Lineare Algebra auf Räumen mit anti-kommutierenden Koeffizienten

(Linear algebra on spaces with anti-commuting coefficients)

Frank Klinker

Inhaltsverzeichnis

Ausarbeitung eines Seminars

Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik
Email: frank.klinker@math.tu-dortmund.de

1 Graduierte Algebren

1.1 Graduierte Algebren, Superalgebren

Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1$ eine Algebra mit

$$\mathfrak{A}_i\mathfrak{A}_j \subset \mathfrak{A}_{i+j} \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\} \tag{1}$$

Dann heißt $\mathfrak{A}$ eine $\mathbb{Z}_2$-*graduierte Algebra*. Die Elemente aus $\mathfrak{A}_i$ heißen *homogene Elemente* und für $a \in \mathfrak{A}_i$ ist $\deg(a) = |a| = i$ der *Grad* von a. Für $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2$ nennen wir $\mathfrak{A}$

- ε-*kommutativ*, wenn $ab = (-1)^{\varepsilon|a||b|}ba$ für homogene Elemente $a, b \in \mathfrak{A}$ gilt, und
- ε-*antikommutativ*, wenn $ab = -(-1)^{\varepsilon|a||b|}ba$ für homogene Elemente $a, b \in \mathfrak{A}$ erfüllt ist.

Außerdem definieren bzw. bemerken wir noch

- Im Fall $\varepsilon = 1$ sprechen wir bei $\mathfrak{A}$ auch von einer kommutativen bzw. antikommutativen *Superalgebra*.
- Für $\varepsilon = 0$ handelt es sich bei $\mathfrak{A}$ um eine - bis auf die Graduierung - gewöhnliche kommutative bzw. antikommutative Algebra.

Es gilt die folgende

Bemerkung 1.1. Ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1$ eine Superalgebra und bezeichnet $\langle\mathfrak{B}\rangle$ das von der Teilmenge $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ aufgespannte Ideal, so gilt:

1. Ist $\mathfrak{A}$ kommutativ, so sind die Elemente in $\langle\mathfrak{A}_1\rangle$ nilpotent.
2. Sind die Elemente aus $\langle\mathfrak{A}_1\rangle$ nilpotent, so ist für die natürliche Projektion

   $$\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}\big/\langle\mathfrak{A}_1\rangle = \mathfrak{A}_0\big/\langle\mathfrak{A}_1^2\rangle$$

   $a \in \mathfrak{A}$ genau dann invertierbar, wenn $\pi(a) \in \mathfrak{A}\big/\langle\mathfrak{A}_1\rangle$ invertierbar ist.

Proof. Ist $\mathfrak{A}$ kommutativ und ist $\xi \in \mathfrak{A}_1$, so ist $\xi^2 = 0$ wegen $\xi\xi = (-1)^{|\xi||\xi|}\xi\xi = -\xi\xi$. Sei nun $a \in \langle \mathfrak{A}_1 \rangle$. Dann gibt es Elemente $\xi_1, \ldots, \xi_k \in \mathfrak{A}_1$, so dass a aus Summen von Produkten der ξ_i besteht, etwa

$$a = \sum\nolimits_{\{i_1,\ldots,i_j\}\subset\{1,\ldots,k\}} \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_j}$$

Dann hat a^{k+1} in jedem Summanden mindestens $k+1$ Faktoren und diese sind dann alle Null. Somit ist a nilpotent, womit 1. gezeigt ist.

Zum Beweis von 2. sei $a \in \mathfrak{A}$ invertierbar. So gibt es ein Element $b \in \mathfrak{A}$ mit $ba = ab = 1$. Dann ist $\pi(a)\pi(b) = \pi(ab) = \pi(ba) = \pi(b)\pi(a) = \pi(1) = 1$, $\pi(a)$ also invertierbar. Ist umgekehrt $\pi(a)$ invertierbar, so gibt es wegen der Surjektivität von π ein Element $b \in \mathfrak{A}$ mit $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b) = \pi(b)\pi(a) = \pi(ba) = 1$. Es reicht nun zu zeigen, dass ab und ba invertierbar sind. Dann gibt es nämlich Elemente c und c' mit $cba = abc' = 1$, was die Invertierbarkeit von a bedeutet. Wegen $\pi(ab) = 1$ gibt es ein Element $z \in \langle \mathfrak{A}_1 \rangle$, so dass $ab = 1 - z$ ist. Wegen $z^{k+1} = 0$ für ein $k > 0$, folgt $(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^k) = 1$. Damit ist ab invertierbar und analog zeigen wir das gleiche für ba. □

1.2 Graduierte Liealgebren

Sei $V = V_0 + V_1$ ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter Vektorraum mit einem ε-antikommutativen, bilinearen Produkt

$$[.,.] : V \times V \to V, \tag{2}$$

das V zu einer $\mathbb{Z}_2$-graduierten Algebra macht. Dann nennen wir V eine *ε-$\mathbb{Z}_2$-graduierte Liealgebra*, wenn auf V die folgende *ε-Jacobi-Identitaet*, also die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 =& (-1)^{\varepsilon|X||Z|} \left[[X,Y],Z\right] + (-1)^{\varepsilon|Y||Z|} \left[[Z,X],Y\right] \\ &+ (-1)^{\varepsilon|X||Y|} \left[[Y,Z],X\right] \end{aligned} \tag{3}$$

für alle $X, Y, Z \in V$ erfüllt ist.

- Eine 0-$\mathbb{Z}_2$-graduierte Liealgebra ist eine - bis auf die Graduierung - gewöhnliche Liealgebra.
- Im Fall $\varepsilon = 1$ sprechen wir von einer Superliealgebra

1.3 Beispiele

1. Jede Algebra B ist eine Superalgebra mit $B_0 = B$ und $B_1 = \{0\}$.

2. Die äußere Algebra $\Lambda^* V = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k V$ eines Vektoraums V mit $\dim V = n$ ist eine Superalgebra. Die Graduierung ergibt sich zu
$$(\Lambda^* V)_0 = \bigoplus_{k \text{ gerade}} \Lambda^k V, \text{ und } (\Lambda^* V)_1 = \bigoplus_{k \text{ ungerade}} \Lambda^k V\,. \tag{4}$$

3. Die Cliffordalgebra Cl_n^c mit der Graduierung
$$\begin{aligned}(Cl_n^c)_0 = Cl_n^{c,\text{even}} = \left\{c \in Cl_n^c;\ \beta(c) = c\right\}\\ (Cl_n^c)_1 = Cl_n^{c,\text{odd}} = \left\{c \in Cl_n^c;\ \beta(c) = -c\right\}\end{aligned}$$
ist eine $\mathbb{Z}_2$-graduierte Algebra.

4. Die Menge $\mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R} = \mathbb{R}^{(n+r)\times(n+r)}$ wird mit der Matrizenmultiplikation, bzw. mit dem Kommutator, zu einer $\mathbb{Z}_2$-graduierten Algebra, bzw. zu einer $0 - \mathbb{Z}_2$-graduierten Liealgebra $\mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R}$. Die Graduierung ist durch
$$\begin{aligned}(\mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R})_0 = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d\end{pmatrix}; a \in mat_{n\times n}(\mathbb{R}), d \in mat_{r\times r}(\mathbb{R})\right\}\\ (\mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R})_1 = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0\end{pmatrix}; b \in mat_{n\times r}(\mathbb{R}), c \in mat_{r\times n}(\mathbb{R})\right\}\end{aligned}$$
gegeben.

5. Die Teilmenge von $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R}$ bestehend aus Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d\end{pmatrix}$ ist mit der Graduierung aus 4. wegen $\mathfrak{g}_1 \cdot \mathfrak{g}_1 = 0$ trivialerweise eine Superliealgebra mit dem gewöhnlichen Kommutator.

6. Sei $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1$ eine ε-kommutative $\mathbb{Z}_2$-graduierte Algebra und wir betrachten die Menge $\mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R} \otimes \mathfrak{A}$ mit der Graduierung
$$\begin{aligned}\mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A})_0 =& (\mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R})_0 \otimes \mathfrak{A}_0 \oplus (\mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R})_1 \otimes \mathfrak{A}_1\\ \mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A})_1 =& (\mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R})_0 \otimes \mathfrak{A}_1 \oplus (\mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R})_1 \otimes \mathfrak{A}_0\end{aligned}$$
und dem Produkt $[A, B] = AB - (-1)^{|A||B|} BA$. Dann ist $\mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A})$ eine $\varepsilon - \mathbb{Z}_2$-graduierte Liealgebra, im Fall $\varepsilon = 1$ also eine Superliealgebra.

Speziell für $\mathfrak{A} = \mathbb{R}$ mit der trivalen Graduierung $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}_1 = \{0\}$ schreiben wir $\mathfrak{gl}_{n|r}\mathbb{R}$.

Die Algebra $\mathfrak{gl}_{n|r}\mathbb{R}$ unterscheidet sich von der Algebra $\mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R}$ aus Beispiel 4. durch das das Klammerprodukt, dass eingeschränkt auf ungerade Elemente nicht dem Kommutator, sondern dem Antikommutator für gewöhnliche Matrizen entspricht.

Die folgenden Beispiele sind sehr skizzenhaft und benötigen einiges mehr an Handwerkzeug, das wir an dieser Stelle nicht bereitstellen möchten.

