Mathematischer Vorkurs

Frank Klinker

Inhaltsverzeichnis

Ausarbeitung einer 30-stündigen Blockvorlesung,
Technische Universität Dortmund, Fakultät für Mathematik.
Email: mail@frank-klinker.de

1 Mengen

Definition 1.1 (Menge)**.** Unter einer MENGE verstehen wir eine Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen. Diese Objekte heißen dann ELEMENTE der Menge.

Bemerkung 1.2. Mengen lassen sich beschreiben durch ...

- ... Aufzählen aller Elemente mit Mengenklammern $\{\ldots\}$.
- ... Angabe einer Eigenschaft E, die die Elemente beschreibt:

  $$\{x \,|\, x \text{ hat die Eigenschaft } E\}$$

Beispiel 1.3.

- Die Menge der NATÜRLICHEN ZAHLEN:

  $$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

  (Bei uns ist 0 eine natürliche Zahl).

- Für alle natürlichen Zahlen $k > 0$ definieren wir

  $$\mathbb{N}^{\geq k} := \{k, k+1, k+2, \ldots\} = \{\ell \,|\, \ell \in \mathbb{N} \text{ und } \ell \geq k\}$$

  und wir schreiben $\mathbb{N}^+ := \mathbb{N}^{\geq 1}$ für die natürlichen Zahlen ohne Null.

- Die Menge der GANZEN ZAHLEN:

  $$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}.$$

- Die Menge der RATIONALEN ZAHLEN als Menge der (gekürzten) Brüche:

  $$\mathbb{Q} := \left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a, b \text{ ganze Zahlen und } b > 0\right\}.$$

- Die Menge der REELLEN und KOMPLEXEN ZAHLEN: $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.
- Die LEERE MENGE, $\emptyset$. Die Menge, die kein Element enthält.

Notation 1.4.

- Ist a ein Element der Menge M, so schreiben wir kurz $a \in M$.
- Ist a kein Element der Menge M, so schreiben wir kurz $a \notin M$.

Beispiel 1.5. $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{Z}$ aber $-3 \notin \mathbb{N}$.

Definition 1.6 (Mengenoperationen)**.** Es seien M und N Mengen.

1. Die VEREINIGUNGSMENGE $M \cup N$ ist die Menge der Elemente, die in M oder in N enthalten sind.

   $$M \cup N = \{x \,|\, x \in M \text{ oder } x \in N\}.$$

2. Die SCHNITTMENGE $M \cap N$ ist die Menge der Elemente, die in M und in N enthalten sind.

   $$M \cap N = \{x \,|\, x \in M \text{ und } x \in N\}.$$

3. M heißt Teilmenge von N, wenn alle Elemente die in M enthalten sind auch in N enthalten sind. Wir schreiben dann $M \subset N$ oder $N \supset M$.

4. Die DIFFERENZMENGE $N \setminus M$ ist die Menge der Elemente, die in N enthalten sind, aber nicht in M.

   $$N \setminus M := \{x \,|\, x \in N \text{ und } x \notin M\}.$$

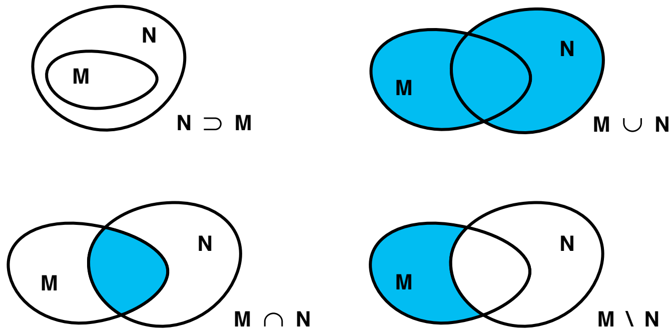
5. Ist $M \subset N$ so ist das KOMPLEMENT VON M (BEZÜGLICH N) wie folgt definiert:

   $$M^c := \{x \,|\, x \in N \text{ und } x \notin M\}.$$

Bemerkung 1.7.

- Es gilt in jedem Fall $\emptyset \subset M \subset M$.
- In 4. muss M keine Teilmenge von N sein. Ist zum Beispiel $M \cap N = \emptyset$, so ist $N \setminus M = N$ und $M \setminus N = M$.
- Ist aber $M \subset N$ so ist $N \setminus M = M^c$ und $M \setminus N = \emptyset$.
- Zwei Mengen M und N sind gleich, wenn die eine jeweils eine Teilmenge der anderen ist. Also $M = N$ genau dann, wenn $M \subset N$ und $N \subset M$.

Graphisch kann man die Mengenpoperationen gut mit Hilfe von VENN-DIAGRAMMEN darstellen :



Satz 1.8 (Rechenregeln für Mengenoperationen)**.** *1.* $M \cup N = N \cup M$ *und* $M \cap N = N \cap M$.

2. $(M \cup N) \cup P = M \cup (N \cup P)$ *und* $(M \cap N) \cap P = M \cap (N \cap P)$.

3. $M \cup (N \cap P) = (M \cup N) \cap (M \cup P)$ *und* $M \cap (N \cup P) = (M \cap N) \cup (M \cap P)$.

4. $(M^c)^c = M$.

5. $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$ *und* $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$.

6. $M \cap N = \big(M \cup N\big) \setminus \big((M \setminus N) \cup (N \setminus M)\big)$ *und* $(M \setminus N) \cup (N \setminus M) = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$.

Bemerkung 1.9. Für drei Mengen A, B und C gilt in der Regel höchstens eine der Identitäten

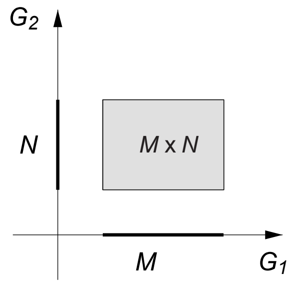
$$C = A \setminus B \quad \text{oder} \quad B = A \setminus C\,.$$

Beide gelten genau dann, wenn die folgende spezielle Situation vorliegt : $B \cup C = A$.

Definition 1.10 (Kartesisches Produkt)**.** 1. Das kartesische Produkt zweier Mengen M und N wird mit $M \times N$ bezeichnet. Es enthält als Elemente die geordneten Paare (m, n) mit $m \in M$ und $n \in N$.

$$M \times N = \{(m, n) \,|\, m \in M \text{ und } n \in N\}\,.$$

Ist $M \subset G_1$ und $N \subset G_2$ so kann man das kartesische Produkt wie folgt darstellen:



2. Das kartesische Produkt mehrere Mengen $M_1, \ldots, M_k$ wird analog mit Hilfe geordneter k-Tupel definiert:

$$\begin{aligned} & M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k \\ = & \{(m_1, m_2, \ldots, m_k) \,|\, m_1 \in M_1 \text{ und } m_2 \in M_2 \text{und } \ldots \text{ und } m_k \in M_k\} \end{aligned}$$

3. Stimmen die Mengen überein so schreiben wir auch $M^2 = M \times M$, $M^3 = M \times M \times M$, usw.

Bemerkung 1.11.
- Als Mengen stimmen $M \times N$ und $N \times M$ nicht überein.
- Als Mengen stimmen $(M \times N) \times P$ und $M \times N \times P$ und $M \times (N \times P)$ nicht überein.

Definition 1.12 (Quantoren)**.** Ist A eine Eigenschaft, die für die Elemente einer Menge M sinnvoll ist, so schreiben wir

- $\forall x \in M : A(x)$, wenn jedes Element aus M die Eigenschaft A hat – in Worten: für alle $x \in M$ gilt $A(x)$.
- $\exists x \in M : A(x)$, wenn es mindestens ein Element aus M gibt, das die Eigenschaft A hat – in Worten: es gibt ein $x \in M$ mit $A(x)$.

Beispiel 1.13. Das kartesische Produkt von k Mengen läßt sich wie folgt schreiben:

$$M_1 \times \ldots \times M_k = \big\{(m_1, \ldots, m_k) \,|\, \forall i \in \{1, \ldots, k\} : m_i \in M_i\big\} .$$

2 Zahlen

Ein Zahlbereich ist eine “Menge in der man rechnen kann”.

Die gängigsten Zahlbereiche sind:

$$\begin{array}{lcl} \mathbb{N} & \leftarrow & \text{Die natürlichen Zahlen} \\ \cap & & \\ \mathbb{Z} & \leftarrow & \text{Die ganzen Zahlen} \\ \cap & & \\ \mathbb{Q} & \leftarrow & \text{Die rationalen Zahlen} \\ \cap & & \\ \mathbb{R} & \leftarrow & \text{Die reellen Zahlen} \\ \cap & & \\ \mathbb{C} & \leftarrow & \text{Die komplexen Zahlen (später)} \end{array}$$

Es gibt aber noch viel mehr Zahlbereiche.

<u>“zwischen” $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$:</u>

- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}\}$.
- $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] := (\mathbb{Q}[\sqrt{2}])[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} \,|\, a, b \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]\}$. Diese Menge stimmt mit $\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \,|\, a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$ überein.
- $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \,|\, a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.
- Es gilt
$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \subset \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \cap \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] = \mathbb{Q}\,.$$
- Die hier konstruierten “Zwischenzahlbereiche” sind alle in einem gewissen Sinne “endlich”.
- Die Menge $\mathbb{I}$ aller aus rationalen Zahlen mit Hilfe von Zirkel und Lineal konstruierbaren rellen Zahlen.
- Es ist z.B. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{I}$ und $\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \subset \mathbb{I}$, aber $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \not\subset \mathbb{I}$.
- $\mathbb{A}$ $\leftarrow$ Die reell algebraischen Zahlen (= die Menge aller reellen Nullstellen von Polynomen mit ganzzahligen Koeffizienten)
- Die Mengen $\mathbb{I}$ und $\mathbb{A}$ sind in einem gewissen Sinne “unendlich”.

- Es gilt zum Beispiel $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] \subset \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] \subset \mathbb{A}$ und $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] \subset \mathbb{A}$, sowie $\mathbb{I} \subset \mathbb{A}$.
- In einem in der Vorlesung näher erläutertem Sinn ist $\mathbb{A}$ der größte solcher "Zwischenzahlbereiche".
- Die Elemente in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ nennt man reelle transzendente Zahlen.

<u>"zwischen" $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{C}$</u>

- Man kann in den obigen Betrachtungen auch den Zusatz reell weglassen und dann ähnliche Konstruktionen durchführen – nimm alle in der Ebene (!) aus $\mathbb{Q}$ konstruierbare Punkte oder nimm alle (!) Nullstellen von rationalen Polynomen.

<u>"hinter" $\mathbb{C}$:</u>

- $\mathbb{H} \quad \leftarrow \quad$ Die Quaternionen.
- $\mathbb{O} \quad \leftarrow \quad$ Die Oktonionen.
- Es gilt
$$\mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}\,.$$

Wir werden nun etwas genauer:

Definition 2.1 (Rationale und irrationale Zahlen)**.**

1. $\mathbb{R}$ ist die Menge der Dezimalbrüche.
2. $\mathbb{Q}$ ist die Menge der abbrechenden oder periodischen Dezimalbrüche. Dabei wird die Periode 9 ausgeschlossen : Man identifiziert die Zahl $n, a_1a_2 \dots a_{k-1}a_k\overline{9}$ mit der Zahl $n, a_1a_2 \dots a_{k-1}b_k$ wobei $b_k = a_k + 1$. Dabei sind $n \in \mathbb{Z}$, $a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \in \{0, \dots, 9\}$, $a_k \in \{0, \dots, 8\}$.
3. Die hier gegebene Definition der Menge $\mathbb{Q}$ stimmt mit der Definition über Brüche aus Kapitel 1 überein.
4. Die Elemente der Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, also die nicht-abbrechenden und nicht-periodischen Dezimalbrüche, heißen IRRATIONALE ZAHLEN.

Beispiel 2.2 (Einige irrationale Zahlen)**.**

- Die Länge der Diagonale eines Quadrates der Seitenlänge 1. Diese Länge ist $\sqrt{2} = 1,4142\dots$.

- Die Seitenlänge eines Würfels mit Volumen 2. Diese Länge ist $\sqrt[3]{2} = 1,2599\ldots$.

- Der Umfang eines Kreises mit Durchmesser 1. Diese Länge ist $\pi = 3,141592654\ldots$

- Die EULERSCHE ZAHL $e = 2,718281828\ldots$ ist irrational.

Bemerkung 2.3. $\sqrt{2}$ und $\sqrt[3]{2}$ sind algebraisch aber nur die erste ist konstruierbar – Verdopplung des Würfelvolumens nicht möglich.

e und π sind transzendent – Quadratur des Kreises nicht möglich.

Definition 2.4 (Rechenoperationen)**.** Sind $x, y \in \mathbb{R}$ so sind folgende Rechenoperationen erklärt:

$$x + y \text{ (Addition) },\ x - y \text{ (Subtraktion) },\ xy \text{ (Multiplikation) und für}$$
$$y \neq 0 \text{ auch } \frac{x}{y} \text{ (Division).}$$

Bemerkung 2.5. Die Eingangs definierten Zahlenbereiche haben alle die Eigenschaft, dass man in ihnen diese Operationen durchführen kann, ohne dass man die Menge verlässt. Bei $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$ muss man natürlich Einschränkungen machen: So darf man in $\mathbb{N}$ nur unbeschränkt addieren und multiplizieren und in $\mathbb{Z}$ nur unbeschränkt addieren, subtrahieren und multiplizieren.

