

- *Beispiel:* Betrachte $\mathbb{R}^3$ mit der Bilinearform $b(\vec{v}, \vec{w}) = -v^1 w^1 + v^2 w^2 + v^3 w^3$. Diese ist nicht-entartet, denn sie hat die Sylvester-Form $\mathrm{diag}(-1, 1, 1)$, z.B. bezüglich der Standardbasis $\mathcal{E}$ von $\mathbb{R}^3$. Weiter sei $V = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2, \vec{\epsilon}_3\} \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist $b_V : V \times V \to \mathbb{R}$ entartet, denn $b_V(\vec{\epsilon}_1 + \vec{\epsilon}_2, \cdot) : V \to \mathbb{R}$ ist die Nullabbildung. Insbesondere liefert die gewählte Basis schon die Sylvester-Form $\mathrm{diag}(0, 1)$ für b_V.

Definition A.12.

- Eine Basis $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ eines euklidischen Vektorraums (V, g) heißt *Orthonormalbasis (ONB)*, wenn[xxxiv]

$$g(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

[xxxiii] James Joseph Sylvester (1814-1897)

[xxxiv] Das so definierte Objekt δ_{ij} heißt auch *Kronecker-Symbol*.

für alle $i, j = 1, \ldots, n$.

- Zwei ONB heißen *orientierungsäquivalent*, wenn die verbindende Basiswechselmatrix positive Determinante hat.

Bezeichnung A.13. Im $\mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt nennen wir eine ONB $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ *positiv*, wenn die Basiswechselmatrix zur Standardbasis positive Determinante hat. Das heißt, die Komponentendarstellung bezüglich der Standardbasis erfüllt $\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) > 0$.

Beispiel A.14.
- Die Standardbasen von $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind positive ONB bezüglich der Standardskalarprodukte.
- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine negative ONB des $\mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarproduktes.

Satz A.15 (Gram-Schmidt-Verfahren[xxxv])**.** *Man kann nun zu einer vorgegebenen Basis $\mathcal{V} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ eine ONB $\mathcal{O} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ finden, sodass*

i. $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\} = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_k\}$ *für alle* $k = 1, \ldots, n$, *und*

ii. $\langle \vec{v}_k, \vec{e}_k \rangle > 0$ *für alle* $1 \leq k \leq n$.

Bemerkung A.16.
- Zum Beweis definiert man induktiv $\vec{e}_1 := \frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1$ und $\vec{e}_k := \frac{1}{\|\vec{u}_k\|}\vec{u}_k$ mit $\vec{u}_k := \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle \vec{v}_k, \vec{e}_j \rangle \vec{e}_j$ für $k = 2, \ldots, n$.
- Bei diesem Verfahren erhält man außerdem
$$\det(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) = \det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n).$$
- Führt man das GSV nur bis zum zweitletzten Schritt wie oben aus und erhält sich die Freiheit in der Wahl des Vorzeichens von $\vec{e}_n$, so kann man auf diese Art stets eine positive ONB konstruieren (dabei geht ggf. die Eigenschaft ii. verloren).

Bemerkung A.17.
- Ist $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ eine positive ONB des $\mathbb{R}^3$ so gilt
$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= -\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \end{aligned}$$

[xxxv] Jørgen Pedersen Gram (1850-1916), Erhard Schmidt (1876-1959)

- Im $\mathbb{R}^2$ ist für $\vec{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ die Menge $\left\{ \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}, \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}_\perp \right\}$ eine positive ONB. Dabei ist $\vec{v}_\perp := \begin{pmatrix} -v^2 \\ v^1 \end{pmatrix}$ und es gilt $\det(\vec{v}, \vec{v}_\perp) = \|\vec{v}\|^2 > 0$
- Es seien $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ die ersten beiden Vektoren beim Anwenden des GSV im $\mathbb{R}^3$. Dann ist $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_1 \times \vec{e}_2\}$ eine ONB des $\mathbb{R}^3$.