7. Es sei (M, g) eine pseudo-Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit assoziiertem Spinbündel S. Wir betrachten den $\mathbb{Z}_2$-graduierten Vektorraum $V = K_0 + K_1$, bestehend aus einem Unterraum $K_0 \subset \Gamma(TM)$ der Vektorfelder auf M und einem Unterraum $K_1 \subset \Gamma(S)$ der Schnitte in S. Dann ist V bei geeigneter Wahl von K_0 und K_1 eine antikommutative Superalgebra mit dem Produkt $[.,.]$, das für homogene Elemente wie folgt definiert ist:
   - Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ ist $[X, Y] = -[Y, X]$ der gewöhnliche Kommutator.
   - Für $X \in \mathfrak{X}(M), s \in \Gamma S$ ist $[X, s] = -[s, X] = L_X s$ die Lieableitung des Spinors s in Richtung X, falls diese existiert.[i]
   - Für $s, t \in \Gamma S$ ist $g([s, t], X) = \mathrm{Im}\langle Xs, t\rangle$ das durch diese für alle X gültige Gleichung definierte Vektorfeld. Dabei ist $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine geeignet zu wählende Spin-invariante Bilinearform auf S.
   - Abhängig von der Wahl von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist $[\cdot,\cdot]$ symmetrisch oder schiefsymmetrisch.

8. Sei
$$K_0 = \mathfrak{C}(M) = \big\{X \in \Gamma(TM) \,\big|\, \exists f \in C^\infty(M) : L_X g = f \cdot g\big\}$$
die Menge der konformen Vektorfelder und
$$K_1 = \mathfrak{T}(M) = \big\{\varphi \in \Gamma(S) \,\big|\, \nabla_X \varphi = -\tfrac{1}{n} X \not{\partial} \varphi \text{ für alle } X \in \mathfrak{X}(M)\big\}$$
die Menge der Twistor-Spinoren. Dabei ist ∇ der durch den Levi-Civita-Zusammenhang induzierte Zusammenhang auf S und $\not{\partial}$ der Diracoperator. Dann ist $\mathfrak{C}(M) + \mathfrak{T}(M)$ mit dem Produkt aus 7. eine antikommutative Superalgebra (aber in der Regel keine Superliealgebra)

[i]Die Lieableitung existiert als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Lieableitung, wenn X ein konformes Vektorfeld ist.

9. Es sei
$$K_0 = \mathfrak{C}_0(M) = \{X; L_X g = 0\} \subset \mathfrak{C}(M)$$
die Menge der Killingvektorfelder und
$$K_1 = \mathfrak{T}_0(M) = \{s; \nabla s = 0\} \subset \mathfrak{T}(M)$$
die Menge der parallelen Spinoren. Dann ist $\mathfrak{C}_0(M) + \mathfrak{T}_0(M)$ eine Superliealgebra.

10. Ändern wir in Beispiel 7. das letzte Produkt zu $[s, t] = 0$, so ist $\mathfrak{C}(M) + \Gamma S$ eine Superliealgebra.

2 Freie Module über einer Superalgebra

In diesem Abschnitt wollen wir das Beispiel 6. ausführlicher behandeln, da es im Zusammenhang mit der Beschreibung von Strukturen auf Supermannigfaltigkeiten eine wichtige Rolle spielen wird.

2.1 Vektoren und Matrizen

Eine $(n, m|r, s)-$*Matrix* über der Superalgebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1$ ist ein System $X = (X_{MN})$ mit $M = 1, \dots, n+r$; $N = 1, \dots, m+s$ derart, dass die Einträge Elemente in $\mathfrak{A}$ sind und den Zeilen und Spalten ein Grad zugeordnet wird. Die Menge der Matrizen bezeichnen wir mit $Mat(n, m|r, s; \mathfrak{A})$. Den Grad definieren wir durch

$$\begin{aligned} \deg(\text{Spalte} N) =&|N| = \begin{cases} 0 & \text{falls } N = 1, ...m \\ 1 & \text{falls } N = m+1, ..., m+s \end{cases} \\ \deg(\text{Zeile} M) =&|M| = \begin{cases} 0 & \text{falls } M = 1, \dots, n \\ 1 & \text{falls } M = n+1, \dots, n+r \end{cases} \end{aligned} \tag{5}$$

und weiter

$$|X| = \begin{cases} 0 & \text{falls } |X_{MN}| + |M| + |N| = 0 \\ 1 & \text{falls } |X_{MN}| + |M| + |N| = 1 \end{cases} . \tag{6}$$

Wir benutzen kleine lateinische Indizes für jeweils den Grad-0- und kleine griechische Indizes für den jeweils den Grad-1-Fall. Also gilt

$$X = \begin{pmatrix} A_{ij} & B_{i\beta} \\ C_{\alpha j} & D_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \text{ mit } 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq m; 1 \leq \alpha \leq r; 1 \leq \beta \leq s \quad (7)$$

und

$$|X| = \begin{cases} 0 & \text{falls } |A_{ij}| = |D_{\alpha\beta}| = 0, |B_{i\beta}| = |C_{\alpha j}| = 1 \\ 1 & \text{falls } |A_{ij}| = |D_{\alpha\beta}| = 1, |B_{i\beta}| = |C_{\alpha j}| = 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Das Produkt zweier Matrizen $X \in Mat(n,p|r,q;\mathfrak{A})$, $Y \in Mat(p,m|q,s;\mathfrak{A})$ ist durch $XY \in Mat(n,m|r,s;\mathfrak{A})$ mit

$$(XY)_{MN} = X_{ML}Y_{LN}$$

definiert.

Bemerkung 2.1. Im Fall $m = n, r = s$ schreiben wir $Mat(n,n|r,r;\mathfrak{A}) = \mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A})$, und das ist dann die in Beispiel 6. beschriebene Algebra. Der Fall $\mathfrak{A} = \mathbb{R}$ entspricht gerade dem Beispiel 4..

Wir betrachten nun den einen Superalgebramorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A})$ der durch folgende Daten gegeben ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} &\to \mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A}) \\ a &\mapsto \underline{a} \quad \text{mit} \quad \underline{a}_{MN} = (-1)^{|M||a|} a \delta_{MN} \end{aligned} \quad (9)$$

dann wird $Mat(n,m|r,s;\mathfrak{A})$ ein $\mathfrak{A}$-Modul mit

$$a \cdot X \stackrel{\text{def}}{=} \underline{a}X \quad (10)$$

für $a \in \mathfrak{A}$ und $X \in Mat(n,m|r,s;\mathfrak{A})$. Dann gilt nämlich

$$a \cdot X = (-1)^{|a||X|} X \cdot a \quad (11)$$

wegen[ii]

$$\begin{aligned} (a \cdot X)_{MN} &= (\underline{a}X)_{MN} \\ &= \underline{a}_{ML} X_{LN} \end{aligned}$$

[ii]In dieser und den folgenden Rechnungen und Formeln sind die Exponenten von (-1) immer als Grad des jeweiligen Objekts zu verstehen, z.B. $(-1)^{Ma} = (-1)^{|M||a|}$ usw.

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{Ma} a\delta_{ML} X_{LN} \\
&= (-1)^{Ma} a X_{MN} \\
&= (-1)^{Ma} (-1)^{aX_{MN}} X_{MN} a \\
&= (-1)^{Ma} (-1)^{a(X+M+N)} X_{MN} a \\
&= (-1)^{aX} (-1)^{aN} X_{MN} a \\
&= (-1)^{aX} X_{ML} (-1)^{aN} \delta_{LN} a \\
&= (-1)^{aX} X_{ML} \underline{a}_{LN} = (-1)^{aX} (X\underline{a})_{MN} \\
&= (-1)^{aX} (X \cdot a)_{MN}.
\end{aligned}
$$

Mit dieser Definition der Modulstruktur haben wir für Matrizen X, Y und $a \in \mathfrak{A}$

$$
\begin{aligned}
&(a \cdot X)Y = a \cdot (XY),\ (X \cdot a)Y = X(a \cdot Y), \\
&X(Y \cdot a) = (XY) \cdot a.
\end{aligned}
$$

Sei $X \in Mat(n, m|r, s; \mathfrak{A})$, dann definieren wir das Supertransponierte dieser Matrix durch $X^{st} \in Mat(m, n|s, r; \mathfrak{A})$ mit

$$
X^{st}_{MN} = (-1)^{(M+N)(X+M)} X_{NM} = (-1)^{(M+N)(X_{MN}+N)} X_{MN} \tag{12}
$$

Für $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ ist

$$
\begin{aligned}
X^{st} &= \begin{pmatrix} A^T & (-1)^X C^T \\ -(-1)^X B^T & D^T \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ -B^T & D^T \end{pmatrix} & \text{falls } |X| = 0 \\ \begin{pmatrix} A^T & -C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix} & \text{falls } |X| = 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

insbesondere $(X^{st})^{st} = \begin{pmatrix} A^T & -B^T \\ -C^T & D^T \end{pmatrix}$ und $(st)^4 = id$ und es gilt für Matrizen X, Y und $a \in \mathfrak{A}$

$$
(XY)^{st} = (-1)^{XY} Y^{st} X^{st} \tag{13}
$$

$$
(a \cdot X)^{st} = a \cdot X^{st}. \tag{14}
$$

Zum Beweis der ersten Identität rechnen wir

$$
(Y^{st} X^{st})_{MN} = Y^{st}_{MK} X^{st}_{KN}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{(K+M)(Y+M)}(-1)^{(N+K)(X+K)}Y_{KM}X_{NK}\\
&= (-1)^{(K+M)(Y+M)+(N+K)(X+K)}\cdot\\
&\quad \cdot (-1)^{(Y+K+M)(X+K+N)}X_{NK}Y_{KM}\\
&= (-1)^{KY+KM+YM+M+NX+NK+KX+K+YX+YK+YN}\cdot\\
&\quad \cdot (-1)^{KX+K+KN+MX+MK+MN}X_{NK}Y_{KM}\\
&= (-1)^{XY}(-1)^{YM+M+NX+YN+MX+MN}X_{NK}Y_{KM}\\
&= (-1)^{XY}(-1)^{(Y+X+M)(M+N)}X_{NK}Y_{KM}\\
&= (-1)^{XY}(-1)^{(N+M)(X+Y+M)}(XY)_{NM}\\
&= (-1)^{XY}(XY)^{st}_{MN}
\end{aligned}
$$