Satz 2.6 (Rechenregeln)**.**

1. *Kommutativgesetze:* $x + y = y + x$ *und* $xy = yx$

2. *Assoziativgesetze:* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *und* $x(yz) = (xy)z$

3. *Distributivgesetz:* $x(y + z) = xy + xz$

Als direkte Konsequenz erhalten wir die drei Binomischen Formeln

4. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Definition 2.7 (Kurzschreibweisen für Summen und Produkte)**.** Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ so schreiben wir

1. $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m + a_{m+1} + \ldots + a_n$ und

2. $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m \cdot a_{m+1} \cdot \ldots \cdot a_n$

Dabei kann der LAUFINDEX eine beliebige Variable sein, etwa $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{j=m}^{n} a_j$.

Bemerkung 2.8. Es gelten die folgenden Vereinbarungen wenn $m > n$ ist

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = 0 \qquad \text{und} \qquad \prod_{k=m}^{n} a_k = 1$$

Bemerkung 2.9 (Rechenregeln)**.**

- $a \cdot \sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m}^{n} (a a_k)$.
- $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k + \sum\limits_{k=m}^{n} b_k = \sum\limits_{k=m}^{n} (a_k + b_k)$.
- $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k \cdot \prod\limits_{k=m}^{n} b_k = \prod\limits_{k=m}^{n} (a_k b_k)$.
- $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k + \sum\limits_{k=n+1}^{p} a_k = \sum\limits_{k=m}^{p} a_k \; , \; \prod\limits_{k=m}^{n} a_k \cdot \prod\limits_{k=n+1}^{p} a_k = \prod\limits_{k=m}^{p} a_k, \quad p > n.$
- INDEXVERSCHIEBUNG: $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = \sum\limits_{k=m-t}^{n-t} a_{k+t}, \quad t \in \mathbb{Z}$

Beispiel 2.10.

- ARITHMETISCHE SUMMENFORMEL: $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
- GEOMETRISCHE SUMMENFORMEL: $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für eine reelle Zahl $q \neq 1$.

Definition 2.11 (Potenzen)**.** Für $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die n-TE POTENZ VON a :

$$a^n := \prod_{k=1}^{n} a \, .$$

Insbesondere gilt also $a^0 = 1$ und $0^0 = 1$ aber $0^n = 0$ für $n > 0$.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a^{-n} := \frac{1}{a^n} \, .$$

$a \in \mathbb{R}$ heißt die BASIS und $n \in \mathbb{Z}$ der EXPONENT der Potenz a^n.

Satz 2.12 (Potenzregeln)**.** *Für $n, m \in \mathbb{Z}$ und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

1. $a^m a^n = a^{n+m}$
2. $a^n b^n = (ab)^n$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$

falls die Ausdrücke definiert sind.

Notation 2.13. Der Ausdruck a^{b^c} ist stets als $a^{(b^c)}$ zu verstehen.

Definition 2.14 (Quadratwurzel)**.** Sind $a, b \in \mathbb{R}$ und $b^2 = a$ so definieren wir

$$\sqrt{a} := \begin{cases} b & \text{falls } b \geq 0 \\ -b & \text{falls } b < 0 \end{cases}$$

Die stets nicht-negative Zahl $\sqrt{a}$ heißt QUADRATWURZEL VON a.

Satz 2.15 (Existenz der Quadratwurzel)**.** *Die Gleichung $x^2 = a$ besitzt ...*

- *.. für $a < 0$ keine reelle Lösung ,*
- *... für $a = 0$ die eindeutige Lösung $x = 0$ und*
- *... für $a > 0$ die zwei Lösungen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$.*

Der obige Satz läßt sich noch verallgemeinern:

Satz 2.16 (Höhere Wurzeln)**.**
1. *Ist n eine natürliche ungerade Zahl, dann hat die Gleichung $x^n = a$ genau eine reelle Lösung und diese bezeichnen wir mit $x = \sqrt[n]{a}$.*
2. *Ist n eine natürliche gerade Zahl, dann hat die Gleichung $x^n = a$ ...*
   - *... für $a < 0$ keine reelle Lösung,*
   - *... für $a = 0$ die eindeutige Lösung $x = 0$ und*
   - *... für $a > 0$ die zwei reellen Lösungen, die wir mit $x_1 = \sqrt[n]{a}$ und $x_2 = -\sqrt[n]{a}$ bezeichnen.*

Bemerkung 2.17. Für $a \geq 0$ definieren(!) wir

$$a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a} \qquad \text{und} \qquad a^{\frac{m}{n}} := \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m .$$

Dann kann man zeigen, dass die Rechenregeln aus Satz 2.6 weiterhin gültig bleiben.

Somit haben wir das Potenzieren von ganze auf rationale Exponenten erweitert.

Satz 2.18 (pq-Formel)**.** *Es sei $D := p^2 - 4q$. Dann besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ …*

- *… die eindeutige reelle Lösung $x = -\frac{1}{2}p$, falls $D = 0$,*
- *… die zwei reellen Lösungen $x_1 = -\frac{1}{2}(p + \sqrt{D})$ und $x_2 = -\frac{1}{2}(p - \sqrt{D})$, falls $D > 0$, und*
- *… keine reelle Lösung, falls $D < 0$.*

Die Zahl D heißt DISKRIMINANTE *der quadratischen Gleichung.*

Definition 2.19. (Fakultät und Binomialkoeffizient)

1. Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ ist die FAKULTÄT definiert als
$$n! := \prod_{k=1}^{n} k .$$
Also gilt insbesondere $0! = 1$ und $(n+1)! = n!(n+1)$.
2. Für zwei natürliche Zahlen $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$ ist der BINOMIALKOEFFIZIENT definiert als
$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

Satz 2.20 (Eigenschaften des Binomialkoeffizienten)**.**

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ *und* $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ *(Additionstheorem).*

Beispiel 2.21 (Begründung für eine der Rechenregeln)**.**

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!} + \frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-(k+1))!} \\ &= \binom{n+1}{k+1}.\end{aligned}$$

Wegen des Additiontheorems lassen sich die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck anordnen:

$$\begin{array}{ccccccccc|c} & & & & \binom{n}{k} & & & & & n \\ \hline & & & & 1 & & & & & 0 \\ & & & 1 & & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & & 2 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & 3 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & 4 \\ & & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Satz 2.22 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Für* $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

3 Relationen, Ordnung und Betrag

Definition 3.1 (Relationen)**.** Es seien M und N Mengen. Eine RELATION ZWISCHEN M UND N ist eine Teilmenge $\mathfrak{R} \subset M \times N$.

Ist $(a, b) \in \mathfrak{R} \subset M \times N$ ein Element der Relation $\mathfrak{R}$, so sagen wir

a STEHT IN RELATION ZU b,

und wir schreiben

$$a \sim_{\mathfrak{R}} b \quad \text{statt} \quad (a, b) \in \mathfrak{R}.$$

Beispiel 3.2.

- Es sei C die Menge aller Autos, und F die Menge aller Farben. Durch die Paare $(c, f) \in C \times F$ mit der Eigenschaft

  ein Teil des Autos c ist in der Farbe f lackiert

  wird eine Relation definiert.

- Es sei P die Menge aller Bundesligapaarungen und E die Menge aller Spielergebnisse. Die Paare $(p, e) \in P \times E$ mit der Eigenschaft

  die Paarung p erspielt das Ergebnis e

  liefern eine Relation.

Definition 3.3 (Relationen auf einer Menge)**.** Eine RELATION AUF EINER MENGE M ist eine Relation $\mathfrak{R} \subset M \times M$. Eine Relation auf einer Menge M heißt ...

1. ... REFLEXIV, wenn $a \sim_{\mathfrak{R}} a$ für alle $a \in M$ ist .
2. ... TRANSITIV, wenn mit $a \sim_{\mathfrak{R}} b$ und $b \sim_{\mathfrak{R}} c$ auch $a \sim_{\mathfrak{R}} c$ ist.
3. ... SYMMETRISCH, wenn mit $a \sim_{\mathfrak{R}} b$ auch $b \sim_{\mathfrak{R}} a$ ist.
4. ... ANTISYMMETRISCH, wenn, falls $a \sim_{\mathfrak{R}} b$ und $b \sim_{\mathfrak{R}} a$, schon $a = b$ ist.
5. ... TOTAL, wenn für alle $a, b \in M$ $a \sim_{\mathfrak{R}} b$ oder $b \sim_{\mathfrak{R}} a$ ist.

Definition 3.4 (Ordnungs-, und Äquivalenzrelation)**.** Eine Relation heißt ...

1. ... HALBORDNUNG, wenn sie 1., 2. und 4. erfüllt.

2. ... Totalordnung, wenn sie 1., 2., 4,. und 5. erfüllt.
3. ... Äquivalenzrelation, wenn sie 1., 2., und 3. erfüllt.

Beispiel 3.5.

- Die Teilbarkeitsrelation $\mathfrak{T} \subset \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+$ ist definert durch

  $$a \sim_{\mathfrak{T}} b \quad \text{falls} \quad a|b\,.$$

  Die Teilbarkeitsrelation ist eine Halbordnung.

- Die Gleichheit $\mathfrak{G} \subset M \times M$ ist definiert durch

  $$a \sim_{\mathfrak{G}} b \quad \text{falls} \quad a = b\,.$$

  Die Gleichheit ist eine Äquivalenzrelation.

- Die Ordnungsrelation $\mathfrak{O} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist definiert durch

  $$a \sim_{\mathfrak{O}} b \quad \text{falls} \quad a \leq b\,.$$

  Die Ordnungsrelation ist eine Totalordnung auf $\mathbb{R}$.

- Es sei M eine Menge und $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmenge von M. Diese Menge nennt man Potenzmenge von M.

  Die Teilmengenrelation $\tau \subset \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M)$ ist definiert durch

  $$U \sim_{\tau} V \quad \text{falls} \quad U \subset V\,.$$

  Die Teilmengenrelation ist eine Halbordnung.

- Es sei M die Menge der Fahrzeuge auf einem Parkplatz , und $\mathfrak{R} \subset M \times M$ die Relation die durch folgende Vorschrift gegeben ist :

  $$car_1 \sim_{\mathfrak{R}} car_2 \text{ falls beide die gleiche Farbe haben.}$$

  Dies ist eine Äquivalenzrelation.

Bemerkung 3.6. Ist eine Relation – wie in den obigen Beispielen – durch eine Vorschrift gegeben, so identifizieren wir die Relation und diese Vorschrift.

Definition 3.7 (Ordnungszeichen)**.**

- Da $\leq$ eine Totalordnung auf $\mathbb{R}$ definiert, gilt also $x \leq y$ oder $y \leq x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
- Statt $x \leq y$ schreiben wir auch $y \geq x$.

- Weiter schreiben wir $x < y$, wenn $x \leq y$ und $x \neq y$, und ebenso $y > x$ für $x < y$.
- Damit gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ entweder (!) $x < y$ oder $x = y$ oder $x > y$.
- Die Zeichen $\leq, \geq, <, >$ und $=$ heißen Ordnungszeichen.

Mit Hilfe der Ordnungszeichen definieren wir spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$.

Definition 3.8 (Intervalle)**.** Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Beschränkte Intervalle

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (Abgeschlossenes Intervall).
- $]a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (Offenes Intervall).
- $\begin{array}{l} [a, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\ ]a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \end{array}$ (Halboffene Intervalle).

Unbeschränkte Intervalle:

- $[a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ und $]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
- $]a, \infty[:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ und $]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- $]-\infty, \infty[:= \mathbb{R}$

Satz 3.9 (Rechenregeln)**.** *Es seien $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. *Ist $x < y$ und $y < z$, dann gilt $x < z$.*
2. *Ist $x \leq y$ und $y \leq x$, so ist $x = y$.*
3. *Ist $x < y$ dann ist $x + z < y + z$.*
4. *Ist $x > 0$ und $y > 0$, so ist auch $xy > 0$.*
5. *Ist $z > 0$ und $x < y$, so ist $xz < yz$.*
6. *Ist $z < 0$ und $x < y$, so ist $xz > yz$.*
7. *Ist $0 < x < y$, so gilt $\frac{1}{x} > \frac{1}{y} > 0$.*

Aus den Rechenregeln des obigen Satzes folgt:

Satz 3.10 (Vorzeichen von Produkten). *Es seien $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

- $\prod_{i=1}^{n} x_i = 0$ *ist gleichbedeutend damit, dass es mindestens ein $1 \leq j \leq n$ gibt mit $x_j = 0$.*
- $\prod_{i=1}^{n} x_i > 0$ *ist gleichbedeutend damit, dass nur eine gerade Anzahl der Faktoren x_j negativ ist.*

Ebenfalls liefern die Rechenregeln das Folgende für das Rechnen mit Ungleichungen:

Bemerkung 3.11. Die Lösungsmenge einer Ungleichung ändert sich nicht, wenn wir auf beiden Seiten ...

- ... eine Zahl addieren.
- ... mit einer positiven Zahl multiplizieren.
- ... eine streng monoton steigende Funktion anwenden. (Genaueres dazu folgt später.)