Definition/Bemerkung A.18. 1. $A \in GL_n\mathbb{R}$ heißt *orthogonale Abbildung*, wenn

$$\langle A\vec{v}, A\vec{w}) = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad \text{für alle} \quad \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \,.$$

Die Menge aller orthogonalen Abbildungen wird mit $O(n)$ bezeichnet. Diese Abbildungen bilden eine Untergruppe von $GL_n\mathbb{R}$. Eine spezielle Untergruppe von $O(n)$ ist $SO(n) = \{A \in O(n) \,|\, \det(A) = 1\}$ und heißt die Menge der *speziellen orthogonalen Abbildungen*.

2. Eine Abbildung A ist genau dann orthogonal, wenn $A^T A = \mathbb{1}$.
3. Ist $A \in O(3)$ so gilt

$$A\vec{v} \times A\vec{w} = \pm A(\vec{v} \times \vec{w})$$

für alle Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Hierbei ist das Vorzeichen durch $\det(A) = \pm 1$ bestimmt.

4. Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt *Bewegung*, wenn $\|\Phi(\vec{v}) - \Phi(\vec{w})\| = \|\vec{v} - \vec{w}\|$ für alle $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$.

Ist $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Bewegung, so gibt es eine orthogonale Abbildung $A \in O(n)$ und einen Vektor $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $\Phi(\vec{v}) = A\vec{v} + \vec{b}$ für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

5. Eine Bewegung Φ heißt *orientierungserhaltend* oder *positiv*, wenn in der obigen Beschreibung $A \in SO(n)$ ist, und sie heißt *orientierungsumkehrend* oder *negativ*, wenn nicht.
6. Diese Definitionen und Aussagen funktionieren analog für allgemeine euklidische Räume (V, g). Man schreibt dann $SO(V, g) \subset O(V, g) \subset \mathrm{End}(V)$.

Definition/Bemerkung A.19. • Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $A \in \mathrm{End}(V)$. Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt *Eigenwert* von A, wenn es einen Vektor $\vec{v} \in V \setminus \{\vec{0}\}$ gibt, sodass

$$A(\vec{v}) = \lambda\vec{v} \,.$$

Der Vektor $\vec{v}$ heißt dann *Eigenvektor* (von A zum Eigenwert λ)

- Ist $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A, so gilt $\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$. Das Polynom

$$\chi_A(t) := \det(A - t\mathbb{1})$$

heißt *charakteristische Polynom* (von A). Seine Berechnung hängt nicht von der konkreten Wahl der Matrixdarstellung von A ab und die Nullstellen von χ_A sind genau die Eigenwerte von A.

- Schreibt man $\chi_\lambda(t) = (-1)^n\big(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0\big)$ und ist $(A_{ij})_{1,\leq i,j\leq n} \in M_n\mathbb{R}$ eine Matrixdarstellung von A, so gilt insbesondere

$$a_{n-1} = \mathrm{Spur}(A) = A_{11} + A_{22} + \ldots + A_{nn}$$

und

$$a_0 = \det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot A_{n\sigma(n)}$$

- Das charakteristische Polynom kann auch zusätzliche komplexe Nullstellen haben, diese nennen wir auch Eigenewerte von A. Ist insbesondere $V = \mathbb{R}^n$, so gibt zu solch einem komplexen Eigenwert λ dann auch komplexe Eigenvektoren, d.h. $\vec{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

- Eine Matrix $A \in M_n\mathbb{R}$ heißt *diagonalisierbar*, wenn es $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und eine Matrix $V \in GL_n\mathbb{R}$ gibt, sodass

$$V^{-1}AV = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\,.$$

Dann sind die λ_i die Eigenwerte und die Matrix V bekommt man, indem man die Eigenvektoren von A als Spalten in eine Matrix schreibt.

- Hat eine Matrix $A \in M_n\mathbb{R}$ genau n verschiedene, reelle Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, so ist sie diagonalisierbar.

Definition/Bemerkung A.20.

- Ist V ein euklidischer Vektorraum mit Metrik g, dann ist die zu A *adjungierte Abbildung* A^* definiert durch

$$g(A^*\vec{v}, \vec{w}) = g(\vec{v}, A\vec{w}) \quad \text{für alle } \vec{v}, \vec{w} \in V\,.$$

- Im Fall, dass $V = \mathbb{R}^n$ und $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ ist $A^* = A^T$.