Spezielle Matrizen sind die *Zeilen-* und *Spaltenvektoren*:

$$
\begin{pmatrix} f_i \\ \xi_\alpha \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}^{n|r} := Mat(n,1|r,0;\mathfrak{A}) \tag{15}
$$

und

$$
\big(f_i, \xi_\alpha\big) \in \widehat{\mathfrak{A}^{n|r}} := Mat(1,n|0,r;\mathfrak{A})\,. \tag{16}
$$

Dabei schreiben wir $X_M = X_{M1}$ im ersten und $Y_N = Y_{1N}$ im zweiten Fall. Es gilt wegen für $X \in \mathfrak{A}^{n|r}$ und $Y \in \widehat{\mathfrak{A}^{n|r}}$:

$$
\widehat{\mathfrak{A}^{n|r}} \ni X^{st} = \begin{pmatrix} f_i \\ \xi_\alpha \end{pmatrix}^{st} = \big(f_i, (-1)^X \xi_\alpha\big) = \big(f_i, -(-1)^\xi \xi_\alpha\big)
$$

und

$$
\mathfrak{A}^{n|r} \ni Y^{st} = \big(f_i, \xi_\alpha\big)^{st} = \begin{pmatrix} f_i \\ -(-1)^Y \xi_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_i \\ (-1)^\xi \xi_\alpha \end{pmatrix},
$$

das heißt $X^{st}_M = (-1)^{MX}X_M$ und $Y^{st}_M = (-1)^{M(X+M)}Y_M$. Die Modulstruktur der Matrizen liefert uns hier für $X \in \mathfrak{A}^{n|r}, Y \in \widehat{\mathfrak{A}^{n|r}}$ und $a \in \mathfrak{A}$

$$
\begin{aligned}
(a\cdot X)_M &= (\underline{a}X)_M = (-1)^{Ma}aX_M\\
(X\cdot a)_M &= (X\underline{a})_M = X_M a\\
(a\cdot Y)_N &= (\underline{a}Y)_N = aY_N\\
(Y\cdot a)_N &= (Y\underline{a})_N = (-1)^{Na}Y_N a.
\end{aligned}
$$

Bemerkung 2.2. Die Graduierung der Menge $\mathfrak{A}^{n|r}$ der Vektoren ist durch

$$
(\mathfrak{A}^{n|r})_0 = \mathfrak{A}^n_0 + \mathfrak{A}^r_1 \quad \text{und} \quad (\mathfrak{A}^{n|r})_1 = \mathfrak{A}^n_1 + \mathfrak{A}^r_0
$$

gegeben. Darüberhinaus schreiben wir für die beiden $\mathfrak{A}_0$-Moduln der geraden, bzw. ungeraden Vektoren

$$\mathfrak{A}^{n,r} := (\mathfrak{A}^{n|r})_0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}^{\bar{n},\bar{r}} := (\mathfrak{A}^{n|r})_1$$

2.2 Freie $\mathfrak{A}$-Moduln

$\mathfrak{X}$ sei ein $\mathbb{Z}_2$-graduierter $\mathbb{R}$-Vektorraum. $\mathfrak{X}$ ist ein Linksmodul über $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \mathfrak{A}_1$, wenn es eine Abbildung

$$\mathfrak{A} \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}, \quad (a, X) \mapsto aX \tag{17}$$

gibt, mit

1. $a(bX) = (ab)X$
2. $(a + b)X = aX + bX,\ a(X + Y) = aX + aY$
3. $1X = X$
4. $|aX| = |a| + |X|$

Jedes Linksmodul ist ein Rechtsmodul, wenn wir die Rechtsoperation durch

$$Xa = (-1)^{aX} aX \tag{18}$$

definieren. Diese Multiplikation hat dann analoge Eigenschaften zu 1. bis 4. Ein Modul $\mathfrak{X}$ ist ein *freier Modul vom Rang* $(n|r)$, wenn es eine Menge

$$(e_i, \theta_\alpha)_{i=1,\dots,n,\alpha=1,\dots,r} = (E_N)_{N=1,\dots,n+r} \subset \mathfrak{X}$$

gibt mit $|e_i| = |i| = 0$ und $|\theta_\alpha| = |\alpha| = 1$, d.h.

$$|E_N| = |N| \ = \begin{cases} 0 & \text{falls } 1 \leq N \leq n \\ 1 & \text{falls } n + 1 \leq N \leq r \end{cases} \tag{19}$$

und wenn jedes $X \in \mathfrak{X}$ eine eindeutige Darstellung

$$X = X^l_M E_M = f^l_i e_i + \xi^l_\alpha \theta_\alpha \tag{20}$$

hat. Wir nennen die Elemente X^l_M die *Linkskoordinaten* von X. Analog gibt es auch die eindeutige Zerlegung

$$X = E_M X^r_M = e_i f^r_i + \theta_\alpha \xi^r_\alpha \tag{21}$$

mit den *Rechtskoordinaten* X^r_M von X.

Die Koordinaten stehen über folgende Gleichungen zueinander in Beziehung:

$$X^l_M = (-1)^{MX_M} X^r_M = (-1)^{M(X+M)} X^r_M \tag{22}$$

bzw.

$$f^l_i = f^r_i \quad \text{und} \quad \xi^l_\alpha = -(-1)^X \xi^r_\alpha. \tag{23}$$

Satz 2.3. *Es gibt mit den Modulstrukturen und Graduierungen verträgliche Isomorphismen $\phi^r : \mathfrak{X} \to \mathfrak{A}^{n|r}$ und $\phi^l : \mathfrak{X} \to \widehat{\mathfrak{A}^{n|r}}$ derart, dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathfrak{A}^{n|r}} \arrow[rr, "\mathrm{st}"] & & \mathfrak{A}^{n|r} \\
& \mathfrak{X} \arrow[ul, "\phi^l"] \arrow[ur, "\phi^r"'] &
\end{tikzcd}$$

Proof. Wir definieren für $X = X^l_M E_M = E_N X^r_M$

$$\phi^r(X) = X^r = \begin{pmatrix} X^r_1 \\ \vdots \\ X^r_{n+r} \end{pmatrix} \in \mathfrak{A}^{n|r} \tag{24}$$

und

$$\phi^l(X) = \left(X^l_1, \dots, X^l_{n+r}\right) \in \widehat{\mathfrak{A}^{n|r}} \tag{25}$$

Dann gilt

$$X^r = (X^l)^{st} \quad \text{und} \quad (X^l)_M = (-1)^M (X^r)^{st}_M \tag{26}$$

denn

$$\begin{aligned}
(X^r)_M = X^r_M &= (-1)^{M(X+M)} X^l_M \\
&= (-1)^{M(X+M)} (X^l)_M = (X^l)^{st}_M, \\
(X^l)_M = X^l_M &= (-1)^{M(X+M)} X^r_M
\end{aligned}$$

$$= (-1)^M (-1)^{MX} (X^r)_M = (-1)^M (X^r)^{st}_M,$$

also insbesondere die Kommutativität des obigen Diagramms. Die Verträglichkeit mit der Modulstruktur rechnen wir exemplarisch für ϕ^r aus. Für $\mathfrak{X} \ni X = E_M X^r_M$ ist

$$\begin{aligned} aX &= aE_M X^r_M = E_M\big((-1)^{Ma} a X^r_M\big) \\ Xa &= \big(E_M X^r_M\big)a = E_M\big(X^r_M a\big), \end{aligned}$$

und damit haben wir

$$\begin{aligned} \big(a\phi^r(X)\big)_M &= \big(a \cdot X^r\big)_M = (-1)^{aM} a X^r_M = \big(\phi^r(aX)\big)_M\,, \\ \big(\phi^r(X)a\big)_M &= \big(X^r \cdot a\big)_M = X^r_M a = \big(\phi^r(Xa)\big)_M. \end{aligned}$$

□

2.3 Endomorphismen von $\mathfrak{A}$-Moduln

Sei $\mathfrak{X}$ wie im vorangegangenen Abschnitt ein freier $\mathfrak{A}$-Modul mit Basis $(E_N) = (e_i, \theta_\alpha)$. Dann ist ein Endomorphismus $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ für $X, Y \in \mathfrak{X}$ und $a \in \mathfrak{A}$ definiert durch