Beispiel 3.12 (Streng monotoner Funktionen).

- Die Wurzelfunktion auf $[0, \infty[$
- Potenzfunktion mit ungeradem Exponenten auf $\mathbb{R}$
- Potenzfunktion mit geradem Exponenten auf $[0, \infty[$
- Die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$
- Die Logarithmusfunktion auf $\mathbb{R}^+$ (diese schauen wir uns später noch genauer an!)

Definition 3.13 (Betrag). Der Betrag einer reellen Zahl x ist definiert als der Abstand zu 0 und wird mit $|x|$ bezeichnet. Also

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}$ ist $|x - y|$ der Abstand von x und y.

Bemerkung 3.14. Mit Hilfe des Betrages lassen sich Intervalle in einer symmetrischen Form beschreiben. Z.B.

$$[a,b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \left| x - \frac{b+a}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \right\}$$

Satz 3.15 (Eigenschaften des Betrags)**.**

1. *$|x| = 0$ ist gleichbedeutend mit $x = 0$.*
2. *$|x| = |-x|$.*
3. *$-|x| \leq x \leq |x|$ mit Gleichheit an genau einer Stelle wenn $x \neq 0$.*
4. *$|xy| = |x||y|$.*
5. *$|x+y| \leq |x| + |y|$.*
6. *$\big|\,|x| - |y|\,\big| \leq |x-y|$.*
7. *$\sqrt{x^2} = |x|$.*

Satz 3.16 (Quadratische Ungleichungen)**.** *Wir betrachten den quadratischen Ausdruck $x^2 + px + q$ mit seiner Diskriminante $D = p^2 - 4q$.*

- *Es gilt*

  $$x^2 + px + q < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left| x + \frac{p}{2} \right| < \frac{\sqrt{D}}{2}\,.$$

  Ist $D < 0$ so hat die Ungleichung keine reelle Lösung.

- *Außerdem ist*

  $$x^2 + px + q > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left| x + \frac{p}{2} \right| > \frac{\sqrt{D}}{2}\,.$$

  Ist in diesem Fall $D < 0$, so ist die Lösungsmenge ganz $\mathbb{R}$.

4 Abbildungen und Funktionen

Definition 4.1 (Abbildungen)**.** Es seien D und W Mengen.

Eine Abbildung von D nach W ist eine Relation zwischen D und W mit den folgenden zusätzlichen Eigenschaften:

1. Für alle $x \in D$ gibt es ein $y \in W$, so dass (x, y) in der Relation liegt.
2. Sind (x, y_1) und (x, y_2) beide in der Relation enthalten, so gilt $y_1 = y_2$.

D heißt der Definitions- und W der Wertebereich.

Bemerkung 4.2. Ist eine Abbildung zwischen D und W gegeben, so gibt es also zu jedem $x \in D$ genau(!) ein $y \in W$ so dass (x, y) in der Relation enthalten ist.

Diese eindeutige Zuordnung bezeichnen wir mit f und schreiben

$$f : D \to W .$$

Für $x \in D$ bezeichnet $f(x) \in W$ das Bild von x unter f.

Definition 4.1 (cont.)**.** Ist $f : D \to W$ eine Abbildung und $U \subset D$ eine Teilmenge , so heißt die Menge der Elemente in W, die von f durch Elemente aus U getroffen wird, das Bild von U unter f. Es wird mit $f(U)$ bezeichnet. Es gilt

$$f(U) := \{y \,|\, \exists x \in U : y = f(x)\} = \{f(x) \,|\, x \in U\} \subset W .$$

Als Bildmenge von f bezeichnet man die Menge $f(D)$, also das Bild von D unter f. Ist nun umgekehrt $U \subset W$ eine Teilmenge, so nennt man die Menge aller Elemente von D deren Bild in U liegt, das Urbild von U. Dieses wird mit $f^{-1}(U)$ bezeichnet. Es gilt

$$f^{-1}(U) := \{x \,|\, f(x) \in U\} \subset D .$$

Bemerkung 4.3. Es ist $f^{-1}(W) = D$ aber nicht notwendigerweise $f(D) = W$, sondern lediglich $f(D) \subset W$.

Definition 4.1 (cont.)**.** Die Abbildung als Relation selbst, also die Teilmenge

$$\{(x, f(x)) \,|\, x \in D\} \subset D \times W ,$$

bezeichnet man als Graph der Abbildung f.

Bemerkung 4.4. Zwei Abbildungen $f_1 : D_1 \to W_1$ und $f_2 : D_2 \to W_2$ sind genau dann gleich, wenn $D_1 = D_2$ und $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in D_1$, d.h. wenn sie als Relationen gleich sind.

Definition 4.5 (identische Abbildung)**.** Es sei $f : D \to D$ mit $f(x) := x$ für alle $x \in D$.

Diese Abbildung heißt identische Abbildung oder Identität auf D und wird hier mit id_D bezeichnet.

Die Identität entspricht als Relation der Gleichheit auf D.

Definition 4.6 (Polynome)**.** Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

ein Polynom.

Die Zahl $\mathrm{grad}(p) := n$ heißt der Grad, die a_j heißen die Koeffizienten und speziell a_n der Leitkoeffizient von p.

Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_0) = 0$ heißt Nullstelle von p.

Satz 4.7 (Faktorisierung)**.** *Es sei p ein Polynom und x_0 eine Nullstelle. Dann gibt es ein Polynom q mit $\mathrm{grad}(q) = \mathrm{grad}(p) - 1$, so dass $p(x) = (x - x_0)q(x)$.*

Beispiel 4.8. Es sei $p(x) = x^n - c^n$ das Polynom n-ten Grades mit den Koeffizienten $a_n = 1$ und $a_0 = c^n$ (alle anderen Koeffizienten sind 0). Dieses Polynom hat die Nullstelle $x_0 = c$ und wir wollen nun das Polynom q bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned} x^n - c^n &= c^n \left(\left(\frac{x}{c} \right)^n - 1 \right) \\ &= c^n \left(\frac{x}{c} - 1 \right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{c} \right)^k \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit gerade die geometrische Summenformel für $q = \frac{x}{c}$ ist.

$$= c \left(\frac{x}{c} - 1 \right) c^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x}{c} \right)^k$$

$$= (x-c)\sum_{k=0}^{n-1} x^k c^{n-1-k}\,.$$

Also ist das gesuchte Polynom:

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k c^{n-1-k} = x^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots + c^{n-2}x + c^{n-1}$$

Speziell für $c = 1$ gilt

$$\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1\,.$$

Die Koeffizienten des Polynoms q aus der Faktorisierung lassen sich durch Polynomdivision oder mit Hilfe des Hornerschemas bestimmen.

Bemerkung 4.9 (Hornerschema)**.** Das Hornerschema kann dazu benutzt werden, den Funktionswert eines Polynoms p an einer beliebigen Stelle x_0 zu bestimmen.

Man erhält zusätzlich die Koeffizienten eines Polynoms q, dessen Grad um Eins kleiner ist, als der von p , und das

$$p(x) = (x-x_0)q(x) + p(x_0)$$

erfüllt.

Beschreibung des Hornerschemas:

Zunächst schreiben wir die Koeffizienten von p in die erste Zeile einer Tabelle und führen dann von links nach rechts in der Tabelle immer wieder zwei Schritte durch.

Schließlich gelangt man zu folgendem Abschlußschema:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_n & & a_{n-1} & & a_{n-2} & & \dots & & a_1 & & a_0 \\ \hline
+ & & + & & + & & & & + & & + \\
0 & & c_{n-1}x_0 & & c_{n-2}x_0 & & \dots & & c_1x_0 & & c_0x_0 \\
= & \nearrow & = & \nearrow & = & \nearrow & & \nearrow & = & \nearrow & = \\ \hline
c_{n-1} & & c_{n-2} & & c_{n-3} & & \dots & & c_0 & & c_{-1}
\end{array}$$

Die zwei Schritte, die man macht sind:

1. Addiere die Zahlen der ersten und zweiten Zeile und schreibe sie in die dritte Zeile.

2. Der zuletzt berechnete Wert wird mit x_0 multipliziert und in die zweite Zeile der nächsten Spalte eingetragen.

Es ist dann

$$c_{n-1} = a_n \quad \text{und} \quad c_{k-1} = a_k + c_k x_0 \text{ für } k = n-1, \ldots, 0\,.$$

Damit erhalten wir

1. $p(x_0) = c_{-1}$ und
2. $q(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$.

Ist x_0 eine Nullstelle von p, also $c_{-1} = 0$, so ist das Ergebnis die Faktorisierung aus 4.6.

Bemerkung 4.10 (Zu den Nullstellen von Polynomen)**.** 1. Man kann nun 4.7 auf q anwenden und so nach und nach Nullstellen von p abspalten.

Es gilt sogar

Satz 4.11 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Jedes Polynom n-ten Grades hat eine Faktorisierung der Form*

$$p(x) = a_n(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_r)^{k_r}(x^2+a_1x+b_1)^{m_1}\cdots(x^2+a_sx+b_s)^{m_s}$$

mit $\displaystyle\sum_{j=1}^{r} k_j + 2\sum_{i=1}^{s} m_i = n$ *und* $a_j^2 - 5b_j < 0$ *für alle* $1 \le j \le s$.

Die auftretenden Faktoren sind also entweder Linearfaktoren aus der Abspaltung von Nullstellen oder quadratische Faktoren ohne weitere Nullstellen.

Gibt es keine quadratischen Faktoren, so sagt man p zerfällt in Linearfaktoren.

Bemerkung 4.10 (cont.)**.** Zum Faktorisieren muss man allerdings die Nullstellen ausrechnen, bzw finden. Das geht jedoch in der Regel nicht. Aber es gilt zum Beispiel

2. Hat p nur ganzzahlige Koeffizienten, und ist der Leitkoeffizient $a_n = 1$, so sind alle rationalen Nullstellen sogar ganz und sie sind Teiler des Koeffizienten a_0.

3. Ist in 2. der Leitkoeffizient $a_n \neq 1$ so gilt folgende Verallgemeinerung: Ist $\frac{r}{s}$ eine (gekürzte) rationale Nullstelle so gilt $s|a_n$ und $r|a_0$.

Manchmal interessiert einen nur die Existenz oder die ungefähre Lage einer Nullstelle. Dann kann man folgendes ausnutzen:

4. Hat man zwei Werte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $p(x_1) > 0$ und $p(x_2) < 0$ so gibt es einen Wert x_0 zwischen x_1 und x_2 für den $p(x_0) = 0$ ist. Kann man nun x_1 und x_2 dicht zusammenbringen, ohne dass die Vorzeicheneigenschaft verloren geht, so hat man eine Näherung für x_0 gefunden.

In anderen Fällen interessiert gegebenenfalls nur die Anzahl der positiven und negativen Nullstellen. Dann kann man folgendes ausnutzen:

5. Wissen wir, dass das Polynom p in Linearfaktoren zerfällt und 0 keine Nullstelle ist, so gilt folgende Regel:

   – Die Anzahl der positiven Nullstellen entspricht der Anzahl der Vorzeichenwechsel in der Folge $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$

   – Die Anzahl der negativen Nullstellen entspricht der Anzahl der Vorzeichenerhaltungen in der Folge $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$

   Dabei ordnet man den Nullkoeffizienten ein beliebiges (aber einheitliches) Vorzeichen zu.

   Das Resultat kann man so modifizieren, dass auch 0 als Nullstelle erlaubt ist.

   Achtung! Die Voraussetzung, dass das Polynom zerfällt, ist notwendig!

Definition 4.12 (Rationale Funktionen)**.** Es seien p und q Polynome. Dann heißt die Funktion f mit

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}$$

rationale Funktion. Ihr Definitionsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, q(x) \neq 0\}$.

Definition 4.13 (Potenzfunktion)**.** Es sei $q \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl. Dann ist die Potenzfunktion definiert durch

$$f_q : [0, \infty[\to [0, \infty[\quad \text{mit} \quad f_q(x) = x^q.$$

Bemerkung 4.14. Später werden wir die Potenzfunktionen auch für irrationale Exponenten erklären.

Definition 4.15 (Einschränkung und Fortsetzung)**.** Es seien $D_1 \subset D_2$ und $f_1 : D_1 \to W$, $f_2 : D_2 \to W$ zwei Abbildungen mit $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in D_1$.

Dann heißt f_1 Einschränkung von f_2 und f_2 Fortsetzung von f_1. Man schreibt auch $f_1 = f_2|_{D_1}$.

Bemerkung 4.16. Während die Einschränkung einer Abbildung eindeutig ist, muss es die Fortsetzung nicht sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

Die Betragsfunktion $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $b(x) = |x|$. Es gilt nun für die Einschränkung von b auf die positiven Zahlen

$$b|_{\mathbb{R}^+}(x) = x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^+.$$

Somit ist die Betragsfunktion eine Fortsetzung von $\mathrm{id} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. Andererseits ist natürlich $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ebenfalls eine Fortsetzung.

Definition 4.17 (Verkettung von Abbildungen)**.** Es seien $f : D \to U$ und $g : V \to W$ Abbildungen und es gelte $U \subset V$. Dann ist die Verkettung $g \circ f : D \to W$ definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))\,.$$

Statt Verkettung sagt man auch Hintereinanderausführung oder Komposition und man liest $g \circ f$ als "g nach f".