- Die Abbildung A heißt *normal*, wenn $A^*A = A^*A$. Normale Abbildungen mit $A^* = A$ heißen *selbstadjungiert* und die mit $A^*A = AA^* = \mathbb{1}$ sind gerade die orthogonalen Abbildungen

- Ist A eine normale Abbildung, dann gibt es (eventuell komplexe) Zahlen $\{\mu_1, \ldots, \mu_n\}$ eine (eventuell komplexe) Matrix V mit $\bar{V}^* V = \mathbb{1}$, sodass

$$V^{-1} A V = \mathrm{Diag}(\mu_1, \ldots \mu_n) \,.$$

  Hierbei bezeichnet $\bar{V}$ die zu V komplex konjugierte Matrix.

- Die i-te Spalte von V ist also der (eventuell komplexe) Eigenvektoren von A zum (eventuell komplexen) Eigenwert μ_i.

- Sind insbesondere $\mu_i \neq \mu_j$ und reell, dann sind die Eigenvektoren zu den beiden Eigenwerten orthogonal.

- Ist A orthogonal so gilt $|\mu_i| = 1$ für alle Zahlen μ_i.

- Ist A selbstadjungiert, dann sind alle Eigenwerte reell und es gibt eine ONB aus Eigenvektoren. Das sind die Spalten der Matrix V, die dann $V^T V = \mathbb{1}$ erfüllt.

Definition/Satz A.21. *E sei V ein euklidischer Vektorraum mit Metrik g. Ist A eine (bezüglich g) selbstadjungierte Abbildung, dann heißt die Abbildung* $R_A : V \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

$$R_A(\vec{v}) := \frac{g(A\vec{v}, \vec{v})}{g(\vec{v}, \vec{v})}$$

der Rayleigh-Quotient von A.[(xxxvi)] *Sind $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ die sortierten Eigenwerte von A, dann gilt*

$$\lambda_1 \leq R_A(\vec{v}) \leq \lambda_n$$

mit Gleichheit bei Einsetzen der zugehörigen Eigenvektoren.

A.2 Analysis

Grundbegriffe: $\mathbb{R}^n$ ist ein topologischer Raum, wobei die Topologie über Kugelumgebungen definiert ist. Dazu benutzen wir den Abstandsbegriff, der über das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ gegeben ist:[(xxxvii)]

$$B_r^n(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \,|\, \|x - y\| < r\} \,.$$

[(xxxvi)] John William Strutt, 3. Baron Rayleigh (1842-1919)

[(xxxvii)] Ab jetzt werden wir auf den Vektorpfeil verzichten. Wir bezeichnen weiterhin die Koordinaten eines Vektors mit oberen Indizes, also $v = (v^1, \ldots v^n)^t \in \mathbb{R}^n$.

Manchmal lassen wir den oberen Index weg und schreiben $B_r(x)$, wenn aus dem Kontext die Dimension n klar ist. Spezielle Bezeichnungen: $B_r^n := B_r^n(0)$ und $B^n := B_1^n = B_1^n(0)$. Eine damit im Zusammenhang stehende weitere Menge ist

$$S_r^{n-1}(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| = r\}\,.$$

Wir schreiben speziell $S_r^{n-1} := S_r^{n-1}(0)$ und $S^{n-1} = S_1^{n-1}(0)$.

Die Topologie erlaubt nun die Untersuchung von Konvergenz, Grenzwert und Stetigkeit im Zusammenhang mit Abbildungen $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Statt mit Zahlenräumen kann man auch analog mit beliebigen euklidischen Vektorräumen starten.[(xxxviii)]

Im Zusammenhang mit Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ werden wir die Begriffe *offen*, *abgeschlossen*, *kompakt*, *beschränkt*, *wegzusammenhängend*, *zusammenhängend* oder *einfach zusammenhängend* voraussetzen, aber gegebenenfalls wiederholen.

Bezeichnung A.22. Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge, so bezeichnen wir mit

$$\bar{A} := \bigcap \{B \subset \mathbb{R}^n \mid A \subset B \text{ und } B \text{ ist abgeschlossen}\}$$

den *Abschluss von* A, mit

$$\mathring{A} := \bigcup \{C \subset \mathbb{R}^n \mid C \subset A \text{ und } C \text{ ist offen}\}$$

das *Innere von* A , sowie mit

$$\partial A := \bar{A} \setminus \mathring{A}$$

den Rand von A. Die Elemente von $\mathring{A}$ heißen *innere Punkte von* A und die Elemente von ∂A heißen *Randpunkte von* A.