1. $F(Xa) = F(X)a$
2. $F(X + Y) = F(X) + F(Y)$

Wir nennen F *gerade* bzw. *ungerade* und schreiben $|F| = 0$ (bzw. $|F| = 1$), wenn für alle $X \in \mathfrak{X}$ und $a \in \mathfrak{A}$

$$F(aX) = aF(X) \quad \text{bzw.} \quad F(aX) = (-1)^a aF(X)$$

gilt. Das liefert auf der Menge der Endomorphismen eine Graduierung, und es gilt

3. $F(aX) = (-1)^{aF} aF(X)$
4. $|F(X)| = |F| + |X|$

Die Menge End$\mathfrak{X}$ wird durch die Definitionen

$$(aF)(X) = aF(X) \quad \text{und} \quad (Fa)(X) = F(aX) \tag{27}$$

zu einem $\mathfrak{A}$-Modul und es gilt wegen 3. die Vertauschungsregel

$$aF = (-1)^{aF} Fa. \tag{28}$$

(genauer sprechen wir wegen der Eigenschaft 1. von einem Rechts-Endomorphismus und schreiben ggf. $\mathrm{End}^r\mathfrak{X}$). Sei nun $F \in \mathrm{End}\mathfrak{X}$ ein Endomorphismus. Dieser sei auf der Basis (E_N) durch

$$F(E_M) = E_N a_{NM} \tag{29}$$

gegeben. Dann gilt für $X = E_M X_M \in \mathfrak{X}$

$$F(X) = F(E_M X_M) = F(E_M)X_M = E_N a_{NM} X_M. \tag{30}$$

Satz 2.4. *Seien $\mathfrak{X}, (E_N)$ wie oben und $\psi^r : \mathrm{End}\mathfrak{X} \to gl_{n|r}\mathfrak{A}$ gegeben durch*

$$\psi^r(F) = a = (a_{MN}) \tag{31}$$

gemäß der obigen Konstruktion. Dann ist ψ^r ein mit den Modulstrukturen und der Graduierung verträglicher Isomorphismus und es gilt mit der Abbildung $\phi^r : \mathfrak{X} \to \mathfrak{A}^{\,n|r}$

$$\phi^r(F(X)) = \psi^r(F)\phi^r(X) \tag{32}$$

Bemerkung 2.5. Sprechen wir statt von Rechts- von Links-Endomorphimen, d.h. vertauschen wir die Rollen der Rechtsmultiplikatipn und Linksmultiplikation in 1. und 3., so ordnen wir über eine Abbildung ψ^l dem Endomorphismus $\tilde{F}$ eine Matrix $\tilde{a} = (\tilde{a}_{MN})$ zu mit der Eigenschaft

$$\tilde{F}(E_M) = \tilde{a}_{MN} E_N. \tag{33}$$

Eine natürliche Identifikation zwischen den Links- und Rechts-Endomorphismen ergibt sich durch

$$F^r(X) = (-1)^{XF} F^l(X) \tag{34}$$

und damit $G^r(F^r(X)) = (-1)^{GF}(-1)^{(G+F)X} G^l(F^l(X))$. Setzen wir

$$F^r(X) = E_N a_{NM} X^r_M \tag{35}$$

und

$$F^l(X) = X^l_M \tilde{a}_{MN} E_N, \tag{36}$$

so haben wir bei dieser Identifikation für $F^l(X)$ die Darstellung

$$F^l(X) = X^l_M \tilde{a}_{MN} E_N = (-1)^{(X+M)(F+N+M)} \tilde{a}_{MN} X^l_M E_N$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{(X+M)(F+N+M)+(F+N+M+X+M)N} E_N \tilde{a}_{MN} X^l_M \\
&= (-1)^{XF}(-1)^{XN+XM+MF+MN+M+FN+N+XN} E_N \tilde{a}_{MN} X^l_M \\
&= (-1)^{XF} E_N \big((-1)^{(F+N)(M+N)} \tilde{a}_{MN}\big)\big((-1)^{MX+M} X^l_M\big) \\
&= (-1)^{XF} E_N \big((-1)^{(F+N)(M+N)} \tilde{a}_{MN}\big) X^r_M
\end{aligned}$$

und die Bedingung $F^r(X) = (-1)^{XF} F^l(X)$ überträgt sich damit wie folgt auf die beteiligten Matrizen:

$$\tilde{a}_{MN} = (-1)^{(F+N)(M+N)} a_{NM} = a^{st}_{MN}. \tag{37}$$

Das bedeutet, das die Supertransposition die Links- und die Rechts-Isomorphismen ineinander überführt.

Wir werden uns hier allerdings, wenn es nicht ausdrücklich anders erwähnt wird, auf "Rechts-Objekte" beschränken. Insbesondere, wenn die Koordinaten keinen oberen Index besitzen, handelt es sich um Rechtskoordinaten.

2.4 Der Dualraum zu $\mathfrak{X}$

Als Dualraum $\mathfrak{X}^*$ zu dem $\mathfrak{A}$-Modul $\mathfrak{X}$, bzw. als Menge der 1-Formen, bezeichnen wir die Menge der Homomorphismen von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{A}$, also

$$\mathfrak{X}^* = \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{A}). \tag{38}$$

Für die Paarung $\mathfrak{X}^* \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{A}$ schreiben wir $(\omega, X) \mapsto \langle \omega, X\rangle$. Wie im letzten Abschnitt legen wir $\omega \in \mathfrak{X}^*$ auf der Basis $\{E_N\}$ von $\mathfrak{X}$ bezüglich einer Basis des Bildraums, hier zwechmäßigerweise der kanonischen geraden Basis $\{1\}$ von $\mathfrak{A}$, durch

$$\langle \omega, E_N\rangle = \omega_N$$

fest, und erhalten für $X = E_N X_N \in \mathfrak{X}$

$$\langle \omega, X\rangle = \omega_N X_N.$$

Betrachten wir die Elemente $E^*_M \in \mathfrak{X}^*$ mit

$$\langle E^*_M, E_N\rangle = \delta_{MN}$$

so haben für das obige ω wegen

$$\langle \omega_M E^*_M, E_N X_N\rangle = \omega_M \langle E^*_M, E_N\rangle X_N = \omega_M \delta_{MN} X_N = \omega_N X_N \tag{39}$$

die Darstellung $\omega = \omega_M E^*_M$ und somit die

Satz 2.6. *Die obige Konstruktion liefert einen kanonischen Isomorphismus*

$$\mathfrak{X}^* \cong \widehat{\mathfrak{A}^{n|r}} \tag{40}$$

zwischen dem Dualraum $\mathfrak{X}^*$ von $\mathfrak{X}$ und der Menge der Zeilenvektoren mit Einträgen aus $\mathfrak{A}$, der mit den Modulstrukturen verträglich ist. Insbesondere geht die Paarung $\langle .,. \rangle$ in die Matrixmultiplikation über.

Der Endomorphismus $F \in End\mathfrak{X}$ induziert einen Endomorphismus F^* auf $\mathfrak{X}^*$, der durch

$$\langle F^*(\omega), X \rangle = \langle \omega, F(X) \rangle \tag{41}$$

gegeben ist. Da es sich bei $\mathfrak{X}^*$ wegen des vorigen Satzes kanonisch um einen Linksmodul handelt, ist F^* a priori ein Links-Endomorphismus, der in den oben betrachteten Basen wie folgt gegeben ist. Haben wir für F die Matrixdarstellung (a_{MN}), also $F(E_N X_N) = E_K a_{KN} X_N$, so gilt für die Matrixdarstellung (a^*_{MN}) von F^* einerseits

$$F^*(\omega) = F^*(\omega_M E^*_M) = \omega_M a^*_{MK} E^*_K$$

und damit

$$\langle F^*(\omega), X \rangle = \omega_M a^*_{MK} \langle E^*_K, E_N X_N \rangle = \omega_M a^*_{MN} X_N.$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\langle F^*(\omega), X \rangle &= \langle \omega, F(X) \rangle \\ &= \langle \omega_M E^*_M, E_K a_{KN} X_N \rangle \\ &= \omega_M \langle E^*_M, E_K \rangle a_{KN} X_N = \omega_M a_{MN} X_N,\end{aligned}$$

insgesamt also

$$a^*_{MN} = a_{MN}. \tag{42}$$

Bevorzugt man die Rechnung mit Rechtskoordinaten auch im Raum $\mathfrak{X}^*$, und möchte einen zu $F \in \mathrm{End}\mathfrak{X}$ assozierten Rechts-Endomorphismus $\tilde{F}^*$ betrachten, so müssen wir zum einen den Wechsel der Koordinaten in $\omega = \omega_N E^*_N = E^*_N \tilde{\omega}_N$ beachten. Außerdem ändern wir (wegen der letzten Bemerkung in Abschnitt 2.3) die Definition dieses neuen Endomorphismus ab zu

$$\langle \tilde{F}^*(\omega), X \rangle = (-1)^{\omega F} \langle \omega, F(X) \rangle \tag{43}$$

Schreibt man dann $\tilde{F}^*(\omega) = E^*_K \tilde{a}^*_{KN} \tilde{\omega}_N$, so liefern die Rechnungen aus der gleichen Bemerkung $\tilde{a}^*_{MN} = (a^*)^{st}_{MN}$, hier also

$$\tilde{a}^*_{MN} = a^{st}_{MN}. \tag{44}$$

2.5 Die Menge $GL_{n|r}(\mathfrak{A})$

Wir betrachten die Menge der geraden, invertierbaren Elemente in $\mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A})$ und definieren die lineare Supergruppe als

$$GL_{n|r}(\mathfrak{A}) = \left\{ a \in \mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A})_0 \ ; \ \exists a^{-1} \ aa^{-1} = \mathbf{1} \right\}. \tag{45}$$

Als Verallgemeinerung von Bemerkung 1 hat man sofort die

Bemerkung 2.7. $a = (a_{MN}) \in \mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A})_0$ ist geanau dann invertierbar, wenn die Matrix $\pi(a) \in \mathfrak{gl}_{n+r}\mathbb{R}$ invertierbar ist. Dabei sind die Einträge von $\pi(a)$ durch

$$\pi(a)_{MN} = \pi(a_{MN})$$

mit der kanonischen Projektion

$$\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \diagup \langle \mathfrak{A}_1 \rangle = \mathfrak{A}_0 \diagup \langle \mathfrak{A}_1^2 \rangle$$

gegeben.