Bemerkung 4.18. Ist der Wertebereich zweier Abbildungen eine Menge, in der Addition und Multiplikation erklärt sind, so kann man auch eine Addition und eine Multiplikation zwischen Funktionen definieren. Das ist insbesondere interessant, wenn der Wertebereich $\mathbb{R}$ ist.

Definition 4.19 (Addition Multiplikation)**.** Es seien $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen mit dem gleichen Definitionsbereich. Dann sind die Addition $f + g : D \to \mathbb{R}$ und die Multiplikation $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ punktweise definiert. Das heißt, dass für alle $x \in D$ gilt:

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad \text{und} \qquad (f \cdot g)(x) := f(x)g(x)\,.$$

Definition 4.20 (Umkehrabbildung)**.** Es seien $f : D \to W$ und $g : W \to D$ Abbildungen mit den Eigenschaften (1) $g \circ f = \mathrm{id}_D$ und (2) $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

Dann heißen f und g Umkehrabbildungen voneinander und wir schreiben $g = f^{-1}$ bzw. $f = g^{-1}$.

Man sagt dann auch f (und natürlich auch g) ist invertierbar.

Definition 4.21 (Injektiv, Surjektiv, Bijektiv)**.** Eine Abbildung $f : D \to W$ heißt ...

1. ... injektiv, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$ für die Bilder $f(x_1) \neq f(x_2)$ gilt.
2. ... surjektiv, wenn $f(D) = W$.
3. ... bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Satz 4.22. *Eine Abbildung $f : D \to W$ ist injektiv, wenn die Gleichung $f(x_1) = f(x_2)$ schon $x_1 = x_2$ liefert.*

Satz 4.23. *Eine Abbildung $f : D \to W$ ist $\left\{\begin{array}{c} \textit{injektiv} \\ \textit{surjektiv} \\ \textit{bijektiv} \end{array}\right\}$ genau dann, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in W$ $\left\{\begin{array}{c} \textit{höchstens} \\ \textit{mindestens} \\ \textit{genau} \end{array}\right\}$ eine Lösung $x \in D$ hat.*

Folgerung 4.24. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $\left\{\begin{array}{c} \text{injektiv} \\ \text{surjektiv} \\ \text{bijektiv} \end{array}\right\}$ genau dann, wenn der Graph von f jede Parallele zur x-Achse $\left\{\begin{array}{c} \text{höchstens} \\ \text{mindestens} \\ \text{genau} \end{array}\right\}$ einmal schneidet.

Satz 4.25 (Umkehrabbildung)**.** *Eine Abbildung ist genau dann invertierbar, wenn sie bijektiv ist.*

Bemerkung 4.26. Es seien $D, W \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to W$ eine bijektive Funktion.

- Den Graphen der Umkehrfunktion $f^{-1} : W \to D$ erhält man, indem man den Graphen von f an der Winkelhalbierenden spiegelt.

- Die explizite Form der Funktion $f^{-1} : W \to D$ erhält man, indem man die Gleichung $y = f(x)$ nach x auflöst.

  Auch wenn man weiß, dass es die Umkehrfunktion f^{-1} muss ein Umstellen nicht unbedingt möglich sein : z.B. $f(x) = e^x + x$.

Definition 4.27 (Monotonie)**.** Es sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f ...

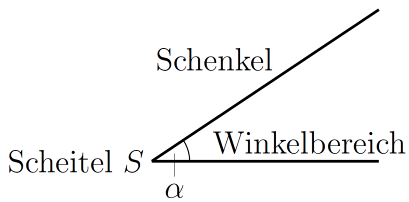
1. ... MONOTON WACHSEND, wenn $f(x_1) \leq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt.
2. ... STRENG MONOTON WACHSEND, wenn $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt.
3. ... MONOTON FALLEND, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt.
4. ... STRENG MONOTON FALLEND, wenn $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ gilt.

Beispiel 4.28. Die Potenzfunktionen $f_q : [0, \infty[\to [0, \infty[$ sind streng monoton steigend für $q > 0$.

Satz 4.29. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion. Dann ist f injektiv.*

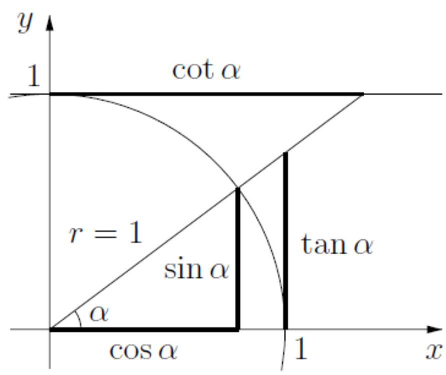
Wenn man den Wertebereich auf $f(I) \subset \mathbb{R}$ einschränkt, dann ist $f : I \to f(I)$ sogar invertierbar.

5 Trigonometrie



Winkel werden in GRAD oder im BOGENMASS (auch RAD) angegeben:

$$360^\circ \mathrel{\widehat{=}} 2\pi.$$

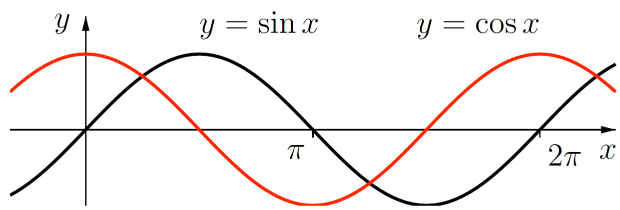


Durch diese Betrachtungen am Einheitskreis werden vier Funktionen definiert.

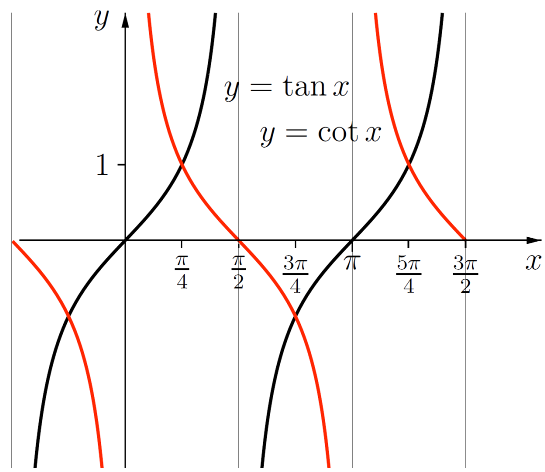
Definition 5.1 (Winkelfunktionen)**.** Die Winkelfunktionen sind gegeben durch

Name		D	W
Sinus	sin	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
Kosinus	cos	$\mathbb{R}$	$[-1,1]$
Tangens	tan	$\mathbb{R}\setminus\{\frac{2k+1}{2}\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
Kotangens	cot	$\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$

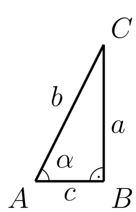
Bemerkung 5.2. Die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktionen



<u>Die Graphen der Tangens- und Kotangensfunktionen:</u>



Satz 5.3 (Interpretation am rechtwinkligen Dreieck)**.**



Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\sin\alpha = \frac{a}{b}\,,\ \cos\alpha = \frac{c}{b}\ \textit{und}\ \tan\alpha = \frac{a}{c}$$

Definition 5.4 (Periodische Funktionen)**.** Es sei $T > 0$. Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt T-periodisch, wenn $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Definition 5.5 (Symmetrie von Funktionen)**.** Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein um 0 symmetrisches Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt ...

1. ... gerade, wenn $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in I$.
2. ... ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in I$.

Satz 5.6 (Eigenschaften der Winkelfunktionen)**.** *1.* $\sin$ *sowie* $\cos$ *sind* 2π-*periodisch und* $\tan$ *sowie* $\cot$ *sind* π- *periodisch.*

2. $\sin(x+\pi) = -\sin x$ *und* $\cos(x+\pi) = -\cos x$*.*

3. $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$ *und* $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$*.*

4. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *und* $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$*.*

5. $\cos$ *ist eine gerade Funktion und* $\sin$, $\tan$ *und* $\cot$ *sind ungerade Funktionen.*

6. Für alle $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $|\sin x| \leq 1$ *und* $|\cos x| \leq 1$*.*

7. $\sin(x) = 0$ *genau dann, wenn* $x = k\pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$*.*
$\cos(x) = 0$ *genau dann, wenn* $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ *mit* $k \in \mathbb{Z}$*.*

8. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *der* Trigonometrische Pythagoras*.*

9. $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$ *und* $\sin^2 x = \dfrac{1}{1+\cot^2 x}$*.*

Satz 5.7 (Einschränkungen der Winkelfunktionen)**.** *Die folgenden Einschränkungen der Winkelfunktionen sind streng monoton und wegen Satz 4.20 damit bijektiv auf das jeweilige Bild.*

1. $\sin\big|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ *ist streng monoton wachsend.*

2. $\cos\big|_{[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$ *ist streng monoton fallend.*

3. $\tan\big|_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *ist streng monoton wachsend.*

4. $\cot\big|_{]0,\pi[} :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ *ist streng monoton fallend.*

Wegen der Ergebnisse des vorigen Abschnitts können wir von diesen Einschränkungen die Umkehrfunktionen angeben.

Definition 5.8 (Arcusfunktionen)**.** Die Umkehrfunktionen der Winkelfunktionen werden Arcusfunktionen genannt und sind

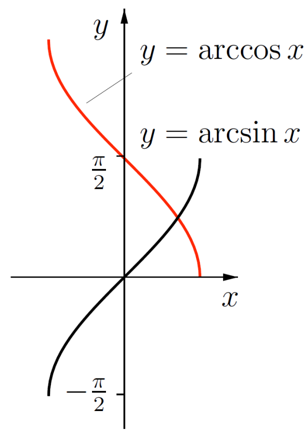
1. $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

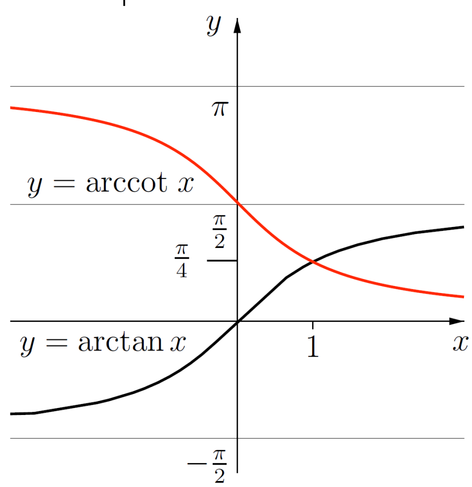
2. $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$

3. $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

4. $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to \left]0, \pi\right[$

Die Graphen der Arcusfunktionen sehen wie folgt aus (siehe Bemerkung 4.26):





Beim Rechnen mit den Winkelfunktionen sind folgende Additionstheoreme sehr nützlich:

Satz 5.9 (Additionstheoreme). *1.* $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$

2. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

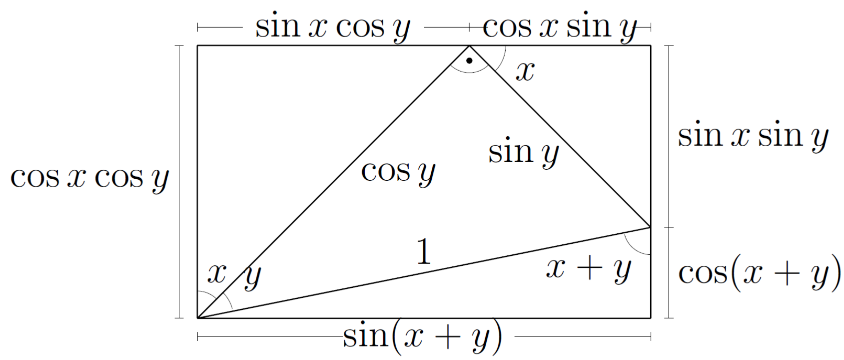
3. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

Daraus erhält man dann

Folgerung 5.10 (Doppelte Winkel).

1. $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
2. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
3. $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
4. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ und $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

Eine kleine Beweisskizze für die Additionstheoreme:



Und nun noch ein paar spezielle Werte der Winkelfunktionen (und mit 5.6, 5.9 und 5.10 dann natürlich weitere)

x in Grad	0	30°	45°	60°	90°
x in Rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\cot x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

6 Folgen und Stetigkeit

Definition 6.1 (Zahlenfolgen)**.** Eine Zahlenfolge (oder kurz: Folge) ist eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Statt $f(n)$ schreiben wir x_n und schreiben abkürzend $(x_n) := (x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots)$ für die Sammlung aller Bilder. x_n heißt n-tes Folgenglied.

Bemerkung 6.2. Manchmal macht es Sinn den Definitionsbereich einzuschränken, dieser sollte allerdings dann keine "Lücken" haben.

Beispiel 6.3.
- (n) hat den Definitionsbereich $\mathbb{N}$.
- $\left(\frac{1}{n}\right)$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{N}^+$.
- $\left(\frac{1}{(n+1)(n-4)}\right)$ hat den Definitionsbereich $\mathbb{N}^{\geq 5}$.

Technisches Hilfsmittel zur Beschreibung des Verhaltens von Zahlenfolgen:

Definition 6.4 (ϵ-Umgebung)**.** Für $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ heißt das offene Intervall

$$]a-\epsilon, a+\epsilon[= \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x-a| < \epsilon\}$$

die ϵ-Umgebung von a und wird mit auch mit $U_\epsilon(a)$ bezeichnet.