Bemerkung A.23. Es seien $A, A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ Teilmengen

1. A ist genau dann offen, wenn $A = \mathring{A}$. Das ist äquivalent zu der folgenden Aussage: Für alle $x \in A$ gibt es ein $r > 0$, sodass $B_r(x) \subset A$. In Worten bedeutet das: Um jeden Punkt von A passt noch ein ganzer offener Ball in A.

2. A ist genau dann abgeschlossen, wenn $A = \bar{A}$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

[(xxxviii)] ... oder noch allgemeiner mit Banachräumen.

3. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Randpunkt von A, also $x \in \partial A$, genau dann, wenn für alle $r > 0$ sowohl $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$ als auch $B_r(x) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$. In Worten heißt das: Jeder Ball um x enthält Elemente aus A und aus $\mathbb{R}^n \setminus A$.

4. A ist genau dann beschränkt, wenn es ein $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $r > 0$ gibt, sodass $A \subset B_r(x)$, d. h. es gibt eine Kugel, die A ganz umschließt.

5. (**Satz von Heine-Borel**)[xxxix] A ist genau dann kompakt, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist. Dies benutzen wir im Folgenden zur Charakterisierung kompakter Mengen.

6. (**Hausdorff-Eigenschaft**)[xl] Sind $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, so gibt es offene Mengen $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ sowie $A_1 \subset U_1$ und $A_2 \subset U_2$. Man sagt auch, dass sich disjunkte abgeschlossene Mengen durch offene Mengen trennen lassen. Durch diese Eigenschaft wird $\mathbb{R}^n$ zu einem *Hausdorff-Raum*.

Beispiel A.24.
- Es ist $\mathring{B}^n_r(x) = B^n_r(x)$ und $\partial B^n_r(x) = S^{n-1}_r(x)$, also $\bar{B}^n_r(x) = B^n_r(x) \cup S^{n-1}_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq r\}$.
- Für $n = 1$ ist $B^1 =]-1, 1[\subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$ eine zweipunktige Menge.
- Für $n = 2$ ist B^2 die offene Einheitskreisscheibe und S^1 der Einheitskreis um den Ursprung.
- Es ist $S^{n-2} \times \{0\} \subset \bar{B}^{n-1} \times \{0\} \subset \bar{B}^n$ und sogar $S^{n-2} \times \{0\} \subset S^{n-1} \subset \bar{B}^n$. Interpretiert man die Erde als Kugel mit Radius 1 um den Ursprung eines Koordinatensystems, so gibt das obige für $n = 3$ gerade die Beziehung Äquator $\leftrightarrow$ Erdoberfläche $\leftrightarrow$ Erdkugel wieder.

Nach dieser kurzen Wiederholung einiger Grundbegriffe, kommen wir direkt zur Differenzierbarkeit.

Definition A.25. 1. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt F *differenzierbar im Punkt* $u_0 \in U$ wenn es eine Abbildung $\Phi_{u_0} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ und eine in u_0 stetige Abbildung $\sigma : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\sigma(u_0) = 0$ gibt, sodass sich F für alle $x \in U$ schreiben läßt als

$$F(x) = F(u_0) + \Phi_{u_0}(x - u_0) + \sigma(x)\|x - u_0\| \,.$$

[xxxix] Eduard Heine (1821-1881), Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956)
[xl] Felix Hausdorff (1868-1942)

2. F heißt *differenzierbar*, wenn F in jedem Punkt $u \in U$ differenzierbar ist.

Bemerkung A.26. 1. F ist genau dann differenzierbar in u_0, wenn es eine Abbildung $\Phi_{u_0} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ gibt mit

$$\lim_{x \to u_0} \frac{F(x) - F(u_0) - \Phi_{u_0}(x - u_0)}{\|x - u_0\|} = 0\,.$$

Im Fall $m = n = 1$ ist $\Phi_{u_0} = f'(u_0)$.

2. Schreiben wir $F(x) = (F^1(x), \ldots, F^n(x))$ mit $F^i : U \to \mathbb{R}$, so ist F genau dann differenzierbar in u_0, wenn für jedes i die Abbildung F^i differenzierbar in u_0 ist.