Schreibt man $a = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ so bedeutet das

$$\begin{aligned} a \text{ invertierbar } &\Leftrightarrow \pi(a) \text{ invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \pi(A) & 0 \\ 0 & \pi(D) \end{pmatrix} \text{ invertierbar} \\ &\Leftrightarrow \pi(A), \pi(D) \text{ invertierbar} \\ &\Leftrightarrow A, D \text{ invertierbar.} \end{aligned}$$

Auf der Menge der Matrizen gibt es noch zwei interessante Morphismen:

Die Spur.

Sie ist durch

$$\mathrm{str} : \mathfrak{gl}_{n|r}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A} \quad \text{mit} \quad \mathrm{str} X = \sum_M (-1)^{(X+M)M} X_{MM} \tag{46}$$

definiert und hat die folgenden Eigenschaften.

1. $\mathrm{str}(XY) = (-1)^{XY} \mathrm{str}(YX)$

2. $\mathrm{str}(X^{st}) = \mathrm{str}(X)$
3. $\mathrm{str}[X,Y] = 0$
4. $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \Rightarrow \ \mathrm{str}X \ = \ \mathrm{tr}A - \mathrm{tr}D$

Die Determinante.

Diese ist für invertierbare, gerade Elemente durch

$$\mathrm{sdet} : GL_{n|r}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}_0\,, \quad \mathrm{sdet}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A-BD^{-1}C)\det(D^{-1}) \quad (47)$$

definiert und es gilt:

1. $\mathrm{sdet}X \neq 0$
2. $\mathrm{sdet}X^{st} = \mathrm{sdet}X$
3. $\mathrm{sdet}(XY) = \mathrm{sdet}X\mathrm{sdet}Y$

Bemerkung 2.8. Zum Beweis der letzten Eigenschaft der Determinante nutzt man die folgende Zerlegung eines Elementes aus $GL_{n|r}(\mathfrak{A})$:

$$X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & BD^{-1} \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A-BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ D^{-1}C & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (48)$$

und verifiziert die Identität für Matrizen des beteiligten speziellen Typs.

2.6 Bilinearformen

Wir charakterisieren Bilinearformen $B \in \mathrm{Bil}\mathfrak{X}$ auf dem freien Bimodul $\mathfrak{X}$ durch die folgenden Eigenschaften. Für alle $X, Y \in \mathfrak{X}$ und $a \in \mathfrak{A}$ gilt

1. $B(X, Ya) = B(X,Y)a$
2. $B(aX, Y) = aB(X,Y)$
3. $B(Xa, Y) = (-1)^{aB}B(X, aY)$
4. $|B(X,Y)| = |B| + |X| + |Y|$

Die Modulstruktur auf $Bil\mathfrak{X}$ erhalten wir durch

$$(aB)(X,Y) = B(Xa,Y) \quad \text{und} \quad (Ba)(X,Y) = B(X,aY). \tag{49}$$

3. liefert uns wie im vorigen Abschnitt die Graduierung, und wir nennen B im Fall $|B| = 0$, d.h. $B(Xa,Y) = B(X,aY)$ für alle a, GERADE und im Fall $|B| = 1$, d.h. $B(Xa,Y) = (-1)^a B(X,aY)$ für alle a, UNGERADE.

Der Bilinearform B ordnen wir eine Matrix $b = (b_{MN})$ zu durch

$$b_{MN} = (-1)^M B(E_M, E_N) \tag{50}$$

damit gilt dann:

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= B(X^l_M E_M, E_N Y^r_N) \\ &= X^l_M B(E_M, E_N) Y^r_N \\ &= (-1)^M X^l_M b_{MN} Y^r_N \\ &= (-1)^{MX} X^r_M b_{MN} Y^r_N \\ &= (X^r)^{st}_M b_{MN} Y^r_N = (X^r)^{st} b Y^r. \end{aligned} \tag{51}$$

Satz 2.9. *Ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}\mathfrak{X}$ läßt genau dann die Bilinearform B invariant, d.h.*

$$B(F(X),Y) = -(-1)^{FX} B(X,F(Y)), \tag{52}$$

wenn für die zugeordneten Matrizen die Beziehung

$$a^{st} b = -ba \tag{53}$$

erfüllt ist.

Proof. Ist $a = (a_{MN})$ die F beschreibende Matrix und $b = (b_{MN})$ diejenige zu B, so gilt

$$\begin{aligned} &B(F(X),Y) = (aX)^{st} bY = (-1)^{FX} X^{st} a^{st} bY \\ &B(X,F(Y)) = X^{st} baY. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung sofort. □

- B heißt SUPERSYMMETRISCH bzw. SCHIEF-SUPERSYMMETRISCH , wenn

$$B(X,Y) = (-1)^{XY + B(X+Y)} B(Y,X) \tag{54}$$

bzw.

$$B(X,Y) = -(-1)^{XY+B(X+Y)}B(Y,X)\ ) \tag{55}$$

für alle $X, Y \in \mathfrak{X}$ erfüllt ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
B(Y,X) &= (-1)^{NY} Y_N b_{NM} X_M \\
&= (-1)^{NY+(Y+N)(B+N+M)} b_{NM} Y_N X_M \\
&= (-1)^{YB+YM+NB+N+NM}(-1)^{(X+M)(Y+N+B+N+M)} \cdot \\
&\quad \cdot X_M b_{NM} Y_N \\
&= (-1)^{YB+YM+NB+N+NM+XY+XB+XM+MY+MB+M} \cdot \\
&\quad \cdot X_M b_{NM} Y_N \\
&= (-1)^{XY+B(X+Y)}(-1)^{B(N+M)+NM+N+M}(-1)^{XM} X_M b_{NM} Y_N
\end{aligned}$$

und

$$(-1)^{XY+B(X+Y)}B(X,Y) = (-1)^{XY+B(X+Y)}(-1)^{XM} X_M b_{MN} Y_N .$$

Das bedeutet, dass sich die Supersymmetrie als spezielle Symmetrie in den Matrizen widerspiegelt:

$$b_{MN} = (-1)^{(B+M)(M+N)+N} b_{NM} = (-1)^N (b^{st})_{MN} . \tag{56}$$

Für $b = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$ in Blockform ist dann also

$$\begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} E^T & -G^T \\ -F^T & -H^T \end{pmatrix} & \text{falls } |B| = 0 \\ \begin{pmatrix} E^T & G^T \\ F^T & -H^T \end{pmatrix} & \text{falls } |B| = 1 \end{cases} . \tag{57}$$

Beispiel 2.10. Wir betrachten die gerade, supersymmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^{n|2r}$ die durch die Matrix

$$b_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \text{ mit } J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}$$

repräsentiert wird. Die Menge der Endomorphismen die b_0 invariant läßt, nennt man die *orthosymplektische Algebra* $\mathfrak{osp}_{n|2r}\mathbb{R}$ und sie besteht aus den

Matrizen $a \in \mathfrak{gl}_{n,r}\mathbb{R}$ mit $a^{st}b_0 = -b_0 a$. Schreibt man wie üblich $a = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ und beachtet

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}^{st} = \begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & D^T \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}^{st} = \begin{pmatrix} 0 & -C^T \\ B^T & 0 \end{pmatrix},$$

so ist

$$(\mathfrak{osp}_{n|2r}\mathbb{R})_0 = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} ; A^T = -A, D^T J = -JD \right\} \cong \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{sp}(r)$$

und

$$(\mathfrak{osp}_{n|2r}\mathbb{R})_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix} ; B = C^T J \right\}.$$

3 Alternierende Multilinearformen auf $\mathfrak{X}$

3.1 k-Formen und das Dachprodukt

Die Menge der 1-Formen auf $\mathfrak{X}$ ist schon in Abschnitt 2.4 als Dualraum zu $\mathfrak{X}$ eingeführt worden. Analog zum klassischen Fall werden wir die k-Formen als alternierende multilineare Abbildungen von $\mathfrak{X}$ nach $\mathfrak{A}$ definieren. Dabei werden bei der Linearität und beim Vertauschen der Argumente in natürlicher Weise Vorzeichen erscheinen. Des Weiteren werden wir eine Komponentendarstellung der Elemente angeben.

Eine k-Form ω auf $\mathfrak{X}$ ist eine Abbildung

$$\omega : \underbrace{\mathfrak{X} \times \ldots \times \mathfrak{X}}_{k \text{ mal}} \to \mathfrak{A} \tag{58}$$

mit den Eigenschaften

1. $|\omega| = |\omega(X_1, \ldots, X_k)| + |X_1| + \ldots + |X_k|$
2. $\omega(\ldots, X_j a + \tilde{X}_j, \ldots)$
   $= (-1)^{a(X_{j+1}+\cdots X_k)}\omega(\ldots, X_j, \ldots)a + \omega(\ldots, \tilde{X}_j, \ldots)$
3. $\omega(\ldots, X_i, \ldots, X_j, \ldots)$
   $= -(-1)^{X_j(X_i+\cdots+X_{j-1})+X_i(X_{i+1}+\cdots+X_{j-1})}\omega(\ldots, X_j, \ldots, X_i, \ldots)$

4. $(a\omega)(X_1, \ldots) = a\omega(X_1, \ldots)$
5. $(\omega a)(X_1, \ldots) = \omega(aX_1, \ldots)$

4. und 5. liefern zusammen mit 1. und 2.

6. $a\omega = (-1)^{\omega a}\omega a$

für $X_j \in \mathfrak{X}$ und $a \in \mathfrak{A}$. Die Menge der k-Formen bezeichnen wir mit $\Lambda_r^k(\mathfrak{X}^*)$. Dabei verdeutlicht der untere Index r die Rechtslinearität, also die Eigenschaft 2.