Was bedeutet "Eine Folge läuft gegen einen festen Wert"?

Definition 6.5 (Konvergenz von Zahlenfolgen)**.** Eine Folge (x_n) heißt konvergent gegen den Grenzwert a, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \epsilon \,.$$

Wir schreiben: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ oder manchmal auch $x_n \to a \, (n \to \infty)$ und sagen: (x_n) geht gegen a für n gegen unendlich, oder auch: (x_n) konvergiert gegen a.

Bemerkung 6.6 (Praktische Anwendung von Definition 6.5)**.** Hat man den Verdacht, dass a der Grenzwert einer Folge ist, so muss man die obige Aussage für alle ϵ testen. Dazu fixiert man ein solches ϵ und untersucht die Ungleichung

$$|x_n - a| < \epsilon \,.$$

Man muss nun "diese nach n auflösen", d.h. "in die Form $n > ?$ bringen".

Die rechte Seite definiert dann das gesuchte n_0.

Dieses n_0 wird dann in der Regel nicht optimal sein, aber das braucht es auch nicht zu sein!

Beispiel 6.7. $x_n = (-1)^n \dfrac{c^n}{\sqrt{n}}$ mit $|c| < 1$ zusammen mit der Annahme, dass $a = 0$ der gesuchte Grenzwert ist.

Also untersuchen wir die Ungleichung $\left|(-1)^n \dfrac{c^n}{\sqrt{n}} - 0\right| < \epsilon$.

In unserem Beispiel gilt auf alle Fälle $\left|(-1)^n \frac{c^n}{\sqrt{n}}\right| = |c|^n \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right| < \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|$, so dass, wenn $\frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$ gilt, auch die gewünschte Abschätzung erfüllt ist.

Die letzte läßt sich aber jetzt einfach umformen:

$$\tfrac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{n} > \tfrac{1}{\epsilon} \quad \Longleftrightarrow \quad n > \tfrac{1}{\epsilon^2}\,.$$

Damit gilt nun:

Zu $\epsilon > 0$ wähle $n_0 > \frac{1}{\epsilon^2}$.

Dann gilt für alle $n > n_0$ die Ungleichung $|x_n - 0| < \epsilon$.

Satz 6.8. 1. *Eine konvergente Folge besitzt einen eindeutigen Grenzwert.*

2. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ *ist gleichbedeutend mit* $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$.

3. *Ist* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ *und* $0 \le x_n \le y_n$ *für alle* n, *so gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Und nun halten wir noch fest, was es bedeutet, wenn eine Folge nicht konvergiert. Von “Nicht-Konvergenz” gibt es verschiedene Abstufungen.

Definition 6.9 (Divergenz von Zahlenfolgen)**.** 1. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt DIVERGENT.

2. Eine Folge (x_n) heißt UNEIGENTLICH KONVERGENT, wenn gilt

$$\forall M \in \mathbb{R}\, \exists n_0 \in \mathbb{N}\, \forall n \ge n_0 : x_n > M$$

Wir schreiben in diesem Fall $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ oder $x_n \to \infty\,(n \to \infty)$. Analog macht man das für $-\infty$.

Beispiel 6.10. 1. Jede Folge, die konstant wird, ist konvergent ("wird konstant" bedeutet, es gibt eine Zahl $m \in \mathbb{N}$, so dass $x_n = x_m$ für alle $n \geq m$)

2. Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ konvergiert gegen 0. Genauso auch die Folge $\left(\frac{1}{n^k}\right)$ (falls $k > 0$).

3. Ist die Folge (x_n) uneigentlich konvergent und ist $x_n \neq 0$ für alle n, so konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{x_n}\right)$ gegen 0.

4. Die Folge $\left((-1)^n\right)$ ist divergent.

Definition 6.11 (Teilfolge)**.** Eine Teilfolge einer Folge erhält man, indem man aus ihr eine beliebige Anzahl von Gliedern weg läßt, wobei aber unendlich viele Glieder übrigbleiben müssen.

Beispiel 6.12. Ist $(x_n) = (x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots)$ eine Folge so sind zwei oft benutzte Teilfolgen gegeben durch

$$(x_{2n}) = (x_0, x_2, x_4, \ldots) \text{ und } (x_{2n+1}) = (x_1, x_3, x_5, \ldots).$$

Satz 6.13 (Eigenschaften von Teilfolgen)**.** *Ist eine Folge konvergent gegen a, so konvergiert jede Teilfolge ebenfalls gegen a.*

Oder umgekehrt:

Hat eine Folge zwei Teilfolgen, die gegen unterschiedliche Grenzwerte konvergieren, dann ist die Folge divergent.

Beispiel 6.14. Die Folge mit $x_n = (-1)^n$ hat die zwei Teilfolgen $(x_{2n}) = (1, 1, 1, \ldots)$ und $(x_{2n+1}) = (-1, -1, -1, \ldots)$ und damit ist sie divergent.

Satz 6.15 (Rechenregeln für konvergente Folgen)**.** *Es seien (x_n) bzw. (y_n) konvergente Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Außerdem sei $c \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (c x_n) = ca$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = ab$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$ — *hierbei müssen $y_n \neq 0$ und $b \neq 0$ sein.*

5. *Ist* $x_n \leq y_n$ *oder* $x_n < y_n$, *dann gilt* $a \leq b$.

Mit Hilfe von Satz 6.15 können wir jetzt etliche Grenzwerte auf eine einfache Weise ausrechnen.

Beispiel 6.16. Gesucht ist der Grenzwert von $x_n := \dfrac{n^3+7n^2+4}{n^5+4n^4}$. Es ist

$$x_n = \frac{n^3+7n^2+4}{n^5+4n^4} \cdot \frac{\frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^5}} = \frac{\frac{1}{n^2}+\frac{7}{n^3}+\frac{4}{n^5}}{1+\frac{4}{n}}$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7}{n^3}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n^5}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}} = \frac{0+0+0}{1+0} = 0\,.$$

Definition 6.17 (Grenzwert einer Funktion)**.** Es sei $U \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge und $\hat{x} \in U$. Weiter sei $f : U \setminus \{\hat{x}\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

f hat in $\hat{x}$ den Grenzwert $\hat{y}$ wenn gilt:

Für jede Folge (x_n) in $U \setminus \{\hat{x}\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \hat{x}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \hat{y}$.

Man schreibt dann $\lim\limits_{x\to\hat{x}} f(x) = \hat{y}$. Diese Definition läßt sich auch auf $\hat{x} = \pm\infty$ oder $\hat{y} = \pm\infty$ erweitern.

Definition 6.18 (Stetigkeit)**.** Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}$. Dann heißt f...

1. ... STETIG IN $x_0 \in D$, wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$

2. ... STETIG, wenn f in jedem Punkt aus D stetig ist.

Beispiel 6.19. 0. Die konstanen Funktionen auf $\mathbb{R}$ sind stetig.

1. Die Identität und die Betragsfunktion sind stetig auf $\mathbb{R}$.

2. Die SIGNUM-FUNKTION $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\sigma(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ ist nicht stetig in $x_0 = 0$.

3. Die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig auf ihrem Definitionsbereich $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Die Wurzelfunktionen $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit $f(x) = \sqrt[n]{x}$ sind stetig.

Satz 6.20 (Rechenregeln für Grenzwerte)**.** *Es seien $f, g : D \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ und $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$, sowie $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$.

2. $\lim\limits_{x\to x_0} (cf(x)) = ca$.

3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)g(x)) = ab$.

4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ *(falls $b \neq 0$).*

Satz 6.21. 1. *Sind die Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$, so gilt ebenfalls:*

$$\text{Die Funktionen } \; f \pm g, \;\; fg \;\; \text{und} \;\; \frac{f}{g} \; \text{sind stetig in } x_0$$

(dabei hat man im letzten Fall $g(x) \neq 0$ vorauszusetzen).

2. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in D$ und $g : \hat{D} \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset \hat{D}$ stetig in $f(x_0) \in \hat{D}$, so ist $g \circ f$ stetig in x_0.*

Bemerkung 6.22. Punkt 1 folgt direkt aus Satz 6.20

Beispiel 6.19 (cont.)**.** 5. Die Potenzfunktionen sind stetig und die Polynome sind stetig.

6. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$ ist stetig.

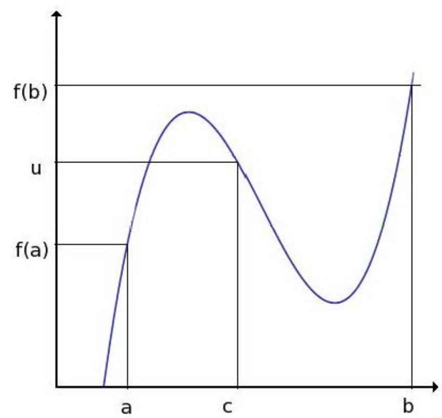
7. $x \mapsto \arctan(\sin(x))$ ist stetig, denn es gilt der folgende

Satz 6.23. *Die Winkelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen sind stetig auf ihren Definitionsbereichen.*

Satz 6.24 (Nullstellensatz)**.** *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funtktion mit $f(a)f(b) < 0$, so gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = 0$.*

Beispiel 6.25. Das Polynom f mit $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ erfüllt $f(-3) = -8 < 0$ und $f(2) = 12$, hat also eine Nullstelle in $[-3, 2]$ (sogar drei: -2, -1 und 1).

Satz 6.26 (Zwischenwertsatz)**.** *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es gelte $f(a) \neq f(b)$. Dann gibt es zu jedem u zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ein $c \in [a,b]$,*
so dass $f(c) = u$.



Beispiel 6.25 (cont.)**.** Das Polynom f mit $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ nimmt sogar jeden Wert aus dem Intervall $[-8, 12]$ an einer Stelle im Intervall $[-3, 2]$ an.

7 Differenzierbarkeit

Definition 7.1 (Differenzierbarkeit)**.** Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem offenen(!) Intervall $I \subset \mathbb{R}$. f heißt ...

1. ... DIFFERENZIERBAR IN DEM PUNKT $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert des DIFFERENZENQUOTIENTEN

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

   existiert. Dieser Wert wird dann mit $f'(x_0)$ bezeichnet und heißt die ABLEITUNG von f an der Stelle x_0.

2. ...DIFFERENZIERBAR AUF I, wenn f an jeder Stelle $x \in I$ differenzierbar ist.

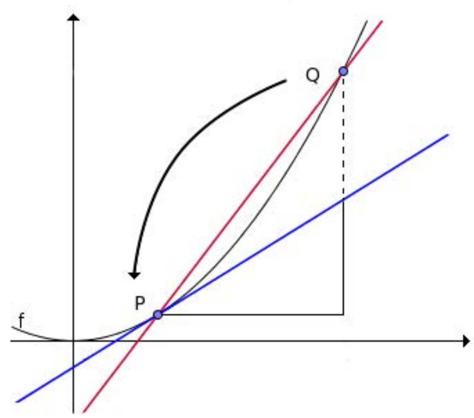
Beispiel 7.2 (Grundlegende Beispiele)**.**

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^2	$2x$
x^n	$nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}$

$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

Wichtige Beobachtung: In der rechten Spalte taucht $\frac{1}{x} = x^{-1}$ nie auf!

Die Ableitung einer Funktion f kann man auch geometrisch interpretieren.



Die Steigung der Tangente im Punkt P ist der Grenzwert der Sekantensteigungen.

Definition 7.3 (Tangente)**.** Die Gerade mit der Gleichung

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

heißt Tangente an den Graphen von f im Punkt $\big(x_0, f(x_0)\big)$ (kurz auch: Tangente an f in x_0).

Bemerkung 7.4. Differenzierbarkeit in x_0 bedeutet also anschaulich, dass sich die Funktionswerte von f in einer "kleinen Umgebung von x_0" gut durch die Werte der Tangente annähern lassen. Man sagt auch: f ist linear approximierbar.

Die letzte Bemerkung läßt sich präzisieren:

Satz 7.5 (Lineare Approximation)**.** *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und $x_0 \in I$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *f ist differenzierbar in x_0.*
2. *Es gibt eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$ mit*

   a) $\lim\limits_{x \to x_0} \phi(x) = 0$
   b) $f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + \phi(x)|x - x_0|$

In diesem Fall ist $c = f'(x_0)$.

Satz 7.6. *Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, so ist f auch stetig in x_0.*

Definition 7.7 (Höhere Ableitungen)**.**

1. Ist f auf I differenzierbar, so heißt die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto f'(x)$ die ABLEITUNG von f.
2. Ist f differenzierbar, und f' stetig auf I so nennt man f STETIG DIFFERENZIERBAR.
3. Sind f und f' differenzierbar auf I, dann nennt man die Funktion $f'' := (f')'$ die ZWEITE ABLEITUNG von f.
4. Ebenso definiert man höhere Ableitungen f''', $f^{(4)}, \ldots$
5. f heißt k-MAL STETIG DIFFERENZIERBAR, wenn $f^{(k)}$ existiert und stetig ist.
6. f heißt GLATT, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ableitung $f^{(k)}$ existiert und stetig ist.