Definition A.27. Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$. Dann heißt F *in* $u_0 \in U$ *in Richtung* $v \in \mathbb{R}^m$ *differenzierbar*, wenn die gewöhnliche Ableitung

$$DF(u_0; v) := \frac{d}{dt} F(u_0 + tv)\Big|_{t=0}$$

existiert. Der Ausdruck $DF(u_0; v) \in \mathbb{R}^n$ heißt *die Richtungsableitung von* F *in Richtung* v *im Punkt* u_0.

Satz A.28. *Ist* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *differenzierbar in* $u_0 \in U$ *so existieren sämtliche Richtungsableitungen und es gilt*

$$DF(u_0; v) = \Phi_{u_0}(v)\,.$$

Definition/Bemerkung A.29. 1. Wir schreiben für die Richtungsableitungen in Richtung der Standardbasisvektoren $\{\vec{e}_i\}_{i=1,\ldots,m}$

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(u_0) := DF(x; \vec{e}_i)$$

und nennen das die *i-te partielle Ableitung von* F *in* u_0. Wenn sämtliche partiellen Ableitungen in u_0 existieren, dann heißt F *partiell differenzierbar in* u_0.

2. Es ist

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(u_0) = \frac{d}{dt} F(u_0^1, \ldots, u_0^{i-1}, u_0^i + t, u_0^{i+1}, \ldots, u_0^m)\Big|_{t=0} = \widehat{F}_i'(u_0^i)\,,$$

wobei

$$\widehat{F}_i : s \mapsto F(u_0^1, \ldots, u_0^{i-1}, s, u_0^{i+1}, \ldots, u_0^m)\,.$$

3. Wir sagen F ist *partiell differenzierbar*, wenn sämtliche partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x^i}(u)$ für alle $u \in U$ existieren.

4. $F : U \to \mathbb{R}^n$ heißt *stetig partiell differenzierbar in* u_0, wenn alle partiellen Ableitungen von F in u_0 existieren und stetig in u_0 sind. Weiter heißt F *stetig partiell differenzierbar*, wenn dies für alle Punkte $u \in U$ gilt.

5. Es sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ in $u_0 \in U$ differenzierbar und wir schreiben $F(x) = (F^1(x), \ldots, F^n(x)) = \sum_{j=1}^n F^j(x)\vec{e}_j$. Dann ist für $v = \sum_{i=1}^m v^i \vec{e}_i \in \mathbb{R}^m$

$$\Phi_{u_0}(v) = \sum_{i=1}^m v^i \Phi_{u_0}(\vec{e}_i) \overset{A.28}{=} \sum_{i=1}^m v^i \frac{\partial F}{\partial x^i}(u_0) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n v^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(u_0)\vec{e}_j \,.$$

6. Bezeichnen wir die *Funktionalmatrix* der Abbildung F in u_0 mit

$$D_{u_0}F = \left(\frac{\partial F^j}{\partial x^i}(u_0)\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1\ldots,n}} \in M_{m,n}\mathbb{R}\,,$$

   so ist dies die Matrixdarstellung von Φ_{u_0} bezüglich der Standardbasis.

7. Existiert zur Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^n$ die Funktionalmatrix $DF : U \to M_{m,n}\mathbb{R}$ mit $DF : u \mapsto D_u F$, so ist F genau dann stetig partiell differenzierbar (in u_0), wenn die Einträge von DF stetig (in u_0) sind.

Satz A.30. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ sei partiell stetig differenzierbar in u_0. Dann ist F auch differenzierbar in u_0 und es gilt*

$$\Phi_{u_0}(v) = D_{u_0}F \cdot v = DF(u_0; v)\,.$$

Definition/Bemerkung A.31.

1. Die differenzierbare Abbildung $F : U \to \mathbb{R}^n$ heißt *stetig differenzierbar* wenn die Abbildung $u \mapsto \Phi_u$ stetig ist.

2. F ist genau dann stetig differenzierbar, wenn die Funktionalmatrix als Abbildung $DF : U \to M_{m,n}\mathbb{R}$ mit $u \mapsto D_u F$ stetig ist, d. h. DF hat stetige Einträge.