Sei nun $\{E_N\}$ eine Basis von $\mathfrak{X}$ und die Koordinaten der Vektoren bezeichnen wir mit $X_i = E_N X_i^N$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\omega(X_1, \ldots, X_k) &= \omega(X_1, \ldots, X_{k-1}, E_{N_k})X_k^{N_k} \\
&= (-1)^{(X_{k-1}+N_{k-1})N_k}\omega(X_1, \ldots, X_{k-2}, E_{N_{k-1}}, E_{N_k})X_{k-1}^{N_{k-1}}X_k^{N_k} \\
&\vdots \\
&= (-1)^{\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=j+1}^{k}(X_j+N_j)N_i}\omega(E_{N_1}, \ldots, E_{N_k})X_1^{N_1}\cdots X_k^{N_k} \\
&= (-1)^{\sum_{j<i}(X_j+N_j)N_i}\omega(E_{N_1}, \ldots, E_{N_k})X_1^{N_1}\cdots X_k^{N_k}
\end{aligned}$$

Wir definieren als Koordinaten der k-Form ω die Elemente

$$\omega_{N_1\cdots N_k} = (-1)^{\sum_{j<i}N_jN_i}\omega(E_{N_1}, \ldots, E_{N_k}), \tag{59}$$

und haben damit

$$\omega(X_1, \ldots, X_k) = (-1)^{\sum_{j<i}X_jN_i}\omega_{N_1\cdots N_k}X_1^{N_1}\cdots X_k^{N_k}. \tag{60}$$

Bemerkung 3.1. Die Koordinaten haben wegen 3. die folgende Symmetrieeigenschaft

$$\omega_{\sigma(N_1)\cdots\sigma(N_k)} = (-1)^\sigma\epsilon(\sigma(N_1)\ldots\sigma(N_k); N_1\ldots N_k)\omega_{N_1\cdots N_k} \tag{61}$$

wobei $(-1)^\sigma$ das Vorzeichen der Permutation σ, und

$$\epsilon(\sigma(N_1)\ldots\sigma(N_k); N_1\ldots N_k)$$

das durch die Umsortierung der Einträge in ω notwendige Vorzeichen ist.

Insbesondere ist ω durch die $\binom{\dim\mathfrak{X}}{k}$ Elemente $\omega_{N_1,\ldots,N_k}$ mit $1 \le N_1 < \ldots < N_k \le \dim\mathfrak{X}$ festgelegt.

Die Wahl der Form der Koeffizienten wird im nächsten Abschnitt klar.

Definition 3.2. Für $\omega \in \Lambda^k(\mathfrak{X}^*)$ und $\varphi \in \Lambda^l(\mathfrak{X}^*)$ ist das Dachprodukt $\omega \wedge \varphi \in \Lambda^{k+l}(\mathfrak{X}^*)$ für $X_1, \ldots, X_{k+l} \in \mathfrak{X}$ durch

$$\begin{aligned}
&\omega \wedge \varphi(X_1, \ldots, X_{k+l}) \\
&= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} (-1)^\sigma (-1)^{\varphi(X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})} \epsilon(X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(k+l)}; X_1 \ldots X_{k+l}) \cdot \\
&\qquad \cdot \omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \varphi(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)}) \qquad (62)
\end{aligned}$$

erklärt. Dabei ist $\epsilon(X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(k+l)}; X_1 \ldots X_{k+l})$ das Vorzeichen, das entsteht, wenn wir die Elemente $X_1, \ldots, X_{k+l}$ in die neue Reihenfolge $X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)}$ bringen.

Bemerkung 3.3. Das Dachprodukt erfüllt insbesondere die definierenden Eigenschaften 2. und 3. für Formen. Außerdem gilt

7. $\omega \wedge \varphi \; = \; (-1)^{kl}(-1)^{\omega\varphi} \varphi \wedge \omega.$
8. $(\omega \wedge \varphi) \wedge \psi = \omega \wedge (\varphi \wedge \psi)$
9. $a(\omega \wedge \varphi) = (a\omega) \wedge \varphi = (-)^{a\omega} \omega \wedge (a\varphi)$, $(\omega \wedge \varphi)a = \omega \wedge (\varphi a) = (-)^{a\varphi}(\omega a) \wedge \varphi$,

Proof. Zum Beweis von 7. rechnen wir o.B.d.A. mit $k < l$.

$$\begin{aligned}
&k!l!\, \omega \wedge \varphi(X_1, \ldots, X_{k+l}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} (-1)^\sigma (-1)^{\varphi(X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})} \epsilon(X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(k+l)}; X_1 \ldots X_{k+l}) \cdot \\
&\qquad \cdot \omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \varphi(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} (-1)^\sigma (-1)^{\varphi(X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})} \epsilon(X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(k+l)}; X_1 \ldots X_{k+l}) \cdot \\
&\qquad \cdot \; (-1)^{(\omega+X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})(\varphi+X_{\sigma(k+1)}+\cdots+X_{\sigma(k+l)})} \cdot \\
&\qquad \cdot \varphi(X_{\sigma(k+1)}, \ldots, X_{\sigma(k+l)}) \omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(k)}) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} (-1)^\sigma (-1)^{\varphi(X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})} \epsilon(X_{\sigma(1)} \ldots X_{\sigma(k+l)}; X_1 \ldots X_{k+l}) \cdot \\
&\qquad \cdot (-1)^{(\omega+X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})(\varphi+X_{\sigma(k+1)}+\cdots+X_{\sigma(k+l)})} \cdot \\
&\qquad \cdot (-1)^{(\omega+X_{\sigma(k+1)}+\cdots+X_{\sigma(k+l)})(X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})} \cdot
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot (-1)^{kl}(-1)^{\omega(X_{\sigma(k+1)}+\cdots+X_{\sigma(k+l)})}\cdot\\
&\cdot \varphi(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(k)},X_{\sigma(k+1)},\ldots,X_{\sigma(l)})\omega(X_{\sigma(l+1)},\ldots,X_{\sigma(l+k)})\\
= {}& (-1)^{kl}(-1)^{\omega\varphi}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}}(-1)^{\sigma}\epsilon(X_{\sigma(1)}\ldots X_{\sigma(k+l)};X_1\ldots X_{k+l})\cdot\\
&\cdot (-1)^{\omega(X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})}\varphi(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(l)})\omega(X_{\sigma(l+1)},\ldots,X_{\sigma(l+k)})\\
= {}& (-1)^{kl}(-1)^{\omega\phi}k!\ell!\varphi\wedge\omega(X_1,\ldots,X_{k+l}).
\end{aligned}
$$

Um die Linearität, also 2., nachzuweisen, machen wir einige Überlegungen zu den vorkommenden Vorzeichen. Zu zeigen ist

$$
\omega\wedge\varphi(\ldots,X_ja,\ldots) \;=\; (-1)^{a(X_{j+1}+\cdots X_{k+l})}\omega\wedge\varphi(\ldots,X_j,\ldots)a.
$$

Wir setzen $Y_i = \begin{cases} X_i; \text{ falls } i\neq j \\ X_ja; \text{ falls } i=j\end{cases}$. Dann ist

$$
\begin{aligned}
&k!l!\,\omega\wedge\varphi(\ldots,X_ja,\ldots)\\
= {}& \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}}(-1)^{\sigma}\underbrace{(-1)^{\varphi(Y_{\sigma(1)}+\cdots+Y_{\sigma(k)})}}_{(A)}\;\underbrace{\epsilon(Y_{\sigma(1)}\ldots Y_{\sigma(k+l)};Y_1\ldots Y_{k+l})}_{(B)}\cdot\\
&\cdot\underbrace{\omega(Y_{\sigma(1)},\ldots,Y_{\sigma(k)})\varphi(Y_{\sigma(k+1)},\ldots,Y_{\sigma(k+l)})}_{(C)}
\end{aligned}
$$

Wir untersuchen nun die drei Terme $(A),(B)$ und (C) in Abhängigkeit von a. Dazu sei $\sigma(i)=j$.

<u>$i\leq k$</u>

$$
\begin{aligned}
(A)\qquad & (-1)^{\varphi(Y_{\sigma(1)}+\cdots+Y_{\sigma(k)})}\\
&= (-1)^{\varphi(X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})}(-1)^{a\varphi}\\
(B)\qquad & \epsilon(Y_{\sigma(1)}\ldots Y_{\sigma(k+l)};Y_1\ldots Y_{k+l})\\
&= \epsilon(X_{\sigma(1)}\ldots X_{\sigma(k+l)};X_1\ldots X_{k+l})(-1)^{a(X_{j+1}+\cdots+X_{k+l})}\cdot\\
&\quad\cdot(-1)^{a(X_{\sigma(i+1)}+\cdots+X_{\sigma(k+l)})}\\
(C)\qquad & \omega(Y_{\sigma(1)},\ldots,Y_{\sigma(k)})\varphi(Y_{\sigma(k+1)},\ldots,Y_{\sigma(k+l)})\\
&= (-1)^{a(\varphi+X_{\sigma(i+1)}+\cdots+X_{\sigma(k+l)})}\omega(X_{\sigma(1)},\ldots,X_{\sigma(k)})\cdot\\
&\quad\cdot\varphi(X_{\sigma(k+1)},\ldots,X_{\sigma(k+l)})a
\end{aligned}
$$

<u>$i>k$</u>

$$
(A)\qquad (-1)^{\varphi(Y_{\sigma(1)}+\cdots+Y_{\sigma(k)})}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{\varphi(X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})}\\
(B) \quad & \text{wie oben}\\
(C) \quad & \omega(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(k)})\varphi(Y_{\sigma(k+1)},\dots,Y_{\sigma(k+l)})\\
&= (-1)^{a(X_{\sigma(i+1)}+\cdots+X_{\sigma(k+l)})}\omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\cdot\\
&\quad\cdot\varphi(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l)})a
\end{aligned}
$$