Satz 7.8 (Differentiationsregeln)**.**

1. SUMMENREGEL $\quad (f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. PRODUKTREGEL $\quad (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. QUOTIENTENREGEL $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
4. KETTENREGEL $\quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$

Beispiel 7.9. Die Funktion $f(x) = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}+1 & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ erfüllt $f(0) = 0$.

Sie ist in $x_0 = 0$ einmal differenzierbar aber ihre zweite Ableitung in $x_0 = 0$ existiert nicht. Insbesondere ist f' stetig.

Es ist

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 = \lim_{x\downarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$$

aber

$$\lim_{x\uparrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\downarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 1$$

Satz 7.10 (Ableitung der Umkehrfunktion)**.** *Es sei f auf dem Intervall I streng monoton und differenzierbar und es gelte $f' \neq 0$. Dann existiert die die Umkehrfunktion f^{-1} und sie ist differenzierbar auf $J := f(I)$.*

Für $y = f(x) \in J$, also $x = f^{-1}(y)$, gilt dann

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} .$$

Beispiel 7.11. Wir berechnen die Ableitung der Umkehrfunktion von $f(x) = \sin(x)$, also von $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$.

Wegen Satz 7.8 gilt $\arcsin'(\sin x) = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}$. Setzen wir noch $y = \sin x$, so gilt dann schließlich

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Beispiel 7.2 (Grundlegende Beispiele – cont.)**.**

$f(x)$	$f'(x)$	
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sqrt[n]{x}$	$\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$n \in \mathbb{N}^+$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	

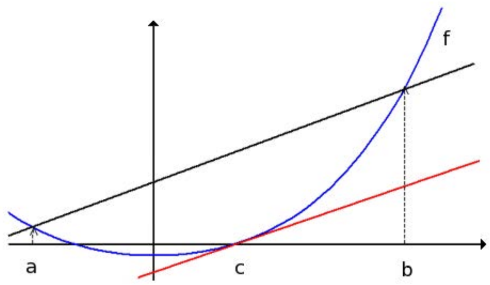
Folgerung 7.12.

1. $(f^2)'(x) = 2f(x)f'(x)$.
2. $(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x)$.
3. $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(x) = -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$.

8 Anwendungen der Differentialrechnung

Satz 8.1 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)**.** *Es sei f auf $[a,b]$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann gibt es ein $c \in]a,b[$ mit*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$



Folgerung 8.2. Sei f auf $[a,b]$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar. Dann gilt:

$$\text{Ist } f'(x) \begin{Bmatrix} \geq 0 \\ > 0 \\ \leq 0 \\ < 0 \\ = 0 \end{Bmatrix} \text{ für alle } x \in]a,b[,$$

$$\text{so ist } f \text{ auf } [a,b] \begin{Bmatrix} \text{monoton steigend} \\ \text{streng monoton steigend} \\ \text{monoton fallend} \\ \text{streng monoton fallend} \\ \text{konstant} \end{Bmatrix}.$$

Bemerkung 8.3 (Achtung). Die Aussage aus 8.2 ist keine Äquivalenz. Sie gilt nur in die hier beschriebene Richtung. So kann es sehr wohl Funtionen geben, die streng monoton sind, deren Ableitung aber Nullstellen aufweist.

Als Beispiel betrachten wir die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$. Sie ist streng monoton steigend, aber es ist $f'(0) = 0$.

Wenn nicht anders angegeben, sind im Folgenden die Intervalle stets offen (diese werden dann mit I bezeichnet).

Satz 8.4 (Krümmung)**.** *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Dann heißt (der Graph von) f ...*

1. *... LINKSGEKRÜMMT, falls $f'' > 0$ auf ganz I.*
2. *... RECHTSGEKRÜMMT, falls $f'' < 0$ auf ganz I.*

Definition 8.5 (Wendestelle, Wendepunkt)**.** Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar und $f''(x_0) = 0$ für $x_0 \in I$. Dann heißt x_0 eine WENDESTELLE und der Punkt $(x_0, f(x_0))$ ein WENDEPUNKT (des Graphen) von f.

Definition 8.6 (Extremum)**.** Es sei $D \in \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, $f : D \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. (Der Graph von) f hat in x_0 ein ...

1. ...GLOBALES MAXIMUM, wenn $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
2. ...GLOBALES MINIMUM, wenn $f(x) \geq f(x_0)$ für alle $x \in D$.
3. ...LOKALES MAXIMUM, wenn es eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, so dass $f(x) \leq f(x_0)$ für alle $x \in U_\epsilon(x_0) \cap D$.
4. ...LOKALES MINIMUM, wenn es eine Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, so dass $f(x) \geq f(x_0$ für alle $x \in U_\epsilon(x_0) \cap D$.

Maxima und Minima fassen wir auch unter dem Namen EXTREMA zusammen.

Wir nennen x_0 eine EXTREMALSTELLE, $f(x_0)$ ein EXTREMUM und den Punkt $(x_0, f(x_0))$ einen EXTREMPUNKT (des Graphen) von f.

Satz 8.7 (Notwendiges Kriterium für Extrema)**.** *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$. Hat f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.*

Bemerkung 8.8. Die Umkehrung von Satz 8.6 ist in der Regel nicht richtig. Das zeigt schon das Beispiel $f(x) = x^3$ und $x_0 = 0$.

Das Phänomen des letzten Beispiels werden wir nun näher beleuchten.

Satz 8.9 (Hinreichendes Kriterium für Extrema)**.** *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar und $x_0 \in I$ mit $f'(x_0) = 0$. Dann gilt*

1. *Ist $f''(x_0) \begin{Bmatrix} < 0 \\ > 0 \end{Bmatrix}$, so hat f in x_0 ein $\begin{Bmatrix} \textit{lokales Maximum} \\ \textit{lokales Minimum} \end{Bmatrix}$.*

2. *Ist $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ so hat f in x_0 eine Wendestelle. In diesem Fall spricht man von einem* SATTELPUNKT.

Allgemeiner gilt:

3. *Ist $f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ und $f^{(n)} \neq 0$, dann gilt*

   - *Ist n gerade, so hat f in x_0 ein*
     $\begin{cases} \textit{lokales Maximum}, & \textit{falls } f^{(n)}(x_0) < 0 \\ \textit{lokales Minimum}, & \textit{falls } f^{(n)}(x_0) > 0 \end{cases}.$
   - *Ist n ungerade, so hat f in x_0 einen Wendepunkt.*

Beispiel 8.10. Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$. Da die Funktion 2π-periodisch ist, schauen wir sie uns nur auf einem Teilintervall an, nämlich auf $[0, 2\pi]$. (genauer auf $]-\delta, 2\pi + \delta[$, da wir ein offenes Intervall brauchen). Es gilt

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{1 + 2\cos x}{(2 + \cos x)^2}$$

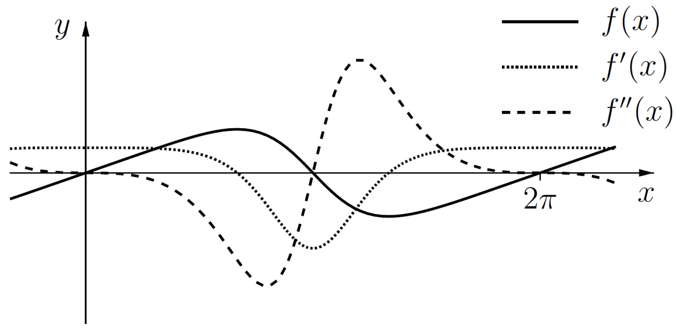
und

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2\sin x(2 + \cos x)^2 - (1 + 2\cos x)2(2 + \cos x)(-\sin x)}{(2 + \cos x)^4} \\ &= \frac{2\sin x(\cos x - 1)}{(2 + \cos x)^3} \end{aligned}$$

Die Nullstellen von $f'(x)$ sind damit die Stellen, an denen der Kosinus den Wert $-\frac{1}{2}$ annimmt, also $x = \frac{2\pi}{3}$ und $x = \frac{4\pi}{3}$. Beide Werte liefern Extrema denn:

Die Nullstellen von $f''(x)$ sind gegeben durch die Nullstellen des Sinus und durch die Stellen, wo der Cosinus den Wert 1 annimmt, also $x = 0$, $x = \pi$ und $x = 2\pi$. Diese liefern alle Wendepunkte, denn weiter gilt

$$f'''(x) = \frac{2(6\cos^2 x - \cos^3 x - 5)}{(2 + \cos x)^4}\,.$$



Mit Hilfe der Differentialrechnung lassen sich bestimmte Grenzwerte ausrechnen, die man ohne deren Hilfe nur schwer bekommt.

Satz 8.11 (Satz von l'Hospital)**.** *Es sei a ein Randpunkt des offenen Intervalls $I \in \mathbb{R}$ (dabei ist $a = \pm\infty$ ausdrücklich zugelassen), und f und g stetig differenzierbar auf I. Dann gilt:*

1. *Ist $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ und existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = C$, so gilt ebenfalls $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = C$*

2. *Die Aussage 1 gilt sinngemäß auch für Ausdrücke der Form $\dfrac{\infty}{\infty}$*

Bemerkung 8.12. Mit Satz 8.9 kann man auch Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$ und $\infty - \infty$ behandeln.

Ist etwa $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ so gilt $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \infty$ und $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0$. Schreibt man nun

$$\boxed{f(x)g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} \quad \text{oder} \quad \boxed{f(x)g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}}$$

so kann man 8.9.1 oder 2 anwenden.

Ist aber $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ so gilt $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{1}{g(x)} 0$ und damit auch $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \left(\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}\right) = 0$. Schreibt man nun

$$\boxed{f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}}$$

so kann man 8.9.1 anwenden.

In vielen Anwendungen sucht man nach Funktionen, die einer Gleichung genügen, die außer der gesuchten Funktion auch noch deren Ableitung(en) enthält.

Beispiel 8.13 (Freier Fall). Ein Körper befinde sich im freien Fall (Beschleunigung $g = 9,81\frac{m}{s^2}$). Die Funktion f, die die Bewegung des Körpers beschreibt erfüllt die Gleichung

$$f''(x) = -g\,.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$f(x) = -\frac{1}{2}gx^2 + vx + h\,.$$

Dabei hängen die Parameter h bzw. v der Lösung davon ab, aus welcher Höhe, bzw. mit welcher Anfangsgeschwindigkeit man den Körper fallengelassen hat.

Beispiel 8.14 (Harmonische Schwingung). Ein Federpendel wird aus seiner Ruhelage ausgedehnt und dann losgelassen. Die Funktion f, die die Bewegung des Pendels beschreibt erfüllt die Gleichung

$$f''(x) = -Kf(x)\,.$$

Dabei beschreibt K die Dehnbarkeit der Feder.

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$f(x) = a\cos(\sqrt{K}\,x) + b\sin(\sqrt{K}\,x)\,.$$

Die Parameter a und b werden hier durch die Größe der Auslenkung und der Anfangsgeschwindigkeit, die man dem Pendel mitgibt, bestimmt. (genauer beschreibt $b\sqrt{K}$ die Anfangsgeschwindigkeit.)

Beispiel 8.15 (Populationsentwicklung von Bakterien). Die Population von Bakterien läßt sich mit Hilfe einer Funktion beschreiben, die die Gleichung

$$f'(x) = Kf(x)(G - f(x))$$

erfüllt. Dabei beschreibt die Konstante K die Vermehrungsrate und G ist eine Grenzpopulation, die nicht überschritten wird.

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$f(x) = \frac{G}{1 + e^{-KGx+c}} \, .$$

Der Parameter c wird durch die anfangs vorliegende Population bestimmt. (genauer: $\frac{G}{1+e^c}$ beschreibt die Anfangspolpulation.)

9 Integralrechnung

Definition 9.1 (Stammfunktion)**.** Es seien $f, F : I \to \mathbb{R}$ Funktionen. F heißt STAMMFUNKTION von f auf I, wenn F auf I differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Wenn wir für f eine Stammfunktion suchen, so sagen wir auch: wir INTEGRIEREN f.

Wenn wir eine Stammfunktion gefunden haben, so nennen wir f INTEGRIERBAR.

Satz 9.2.

1. *Ist F eine Stammfunktion zu f, so ist auch $G = F + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f.*
2. *Alle Stammfunktionen zu f sind von dieser Form.*

   Sind also G und F zwei Stammfunktionen, so gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $G(x) = F(x) + c$.

Definition 9.3 (unbestimmtes Integral)**.** Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt UNBESTIMMTES INTEGRAL von f und wird mit $\displaystyle\int f(x)dx$ bezeichnet.

Ist F eine Stammfunktion zu f so schreiben wir auch

$$\int f(x)dx = F(x) + c\,.$$

Satz 9.4 (Linearität)**.**

1. $\displaystyle\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$
2. $\displaystyle\int (cf(x))dx = c\int f(x)dx$ *für* $c \in \mathbb{R}$.

Nun folgen zwei wichtige Eigenschaften des Integrals, die sich auf Produkte und Verkettungen von Funktionen beziehen. Sie folgen direkt aus den Rechenregeln für das Differenzieren (Satz 7.7).