3. Wir können damit nun ohne Probleme auch höhere Ableitungen definieren. Insbesondere nennen wir eine Abbildung *glatt*, wenn Ableitungen in beliebiger Ordnung existieren und stetig sind.

Es folgen nun einige wichtige Sätze aus der Analysis, von denen wir ab und zu "Babyvarianten" benötigen werden.

Satz A.32 (Umkehrsatz)**.** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Sei $u_0 \in U$ mit $\det(D_{u_0}F) \neq 0$. Dann gibt es einen Ball $B_r(u_0) \subset U$ derart, dass*

1. *$V := F(B_r(u_0)) \subset \mathbb{R}^n$ ist offen,*
2. *$F\big|_{B_r(u_0)} : B_r(u_0) \to V$ ist bijektiv, und*
3. *$G := (F\big|_{B_r(u_0)})^{-1} : V \to B_r(u_0)$ ist stetig differenzierbar mit*

$$D_y G = \left(D_{G(y)}F\right)^{-1}.$$

Definition A.33. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, so heißt $F : U \to F(U)$ *Diffeomorphismus*, wenn F und $F^{-1} : F(U) \to U$ stetig differenzierbar sind.

Satz A.34 (Submersionssatz)**.** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^k$ mit $n > k$ stetig differenzierbar. In $u_0 \in U$ habe die Jakobimatrix $D_{u_0}F$ den vollen Rang k.*

Dann gibt es einen Ball $B := B_r(u_0) \subset \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $H : B \to H(B)$ derart, das

$$F\big|_B = \pi_k \circ H\,.$$

Hierbei ist $\pi_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ mit $\pi_k(u^1, \ldots, u^n) = (u^{n-k+1}, \ldots, u^n)$ die lineare Projektion auf die letzten k Koordinaten.

Beweisidee: Wir nutzen die Zerlegung $\mathbb{R}^n \ni u = (x, y) \in \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ und zerlegen die Funktionalmatrix $D_{u_0}F$ in zwei Teilmatrizen gemäß $D_{u_0}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}(u_0), \frac{\partial F}{\partial y}(u_0)\right)$. Dabei sind

$$\frac{\partial F}{\partial x}(u_0) = \left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(u_0)\right)_{\substack{i=1,\ldots,k \\ j=1\ldots,n-k}} \in M_{n-k,k}\mathbb{R}\,,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(u_0) = \left(\frac{\partial F^i}{\partial y^j}(u_0)\right)_{i,j=1,\ldots,k} \in M_k\mathbb{R}\,,$$

wobei die Bedingung $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(u_0)\right) \neq 0$ erfüllt sein muss. Dann definieren wir $\hat{H} : U \to \mathbb{R}^n$ mit $\hat{H}(u) = \hat{H}(x, y) := (x, F(x, y))$. Diese Abbildung erfüllt die Voraussetzungen aus dem Umkehrsatz und H ist dann durch die Einschränkung von $\hat{H}$ auf einen hinreichend kleinen Ball gegeben.

Satz A.35 (Satz über implizite Funktionen)**.** *Es seien $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $F^i : U \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \ldots, k$ Funktionen und*

$$N := \Big\{ u \in U \,|\, F^1(u) = \cdots = F^k(u) = 0 \Big\} \subset \mathbb{R}^m \,.$$

Wir schreiben $u = (x, y) \in U$ mit $x \in \mathbb{R}^{m-k}$ und $y \in \mathbb{R}^k$. Damit sei $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(u_0)\right) \neq 0$ für ein $u_0 = (x_0, y_0) \in N \subset U$.

Dann gibt es einen Ball $B := B_r^m(u_0) \subset U$ und eine offene Umgebung $K \subset \mathbb{R}^{m-k}$ von x_0 sowie Funktionen $G^1, \ldots, G^k : K \to \mathbb{R}$ derart, dass

$$N \cap B = \big\{ u = (x, y) \in U \,|\, y^i = G^i(x) \text{ für } 1 \leq i \leq k \big\} \,.$$

Weiter ist für alle $x \in K$

$$F(x, G(x)) = 0$$

und G ist differenzierbar mit

$$D_x G = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, G(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, G(x)) \,.$$

Satz A.36 (Immersionssatz)**.** *Es sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ mit $n > k$ stetig differenzierbar. In $u_0 \in U$ habe die Jacobimatrix $D_{u_0}F$ den vollen Rang k.*

Dann gibt es eine Umgebung $B_r(u_0) \subset U$, einen offenen Ball $B \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ sowie einen Diffeomorphismus $H : B \to V$ mit

$$F\big|_{B_r(u_0)} = H \circ \imath_k$$

wobei $\imath_k : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ die Inklusion $\imath_k(x^1, \ldots, x^k) := (x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$ bezeichnet.