Das Produkt aus diesen drei Termen ist in beiden Fällen gleich, nämlich

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{a(X_{j+1}+\cdots+X_{k+l})+\varphi(X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})}\epsilon(X_{\sigma(1)}\dots X_{\sigma(k+l)};X_1\dots X_{k+l})\cdot\\
&\quad\cdot\omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\varphi(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l)})
\end{aligned}
$$

Das liefert nun die Behauptung, denn

$$
\begin{aligned}
&k!l!\,\omega\wedge\varphi(\dots,X_ja,\dots)\\
&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}}(-1)^\sigma(-1)^{\varphi(Y_{\sigma(1)}+\cdots+Y_{\sigma(k)})}\epsilon(Y_{\sigma(1)}\dots Y_{\sigma(k+l)};Y_1\dots Y_{k+l})\cdot\\
&\quad\cdot\omega(Y_{\sigma(1)},\dots,Y_{\sigma(k)})\varphi(Y_{\sigma(k+1)},\dots,Y_{\sigma(k+l)})\\
&=(-1)^{a(X_{j+1}+\cdots+X_{k+l})}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}}(-1)^\sigma(-1)^{\varphi(X_{\sigma(1)}+\cdots+X_{\sigma(k)})}\cdot\\
&\quad\cdot\epsilon(X_{\sigma(1)}\dots X_{\sigma(k+l)};X_1\dots X_{k+l})\cdot\\
&\quad\cdot\omega(X_{\sigma(1)},\dots,X_{\sigma(k)})\varphi(X_{\sigma(k+1)},\dots,X_{\sigma(k+l)})a\\
&=(-1)^{a(X_{j+1}+\cdots+X_{k+l})}k!l!\,\omega\wedge\varphi(\dots,X_j,\dots)a
\end{aligned}
$$

Teil 3., 8. und 9. zeigt man durch ähnliche direkte Rechnungen. □

Beispiel 3.4. Für zwei 1-Formen gilt

$$
\begin{aligned}
&\omega\wedge\varphi(X,Y)\\
&=(-1)^{\varphi X}\omega(X)\varphi(Y)-(-1)^{\varphi Y}(-1)^{XY}\omega(Y)\varphi(X)\\
&=(-1)^{\varphi X}\omega(X)\varphi(Y)-(-1)^{\varphi Y}(-1)^{XY}(-1)^{(\omega+Y)(\varphi+X)}\varphi(X)\omega(Y)\\
&=(-1)^{\varphi X}\omega(X)\varphi(Y)-(-1)^{\omega\varphi}(-1)^{\omega X}\varphi(X)\omega(Y)\\
&=(\omega\otimes\varphi-(-1)^{\omega\varphi}\varphi\otimes\omega)(X,Y).
\end{aligned}
$$

Die letzte Zeile benutzt das Tensorprodukt zwischen $\mathfrak{X}^*$ und sich selbst. Das liefert eine bi(-rechts)lineare Abbildung $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}\to\mathfrak{A}$ mit entsprechenden Vorzeichen, analog denen aus Eigenschaft 2. der k-Formen (vgl. im Gegensatz dazu die Definition der Bilinearformen in Abschnitt 2.6).

3.2 Eine Basis von $\Lambda^k(\mathfrak{X}^*)$

Die Menge $\Lambda^k(\mathfrak{X}^*)$ ist ein freies $\mathfrak{A}$-Modul mit Basis

$$\mathcal{B} := \left\{E^{N_1} \wedge \cdots \wedge E^{N_k};\ 1 \leq N_1 < \ldots < N_k \leq \dim\mathfrak{X}\right\}, \tag{63}$$

mit $E^M := (E_M)^*$ als duale Basis zur Basis $\{E_M\}$ von $\mathfrak{X}$. Zum Beweis der Aussage schreiben wir ein Element $\omega \in \mathrm{span}_{\mathfrak{A}}\mathcal{B}$ als

$$\omega = \sum_{1\leq N_1<\ldots<N_k\leq\dim\mathfrak{X}} \omega_{N_1\ldots N_k} E^{N_1} \wedge \cdots \wedge E^{N_k}. \tag{64}$$

Die “fehlenden” Koeffizienten definieren wir mit Hilfe der Symmetriebeziehung aus Bemerkung 8, und erhalten so

$$\omega \;=\; \tfrac{1}{k!}\, \omega_{N_1\ldots N_k} E^{N_1} \wedge \cdots \wedge E^{N_k}. \tag{65}$$

Lemma 3.5. *Für die Basiselemente gilt*

$$\begin{aligned}
&E^{N_1} \wedge \cdots \wedge E^{N_k}(E_{M_1}, \ldots, E_{M_k})\\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} (-1)^\sigma (-1)^{\sum_{1\leq j<i\leq k} \sigma(M_j)N_i} \epsilon(\sigma(M_1)\ldots\sigma(M_k); M_1\ldots M_k)\cdot\\
&\quad \cdot \delta^{N_1}_{\sigma(M_1)} \cdots \delta^{N_k}_{\sigma(M_k)}
\end{aligned} \tag{66}$$

Proof. Der Beweis läuft per Induktion.

$\underline{k=1}$: $E^{N_1}(E_{M_1}) = \delta^{N_1}_{M_1}$

$\underline{k \to k+1}$:

$$\begin{aligned}
E^{N_1}\wedge\ &\cdots \wedge E^{N_k} \wedge E^{N_{k+1}}(E_{M_1}, \ldots, E_{M_{k+1}})\\
&= \frac{1}{k!1!} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{k+1}} (-1)^\tau (-1)^{N_{k+1}(\tau(M_1)+\cdots+\tau(M_k))}\cdot\\
&\qquad \cdot \epsilon(\tau(M_1)\ldots\tau(M_{k+1}); M_1\ldots M_{k+1})\cdot\\
&\qquad \cdot E^{N_1} \wedge \cdots \wedge E^{N_k}(E_{\tau(M_1)}, \ldots, E_{\tau(M_k)}) E^{N_{k+1}}(E_{\tau(M_{k+1})})\\
&= \frac{1}{k!} \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{k+1}} (-1)^\tau (-1)^{N_{k+1}(\tau(M_1)+\cdots+\tau(M_k))}\cdot
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad \cdot \epsilon(\tau(M_1)\dots\tau(M_{k+1}); M_1\dots M_{k+1})\cdot \\
&\quad \cdot \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} (-1)^\sigma(-1)^{\sum_{1\le j<i\le k}\sigma\circ\tau(M_j)N_i}\cdot \\
&\quad \cdot \epsilon(\sigma\circ\tau(M_1)\dots\sigma\circ\tau(M_k); \tau(M_1)\dots\tau(M_k))\cdot \\
&\quad \cdot \delta^{N_1}_{\sigma\circ\tau(M_1)}\cdots\delta^{N_k}_{\sigma\circ\tau(M_k)}\delta^{N_{k+1}}_{\tau(M_{k+1})} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{\tilde\sigma\in\tilde{\mathfrak{S}}_k\subset\mathfrak{S}_{k+1}}\ \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{k+1}} (-1)^{\tilde\sigma}(-1)^\tau(-1)^{N_{k+1}(\tau(M_1)+\dots+\tau(M_k))}\cdot \\
&\quad \cdot (-1)^{\sum_{1\le j<i\le k}\tilde\sigma\circ\tau(M_j)N_i}\cdot \\
&\quad \cdot \epsilon(\tilde\sigma\circ\tau(M_1)\dots\tilde\sigma\circ\tau(M_k); \tau(M_1)\dots\tau(M_k))\cdot \\
&\quad \cdot \epsilon(\tau(M_1)\dots\tau(M_{k+1}); M_1\dots M_{k+1})\cdot \\
&\quad \cdot \delta^{N_1}_{\tilde\sigma\circ\tau(M_1)}\cdots\delta^{N_k}_{\tilde\sigma\circ\tau(M_k)}\delta^{N_{k+1}}_{\tilde\sigma\circ\tau(M_{k+1})}
\end{aligned}
$$

In der letzten Gleichung haben wir $\sigma\in\mathfrak{S}_k$ durch $\tilde\sigma=\sigma\times\mathrm{id}\in\mathfrak{S}_{k+1}$ ersetzt. Das ändert das Vorzeichen der Permutation nicht, und wir haben insbesondere $\tilde\sigma\circ\tau(M_{k+1})=\tau(M_{k+1})$. Das liefert uns dann

$$
\begin{aligned}
&\epsilon(\tilde\sigma\circ\tau(M_1)\dots\tilde\sigma\circ\tau(M_k); \tau(M_1)\dots\tau(M_k)) \\
&\quad = \epsilon(\tilde\sigma\circ\tau(M_1)\dots\tilde\sigma\circ\tau(M_k)\tilde\sigma\circ\tau(M_{k+1}); \tau(M_1)\dots\tau(M_k)\tau(M_{k+1})).
\end{aligned} \tag{67}
$$

Die letzte Gleichung läßt dann mit der folgenden Identität eine Vereinfachung des obigen Ausdrucks zu.

$$
\epsilon(N_1\dots N_k; M_1\dots M_k)\epsilon(M_1\dots M_k; L_1\dots L_k)=\epsilon(N_1\dots N_k; L_1\dots L_k).
$$