Satz 9.5 (Partielle Integration)**.** $\displaystyle\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$

Satz 9.6 (Substitution)**.** *Ist F eine Stammfunktion zu f und ist g differenzierbar, so gilt*

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)).$$

Folgerung 9.7. Es sei F eine Stammfunktion zu f. Dann ist

1. $\displaystyle\int f(x+a)\,dx = F(x+a)+c$
2. $\displaystyle\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax)+c$
3. 1. und 2. zusammen geben $\displaystyle\int f(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b)+c$.
4. $\displaystyle\int g(x)\,g'(x)\,dx = \frac{1}{2}(g(x))^2+c$
5. $\displaystyle\int xf(x^2)\,dx = \frac{1}{2}F(x^2)+c$

Beispiel 9.8.

1. Wir bekommen grundlegende Beispiele für Stammfunktionen, wenn wir die Tabellen zu Beispiel 8.2 von rechts nach links lesen.
2. Insbesondere können wir alle Polynome integrieren und bekommen für $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$$\int p(x)dx = c + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} x^k$$

Definition 9.9 (Bestimmtes Integral)**.** Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat der Wert $F(b)-F(a)$ für jede Stammfunktion F von f den gleichen Wert.

Dieser Wert heißt BESTIMMTES INTEGRAL von f in den Grenzen a und b und wird mit

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b := F(b)-F(a).$$

bezeichnet.

f heißt INTEGRAND und a bzw. b UNTERE bzw. OBERE INTEGRATIONSGRENZE sowie $[a,b]$ das INTEGRATIONSINTERVALL.

Satz 9.10 (Eigenschaften des bestimmten Integrals)**.**

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$ *und* $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

3. *Ist* $f(x) \leq g(x)$ *so ist* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

4. $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)$.

5. *Ist* F *eine Stammfunktion zu* f *und ist* g *differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = F(t)\Big|_{g(a)}^{g(b)}.$$

6. *Ist* g *differenzierbar und bijektiv, so gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt\,.$$

<u>Praktische Anwendung von 5. und 6.:</u>

Da man dem Integranden in der Regel den "Faktor" $g'(x)$ "nicht ansieht", ist ein Mix aus 5. und 6. die am meisten verwendete Variante.

Gesucht ist $\int_a^b f(x)dx$.

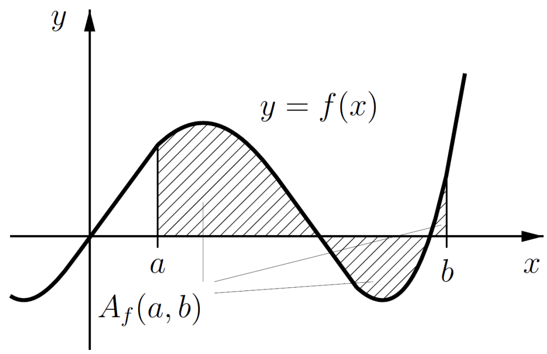
Setze $u := g(x)$, was wegen der Invertierbarkeit von g das Gleiche ist wie $g^{-1}(u) = x$.

Damit ist dann (in einer anderen Schreibweise) die Ableitung $\frac{du}{dx} = g'(x)$.

Das formt man nun "formal" um zu $du = g'(x)\,dx$ oder $\frac{du}{g'\big(g^{-1}(u)\big)} = dx$.

Damit ist dann

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} \frac{f(g^{-1}(u))}{g'\big(g^{-1}(u)\big)}du\,.$$



Satz 9.11 (Integral und Flächeninhalt). *Das Integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *läßt sich als der orientierter (!) Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion* f *im Intervall* $[a, b]$ *deuten.*

Definition 9.12 (Geometrischer Flächeninhalt). Es sei f integrierbar. Der GEOMETRISCHE FLÄCHENINHALT $A_f(a, b)$ von f auf dem Intervall $[a, b]$ ist definiert als Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt. Dieser läßt sich gemäß $A_f(a, b) = \int_a^b |f(x)|dx$ berechnen.

Beispiel 9.13.

1. Für $f(x) = x^3$ ist $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ eine Stammfunktion. Damit gilt also $\int_{-1}^1 f(x)dx = F(x)\Big|_{-1}^1 = 0$ aber
$$A_f(-1, 1) = \int_{-1}^1 |f(x)|dx = 2\int_0^1 f(x)dx = F(x)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

2. Wir betrachten $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Diese Funktion ist positiv, und deshalb gilt $A_f(-1, 1) = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2}$. Eine Stammfunktion von f ist durch $F(x) = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x\big)$ gegeben. Also folgt $A_f(-1, 1) = F(x)\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$.
   Dass F wirklich eine Stammfunktion zu f ist, zeigt man, indem man $F' = f$ nachweist. Wie man das mit Hilfe der Integrationsregeln nachweist, folgt nun.

Wir wollen die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ integrieren. Um partielle Integration

(PI) anwenden zu können, schreiben wir

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int 1\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&\overset{\text{PI}}{=} x\sqrt{1-x^2} - \int x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - \int \sqrt{1-x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

Stellen wir das noch nach dem gesuchten Integral um, so erhalten wir schließlich

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\big).$$

Wir haben schon gesehen, dass Integration die Umkehrung der Differentiation ist. Zum Abschluß dieses Kapitels zitieren wir noch den Satz, der diesen Sachverhalt mathematisch formuliert. Dieser heißt

Satz 9.14 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**.** *Jede auf einem Intervall $[a,b]$ stetige Funktion f besitzt eine Stammfunktion F.*

Genauer gilt: Definiert man für $x \in [a,b]$

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

so ist diese Funktion auf $[a,b]$ stetig, auf $]a,b[$ stetig differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

10 Logarithmus- und Exponentialfunktion

Wir können laut des HDI alle stetigen Funktionen integrieren. Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x}$ tauchte allerdings in unseren Beispielen zur Differentiation nie als Ergebnis auf. (vgl. Tabellen aus Beispiel 9.2). Ihre Stammfunktion kennen wir also bisher nicht und wir definieren deshalb wie folgt:

Definition 10.1 (Logarithmusfunktion)**.** Die LOGARITHMUSFUNKTION (oder der LOGARITHMUS) $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist definiert über eine Stammfunktion der auf $\mathbb{R}^+$ stetigen Funktion $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Genauer:

$$\ln x := \int_1^x \frac{1}{t} dt\,.$$

Satz 10.2 (Eigenschaften des Logarithmus)**.**

1. $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.
2. $\ln 1 = 0$.
3. $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$.
4. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
5. *aus 4. folgt* $\ln(x^q) = q\ln(x)$ *für* $q \in \mathbb{Q}$.
6. $\ln$ *ist streng monoton steigend.*
7. $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Da der Logarithmus ln streng monoton ist, existiert seine Umkehrfunktion:

Definition 10.3 (Exponentialfunktion)**.** Die EXPONENTIALFUNKTION $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist die Umkehrfunktion des Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Die Zahl $e := \exp(1) = \ln^{-1}(1) \approx 2{,}718281828\ldots$ heißt EULERSCHE ZAHL.

Satz 10.4 (Eigenschaften der Exponentialfunktion)**.**

1. $\exp$ *ist streng monoton wachsend.*
2. $\exp(\ln x) = \ln(\exp x) = x$.
3. $\exp(0) = 1$ *und* $\exp(x) > 0$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ *und* $\lim\limits_{x\to -\infty} \exp(x) = 0$

5. $\exp(x)\exp(y) = \exp(x+y)$.

6. *Aus 5. folgt* $\exp(qx) = (\exp(x))^q$ *für alle* $q \in \mathbb{Q}$.

7. $\exp'(x) = \exp(x)$.

Bemerkung 10.5. Aus Satz 10.4 Punkt 6. folgt $\exp(q) = e^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

Deshalb schreiben wir $\exp(x) = e^x$ sogar für $x \in \mathbb{R}$.

Sinn bekommt die Schreibweise aus der vorigen Bemerkung durch

Definition 10.6 (Allgemeine Potenz)**.** Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ definieren wir die allgemeine Potenz a^b durch

$$a^b := \exp(b \ln a)\,.$$

Mit Hilfe des Logarithmus können wir unsere Integralregeln weiter ergänzen:

Satz 10.7. *1.* $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$.

2. $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + c$.

11 Partialbruchzerlegung

Zur Erinnerung wiederholen wir die Definition des Polynoms:

> Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_n \neq 0$. Dann heißt die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
>
> $$p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
>
> ein Polynom.
>
> Die Zahl $\mathrm{grad}(p) := n$ heißt der Grad, die a_j heißen die Koeffizienten und speziell a_n der Leitkoeffizient von p.

Ebenso rufen wir noch einmal den Fundamentalsatz der Algebra 4.11 in Erinnerung:

> Jedes Polynom n-ten Grades hat eine Faktorisierung der Form
>
> $$\begin{aligned} p(x) = a_n (x - x_1)^{k_1} \cdots (x - x_r)^{k_r} \cdot \\ \cdot (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{m_1} \cdots (x^2 + \alpha_s x + \beta_s)^{m_s} \end{aligned}$$
>
> mit $\sum_{j=1}^{r} k_j + 2 \sum_{i=1}^{s} m_i = n$.

Beachte: In dieser Zerlegung haben die quadratischen Polynome keine Nullstellen, dh. die Diskriminanten $D_j = \alpha_j^2 - 4\beta_j$ sind negativ!

Definition 11.1 (Polynomdivision)**.** Sei $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion (dh. p und q sind Polynome).

Dann hat f eine Darstellung

$$f(x) = p_1(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

mit Polynomen p_1, r derart, dass $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(q)$ und $\mathrm{grad}(p_1) = \mathrm{grad}(p) - \mathrm{grad}(q)$.

Beispiel 11.2.

- $\dfrac{x^3-1}{x^2+1} = x - \dfrac{x+1}{x^2+1}$
- $\dfrac{x^4+1}{x^2-x+1} = x^2 + x + \dfrac{1-x}{x^2-x+1}$

Satz 11.3 (Partialbruchzerlegung)**.** *Sei* $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ *eine rationale Funktion mit* $\operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q)$.

Dann hat f *eine Darstellung der folgenden Form:*

$$\begin{aligned}
f(x) = & \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}} \\
& + \frac{A_{21}}{x-x_2} + \frac{A_{22}}{(x-x_2)^2} + \ldots + \frac{A_{2k_2}}{(x-x_2)^{k_2}} \\
& + \ldots \\
& + \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \ldots + \frac{B_{1m_1}x + C_{1m_1}}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{m_1}} \\
& + \frac{B_{21}x + C_{21}}{x^2+\alpha_2 x+\beta_2} + \ldots + \frac{B_{2m_2}x + C_{2m_2}}{(x^2+\alpha_2 x+\beta_2)^{m_2}} \\
& + \ldots
\end{aligned}$$

Bemerkung 11.4 (Vorgehen bei der Partialbruchzerlegung)**.**

In Satz 11.3 sind die $(x - x_i)$ und die $(x^2 + \alpha_j x + \beta_j)$ die Faktoren aus der Zerlegung von q gemäß Satz 4.8 und k_i und m_j sind ihre jeweiligen Vielfachheiten (für $1 \le i \le r$ und $1 \le j \le s$).

Der Aufbau der Summe auf der rechten Seite ist wie folgt:

1. Eine einfache Nullstelle a liefert einen Summanden mit Nenner $(x - a)$ und Zähler A.
2. Eine k-fache Nullstelle a liefert k Summanden mit den Nennern $(x - a), \ldots, (x - a)^k$ und Zählern wie in 1.
3. Ein einfacher quadratischer Term $(x^2+\alpha x+\beta)$ liefert einen Summanden mit Nenner $(x^2 + \alpha x + \beta)$ und Zähler $Bx + C$.
4. Ein m-facher quadratischer Term $(x^2 + \alpha x + \beta)$ liefert m Summanden mit Nennern $(x^2 + \alpha x + \beta), \ldots, (x^2 + \alpha x + \beta)^m$ und Zählern wie in 3.

Kontrolle: Hat q den Grad n, so müssen auf der rechten Seite genau n Parameter stehen.

Verfahren zur Berechnung der Parameter:

1. Der Ansatz wird mit dem Hauptnenner multipliziert (also mit q).
2. Die Koeffizienten ermittelt man nun (z.B.) durch Koeffizientenvergleich (mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems - Kapitel 12).
3. (Ergänzung zu 2.) Indem man nacheinander die Nullstellen von q einsetzt, lassen sich einige Parameter direkt bestimmen, nämlich die A_{ik_i} für $i = 1, \dots r$. Das heißt, wenn man nur einfache Nullstellen im Nenner hat, so liefert dieses Verfahren schon alles.

Integration: Nun können wir zur Integration rationaler Funktionen $f = \frac{p}{q}$ wie folgt vorgehen:

- Wir dividieren zuerst gemäß Definition 11.1 und erhalten $f = p_1 + \frac{r}{q}$.
- Den zweiten Summanden zerlegen wir dann weiter mit Satz 11.3.
- Integrieren wir nun alle Summanden einzeln, dann sind wir fertig.

Dabei macht p_1 als Polynom kein Problem und den Rest erledigt der folgende Satz.

Satz 11.5 (Integrale der Partialbrüche). *1.* $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-a)^{n+1}} = -\frac{1}{n(x-a)^n} + c$ *für* $n > 0$.