Definition A.37. Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar.

1. Ist $m > n$ und $\mathrm{rk}(D_u F) = n$ für alle $u \in U$ so heißt F *Submersion*.
2. Ist $m < n$ und $\mathrm{rk}(D_u F) = m$ für alle $u \in U$ so heißt F *Immersion*.

Satz A.38 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz)**.** *Es sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $F : J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine glatte Abbildung. Dann gibt es ein Intervall $I \subset J$ mit $t_0 \in I$ und einen Ball $B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$, so dass*

1. *für alle $x_0 \in B_r(0)$ gibt es genau eine Funktion $y_{x_0} : I \to \mathbb{R}^n$ mit*

$$y'_{x_0}(t) = f(t, y_{x_0}(t)), \quad y_{x_0}(t_0) = x_0$$

2. *die Abbildung $I \times B_r(0) \to V$ mit $(t, x) \mapsto y_x(t)$ ist glatt.*

Man sagt auch: y_{x_0} löst das Anfangswertproblem (AWP) *$y' = F(t, y(t))$, $y(t_0) = x_0$.*

Ist F ein lineares System, d. h. $F(t, x) = A(t)x$ mit $A : J \to M_n\mathbb{R}$, so ist sogar $I = J$.

Beispiel A.39.

- Betrachte $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $F(t, x) = A(t)x + b(t)$ wobei $A : \mathbb{R} \to M_n\mathbb{R}$ und $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Dann hat das AWP $y' = F(t, y(t))$, $y(0) = x_0$ die formale Lösung

$$y_{x_0}(t) = \exp\Big(\int_0^t A(\tau)d\tau\Big)\left(x_0 + \int_0^t \exp\Big(-\int_0^\tau A(\sigma)d\sigma\Big)b(\tau)d\tau\right).$$

  Speziell für die homogene Differentialgleichung mit $b = 0$ ergibt sich

$$y_{x_0}(t) = \exp\Big(\int_0^t A(\tau)d\tau\Big)x_0\,.$$

- Betrachte speziell $n = 2$ und $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ unabhängig von t. Dann ist

$$\exp\Big(\int_0^t A(\tau)d\tau\Big) = \exp(tA) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n A^n = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

  und für $b = 0$ erhalten wir $y_{x_0}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} x_0$ als Lösung des AWP $y' = Ay, y(0) = x_0$.

Literatur

[Bä] Christian Bär: *Elementare Differentialgeometrie.* De Gruyter, 2. Aufl. 2010.

[dC] Manfredo P. do Carmo: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen.* Vieweg Verlagsgesellschaft, 3. Aufl. 1998.

[He] Harro Heuser: *Lehrbuch der Analysis Teil 1 und Teil 2.* Vieweg+Teubner Verlag, Teil 1: 17. Aufl. 2009, Teil 2: 14. Aufl. 2008.

[Ko] Hans-Joachim Kowalsky: *Lineare Algebra.* De Gruyter Verlag, 9. Aufl. 1979.

[Kü] Wolfgang Kühnel: *Differentialgeometrie. Kurven - Flächen - Mannigfaltigkeiten.* Vieweg Verlagsgesellschaft, 2. Aufl. 2003.

[Lo] Falko Lorenz: *Lineare Algebra I und II.* Spektrum Akademischer Verlag, I: 4. Aufl. 2003, II: 3. Aufl. 1992, Nachdruck 2008.

[Pr] Andrew Pressley: *Elementary Differential Geometry.* Springer Verlag, 2nd ed. 2010.

[Ri] Willi Rinow: *Lehrbuch der Topologie* (Hochschulbücher für Mathematik, Bd. 79). VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1975.

[Wa] Rolf Walter: *Differentialgeometrie.* B.-I.-Wissenschaftsverlag, 2. Aufl. 1989.