Wir erhalten nämlich

$$
\begin{aligned}
&E^{N_1}\wedge\dots\wedge E^{N_{k+1}}(E_{M_1},\dots,E_{M_{k+1}}) \\
&\quad = \frac{1}{k!}\sum_{\tilde\sigma\in\tilde{\mathfrak{S}}_k\subset\mathfrak{S}_{k+1}}\ \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{k+1}} (-1)^{\tilde\sigma}(-1)^\tau(-1)^{N_{k+1}(\tau(M_1)+\dots+\tau(M_k))}\cdot \\
&\quad\quad \cdot (-1)^{\sum_{1\le j<i\le k}\tilde\sigma\circ\tau(M_j)N_i}\cdot \\
&\quad\quad \cdot \epsilon(\tilde\sigma\circ\tau(M_1)\dots\tilde\sigma\circ\tau(M_{k+1}); M_1\dots M_{k+1})\cdot \\
&\quad\quad \cdot \delta^{N_1}_{\tilde\sigma\circ\tau(M_1)}\cdots\delta^{N_{k+1}}_{\tilde\sigma\circ\tau(M_{k+1})}
\end{aligned}
$$

Nun gilt noch für beliebige Permutationen τ

$$
|M_1|+\dots+|M_{k+1}|=|\tau(M_1)|+\dots+|\tau(M_{k+1})|
$$

was dann mit $\tilde\sigma\circ\tau(M_{k+1})=\tau(M_{k+1})$

$$|\tau(M_1)|+\cdots+|\tau(M_k)|=|\tilde\sigma\circ\tau(M_1)|+\cdots+|\tilde\sigma\circ\tau(M_k)|. \tag{68}$$

liefert und damit

$$(-1)^{N_{k+1}(\tau(M_1)+\cdots+\tau(M_k))}(-1)^{\sum_{1\le j<i\le k}\tilde\sigma\circ\tau(M_j)N_i} = (-1)^{\sum_{1\le j<i\le k+1}\tilde\sigma\circ\tau(M_j)N_i}. \tag{69}$$

Wir ändern nun die zweite Summation zu $\tilde\tau=\tilde\sigma\circ\tau$ und mit $(-1)^{\tilde\sigma}(-1)^{\tau}=(-1)^{\tilde\sigma\circ\tau}=(-1)^{\tilde\tau}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&E^{N_1}\wedge\cdots\wedge E^{N_{k+1}}(E_{M_1},\dots,E_{M_{k+1}})\\
&\quad=\frac{1}{k!}\sum_{\tilde\sigma\in\tilde{\mathfrak{S}}_k\subset\mathfrak{S}_{k+1}}\ \sum_{\tilde\tau\in\mathfrak{S}_{k+1}}(-1)^{\tilde\tau}(-1)^{\sum_{1\le j<i\le k+1}\tilde\tau(M_j)N_i}\cdot\\
&\qquad\cdot\epsilon(\tilde\tau(M_1)\dots\tilde\tau(M_{k+1});M_1\dots M_{k+1})\delta^{N_1}_{\tilde\tau(M_1)}\cdots\delta^{N_{k+1}}_{\tilde\tau(M_{k+1})}\\
&\quad=\sum_{\tilde\tau\in\mathfrak{S}_{k+1}}(-1)^{\tilde\tau+\sum_{j<i}\tilde\tau(M_j)N_i}\epsilon(\tilde\tau(M_1)\dots\tilde\tau(M_{k+1});M_1\dots M_{k+1})\cdot\\
&\qquad\cdot\delta^{N_1}_{\tilde\tau(M_1)}\cdots\delta^{N_{k+1}}_{\tilde\tau(M_{k+1})},
\end{aligned}$$

womit wir die Induktion beenden. □

Mit diesem Lemma haben wir dann

$$\begin{aligned}
&E^{N_1}\wedge\cdots\wedge E^{N_k}(X_1,\dots,X_k)\\
&=E^{N_1}\wedge\cdots\wedge E^{N_k}(E_{M_1}X_1^{M_1},\dots,E_{M_k}X_k^{M_k})\\
&=(-1)^{\sum_{j<i}(X_j+M_j)M_i}E^{N_1}\wedge\cdots\wedge E^{N_k}(E_{M_1},\dots,E_{M_k})X_1^{M_1}\cdots X_k^{M_k}\\
&=(-1)^{\sum_{j<i}(X_j+M_j)M_i}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(-1)^{\sigma}(-1)^{\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=j+1}^{k}\sigma(M_j)N_i}\cdot\\
&\quad\cdot\epsilon(\sigma(M_1)\dots\sigma(M_k);M_1\dots M_k)\delta^{N_1}_{\sigma(M_1)}\cdots\delta^{N_k}_{\sigma(M_k)}X_1^{M_1}\cdots X_k^{M_k}\\
&=(-1)^{\sum_{j<i}X_jM_i}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(-1)^{\sigma}(-1)^{\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=j+1}^{k}(\sigma(M_j)N_i+M_jM_i)}\cdot\\
&\quad\cdot\epsilon(\sigma(M_1)\dots\sigma(M_k);M_1\dots M_k)\delta^{N_1}_{\sigma(M_1)}\cdots\delta^{N_k}_{\sigma(M_k)}X_1^{M_1}\cdots X_k^{M_k}.
\end{aligned}$$

Für die Auswertung von ω ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\omega(X_1,\ldots,X_k)\\
&\quad= \frac{1}{k!}\,\omega_{N_1\ldots N_k}E^{N_1}\wedge\cdots\wedge E^{N_k}(X_1,\ldots,X_k)\\
&\quad= (-1)^{\sum_{j<i}X_jM_i}\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(-1)^{\sum_{j<i}(\sigma(M_j)N_i+M_jM_i)}\cdot\\
&\qquad\quad\cdot(-1)^{\sigma}\epsilon(\sigma(M_1)\ldots\sigma(M_k);M_1\ldots M_k)\delta^{N_1}_{\sigma(M_1)}\cdots\delta^{N_k}_{\sigma(M_k)}\cdot\\
&\qquad\quad\cdot\,\omega_{N_1\ldots N_k}X_1^{M_1}\cdots X_k^{M_k}\\
&\quad= (-1)^{\sum_{j<i}X_jM_i}\frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(-1)^{\sum_{j<i}(\sigma(M_j)\sigma(M_i)+M_jM_i)}\cdot\\
&\qquad\quad\cdot\underbrace{(-1)^{\sigma}\epsilon(\sigma(M_1)\ldots\sigma(M_k);M_1\ldots M_k)\omega_{\sigma(M_1)\ldots\sigma(M_k)}}_{=\ \omega_{M_1\ldots M_k}}\cdot\\
&\qquad\quad\cdot X_1^{M_1}\cdots X_k^{M_k}\\
&\quad= \frac{1}{k!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k}(-1)^{\sum_{j<i}(\sigma(M_j)\sigma(M_i)+M_jM_i)}(-1)^{\sum_{j<i}X_jM_i}\cdot\\
&\qquad\quad\cdot\,\omega_{M_1\ldots M_k}X_1^{M_1}\cdots X_k^{M_k}
\end{aligned}$$

Jetzt gilt für eine beliebige Permutation σ der Elemente $\{M_1,\ldots,M_k\}$ weiterhin

$$\sum_{j<i}|\sigma(M_j)||\sigma(M_i)| = \sum_{j<i}|M_j||M_i|,$$

denn wir sehen, dass in diesen Summen alle Paarungen von Produkten unterschiedlicher Elemente aus $\{M_1,\ldots,M_k\}$, bzw. $\{\sigma(M_1),\ldots,\sigma(M_k)\}$ genau einmal vorkommen. Das liefert die obige Identität zwischen den Graden und damit den folgenden Ausdruck

$$\omega(X_1,\ldots,X_k) \;=\; (-1)^{\sum_{j<i}X_jM_i}\omega_{M_1\ldots M_k}X_1^{M_1}\cdots X_k^{M_k}, \tag{70}$$

Was auch genau der Ausdruck ist, den wir im vorigen Abschnitt erhalten haben, womit auch der Vorfaktor bei der Wahl der Koeffizienten der k-Formen begründet ist.

Beispiel 3.6. Das Produkt zweier 1–Formen $\omega = \omega_N E^N$, $\varphi = \varphi_M E^M$ liefert eine 2–Form $\omega\wedge\varphi = \frac{1}{2}(\omega\wedge\varphi)_{MN}E^M\wedge E^N$. Dessen Koeffizienten sind durch

$$(\omega\wedge\varphi)_{MN}$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{MN}\omega\wedge\varphi(E_M,E_N)\\
&= (-1)^{MN}\big((-1)^{M\varphi}\omega(E_M)\varphi(E_N) - (-1)^{MN}(-1)^{N\varphi}\omega(E_N)\varphi(E_M)\big)\\
&= (-1)^{MN}\big((-1)^{M\varphi}\omega_M\varphi_N - (-1)^{MN}(-1)^{N\varphi}\omega_N\varphi_M\big)\\
&= (-1)^{MN}\big((-1)^{M\varphi}\omega_M\varphi_N - (-1)^{\omega\varphi}(-1)^{M\omega}\varphi_M\omega_N\big)
\end{aligned}
$$

gegeben. Rechnet man weiter so bekommen wir das erwartete Resultat:

$$
\begin{aligned}
\omega\wedge\varphi &= \tfrac{1}{2}(\omega\wedge\varphi)_{MN}E^M\wedge E^N\\
&= (-1)^{MN}\tfrac{1}{2}\big((-1)^{M\varphi}\omega_M\varphi_N - (-1)^{\omega\varphi}(-1)^{M\omega}\varphi_M\omega_N\big)\,E^M\wedge E^N\\
&= (-1)^{M(\varphi+N)}\omega_M\varphi_N E^M\wedge E^N
\end{aligned}
$$