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\beta} = \frac{2}{\sqrt{-D}} \arctan\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{-D}}\right) + c$

4. $$\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^{n+1}} = \frac{2x+\alpha}{nD(x^2+\alpha x+\beta)^{n+1}} + \frac{2(2n-1)}{nD}\int \frac{dx}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}.$$

wobei 3. und 4. für $D = \alpha^2 - 4\beta < 0$ *gelten.*

Bemerkung 11.6 (zu Satz 11.5)**.** Außer 3. und 4. brauchen wir keine weiteren Integrale, denn es ist

$$\frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} = \frac{B}{2}\,\frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^n} + \frac{2C-B\alpha}{2}\,\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^n}\,.$$

Der zweite Summand ist nun vom Typ aus Satz 11.3 und der erste Summand läßt sich direkt integrieren:

- Ist $n=1$, dann ist das Integral des ersten Summanden
$$\frac{B}{2}\ln(x^2+\alpha x+\beta)\,,$$
- und ist $n>1$, dann ist es
$$-\frac{B}{2(n-1)}\,\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{n-1}}\,.$$

Beispiel 11.7. Wir integrieren $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+4x-2}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}$.

Setzen wir $x_0 = 1$ in das Nennerpolynom ein, so sehen wir, dass es sich um eine Nullstelle handelt. Polynomdivision ergibt

$$(x^4-2x^3+2x^2-2x+1) : (x-1) = x^3-x^2+x-1.$$

Das Restpolynom hat ebenfalls die Nullstelle $x_0 = 1$ und eine weitere Polynomdivision liefert

$$(x^3-x^2+x-1) : (x-1) = x^2+1\,.$$

Hier hat der quadratische Rest keine weitere Nullstelle. Ingesamt liefert das für den Nenner die Zerlegung

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1 = (x-1)^2(x^2+1).$$

Die Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{x^3-2x^2+4x-2}{(x-1)^2(x^2+1)}$ erfolgt also mit folgendem Ansatz

$$\frac{x^3-2x^2+4x-2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert das

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 2 = A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Da kann man nun die (einzige) Nullstelle einsetzen und erhält $\quad 1 = 2B$ oder $\boxed{B = \frac{1}{2}}$. Das setzten wir ein und erhalten

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 2 - \frac{1}{2}(x^2+1) = A(x^3 - x^2 + x - 1) + (Cx+D)(x^2 - 2x + 1).$$

Ein wenig Umsortieren liefert

$$x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2} = x^3(A+C) + x^2(D-A-2C) + x(A+C-2D) + (D-A).$$

Der Koeffizientenvergleich liefert nun das folgende lineare Gleichungssystem für A, C und D:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} A & +C & & = 1 \\ -A & -2C & +D & = -\frac{5}{2} \\ A & +C & -2D & = 4 \\ -A & & +D & = -\frac{5}{2} \end{array}\right\}$$

Zieht man hier in diesem System die zweite von der vierten Gleichung ab, so ergibt sich daraus $2C = 0$, also $\boxed{C = 0}$.

Das in die erste Gleichung eingesetzt liefert sofort $\boxed{A = 1}$.

Und das wiederum in die vierte eingesetzt schließlich $-1 + D = -\frac{5}{2}$ oder $\boxed{D = -\frac{3}{2}}$.

Die dritte Gleichung, die wir bisher nicht betrachtet haben, wird von diesen Werten auch erfüllt. Deshalb sind die gesuchten Koeffizienten

$$\boxed{(A, B, C, D) = \big(1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{3}{2}\big)}$$

Wir haben nun schließlich

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+1}.$$

Die Integration erfolgt nun summandenweise und liefert

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \ln|x-1| - \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{2}\arctan x + c\,. \end{aligned}$$

12 Komplexe Zahlen

Die Zahlen mit denen wir bisher gerechnet haben, waren die reellen Zahlen (und Teilmengen davon).

Wenn man sich die Konstruktion der reellen Zahlen genauer anschaut, so sieht man, dass man mit ihnen alle Punkte auf der Zahlengerade erreicht.

Also: Wozu neue Zahlen?

Wir erinnern uns, dass sich jedes Polynom in Linearfaktoren und quadratische Faktoren zerlegen läßt, siehe Satz 4.11. Schöner wäre eine Zerlegbarkeit nur in Linearfaktoren.

Problem: Es gibt quadratische Polynome ohne Nullstellen und das Standardbeispiel ist $p(x) = x^2 + 1$. Eine Nullstelle von p wäre eine Wurzel von -1, die es bekanntlich nicht gibt. (vgl. Satz 2.8)

Wir brauchen also mehr Zahlen, aber wie? Versuchen wir es einfach mit $\mathbb{R}^2$.

Definition 12.1 (Rechenoperationen auf $\mathbb{R}^2$)**.** Auf $\mathbb{R}^2$ führen wir eine Addition und eine Multiplikation auf die folgende Art ein:

1. $(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$
2. $(a, b)(c, d) := (ac - bd, ad + bc)$

Bemerkung: Die Addition, ist die gleiche, die wir auch schon in der Vektorrechnung benutzt haben. Nur die Multiplikation ist wirklich neu.

Definition 12.2 (Komplexe Zahlen)**.** Die Elemente der Ebene zusammen mit der in Definition 12.1 definierten Addition und Multiplikation nennt man die Menge der komplexen Zahlen und wir bezeichnen diese mit $\mathbb{C}$.

Ein Element $z = (a, b)$ heißt dann komplexe Zahl.

$\mathbb{C}$ nennt man auch die Gaussssche Zahlenebene.

Das Rechnen mit komplexen Zahlen erfüllt alle gängigen Rechenregeln:

Satz 12.3 (Rechenregeln für komplexe Zahlen)**.** *Sind $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ und $z_3 = (a_3, b_3)$ komplexe Zahlen, so gilt:*

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

2. *$z_1 z_2 = z_2 z_1$.*

3. *$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.*

4. *$(z_1 z_2) z_3 = z_1(z_2 z_3)$.*

5. *$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.*

6. *Die komplexe Zahl $(0, 0)$ erfüllt $(0, 0) + z = z$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.*

7. *Ist $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl, so erfüllt die komplexe Zahl $-z := (-a, -b)$ die Gleichung $z + (-z) = (0, 0)$.*

8. *Die komplexe Zahl $(1, 0)$ erfüllt $(1, 0)z = z$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.*

9. *Ist $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $(a, b) \neq (0, 0)$, so erfüllt die komplexe Zahl $z^{-1} := \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)$ die Gleichung $zz^{-1} = (1, 0)$. (Statt z^{-1} schreiben wir auch $\frac{1}{z}$).*

10. *Es gilt $(0, 0)z = (0, 0)$ für jedes $z \in \mathbb{C}$.*

Folgerung 12.4. Wenn wir uns auf die komplexen Zahlen beschränken, deren zweite Komponente verschwindet, also komplexen Zahlen der Form $(a, 0)$, so sehen wir:

1. $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$ sowie

2. $(a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$ und insbesondere

3. $(a, 0)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, 0\right)$.

Das heißt, die Rechenvorschriften nehmen in diesem Fall keine Notiz von dem zweiten Eintrag.

4. Für alle $(c, d) \in \mathbb{C}$ ist $(a, 0)(c, d) = (ac, ad)$.

Bemerkung 12.5. Folgerung 12.4 sagt uns:

[zu 1.-3.] Wegen 1.-3. kann man mit den komplexen Zahlen der Form $(a, 0)$ wie mit den reellen Zahlen rechnen. Und zwar entspricht $(a, 0)$ dann der Zahl a.

[zu 4.] Dieser Punkt begründet diese Interpretation weiter , denn die Multiplikation komplexer Zahlen mit welchen der Form $(a, 0)$ entspricht der skalaren Multiplikation der Vektorrechnung.

Wegen Satz 12.3 und der anschließenden Bemerkungen liegt die folgende Definition und Vereinbarung nahe:

Definition 12.6 (Real- und Imaginärteil)**.** Wir identifizieren die reelle Zahl a und die komplexe Zahl $(a, 0) \in \mathbb{C}$. So wird $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Für $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ heißt $\mathrm{Re}(z) := a$ der Realteil und $\mathrm{Im}(z) := b$ der Imaginärteil von z.

Die Gerade $\{(x, 0) \,|\, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ heißt die reelle Achse und wir schreiben $\mathbb{R}$. Die Gerade $\{(0, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ heißt die imaginäre Achse und wir schreiben $i\mathbb{R}$.

Die Identifizierung aus Definition 12.6 liefert

Folgerung 12.7. (Zerlegung komplexer Zahlen) Jede komplexe Zahl $z = (a, b)$ besitzt die Zerlegung

$$(a, b) = (a, 0)(1, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + b(0, 1)\,.$$

Diese Folgerung motiviert nun die folgende Definition

Definition 12.8 (imaginäre Einheit)**.** Die komplexe Zahl $i := (0, 1)$ heißt imaginäre Einheit. Sie erlaubt es, jede komplexe Zahl $(a, b) \in \mathbb{C}$ in der Form $z = a + ib$ darzustellen.

Satz 12.9 (Wurzel aus -1)**.** *Die imaginäre Einheit erfüllt*

$$i^2 = -1\,.$$

In der alten Schreibweise ist das $(0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$.

i *und damit natürlich auch* $-i$ *sind Lösungen der (über* $\mathbb{R}$ *nicht lösbaren) Gleichung* $z^2 = -1$.

Achtung:

Auf $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnung. Deshalb macht es auch keinen Sinn i der Zahl $-i$ als Wurzel aus -1 vorzuziehen!

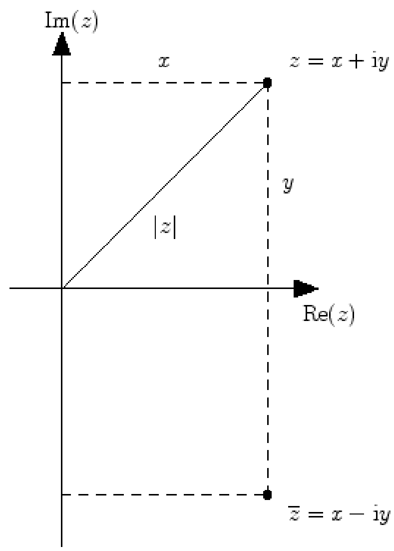
Definition 12.10 (Konjugation und Betrag)**.** Ist $z = a+bi \in \mathbb{C}$ so bezeichnet

1. $\overline{z} := a - ib$ die zu z komplex konjugierte Zahl.

2. $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}$ den BETRAG der komplexen Zahl z.

Bemerkung 12.11. zu 1. Geometrisch entspricht die komplexe Konjugation der Spiegelung an der reellen Achse.

zu 2. Der Betrag der komplexen Zahl entspricht der Norm des entsprechenden Vektors im $\mathbb{R}^2$, bzw. dem Abstand des Punktes im $\mathbb{R}^2$ vom Ursprung.



Satz 12.12 (Rechnenregeln für die Konjugation). *1.* $\overline{\overline{z}} = z$.

2. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ *und* $\overline{z-w} = \overline{z} - \overline{w}$.

3. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$ *und* $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ *(falls* $w \neq 0$*).*

4. $\overline{z} = z$ *genau dann, wenn* $z \in \mathbb{R}$ *und* $\overline{z} = -z$ *genau dann, wenn* $z \in i\mathbb{R}$.

5. $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ *und* $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.

6. *Insbesondere ist* $\overline{i} = -i = \frac{1}{i}$.

Auch wegen der Bemerkung zu 2. aus Satz 12.12 (der Verwandtschaft zwischen Betrag und Norm) haben wir

Satz 12.13 (Rechenregeln für den Betrag). *1. Es ist* $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0$ *genau dann, wenn* $z = 0$.

2. $|zw| = |z||w|$ *und* $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ *(falls* $w \neq 0$*).*
3. *Für* $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ *ist* $|a|$ *der gewöhnliche Betrag und es gilt* $|\overline{z}| = |z|$.
4. $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$ *und* $|\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$.
5. *Es gelten die* Dreiecksungleichungen*, das heißt*

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \textit{und} \quad \big||z| - |w|\big| \leq |z - w|.$$

Zwei wichtige Eigenschaften sind noch

6. $z\,\overline{z} = |z|^2$.
7. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ *(falls* $z \neq 0$*).*

13 Gleichungen mit komplexen Zahlen

13.1 Aus komplexen Gleichungen werden reelle Gleichungen

Beispiel 13.1. Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$ eine komplexe und $r \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

Wir lösen die Gleichung $\boxed{|z - z_0| = r}$.

In der Zahlenebene läßt sich das geometrisch interpretieren:

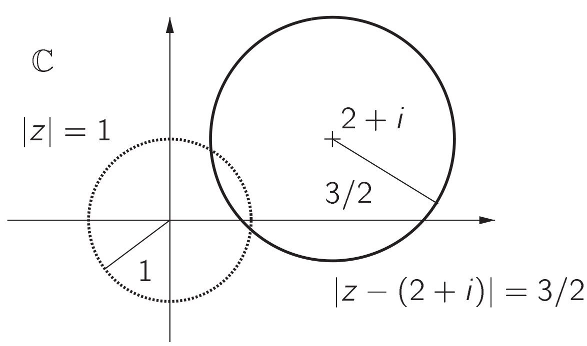
Wir suchen die Menge aller Punkte z, die von z_0 den Abstand r haben. (Genauso klappt das natürlich auch mit $<$ und $\leq$ oder $>$ und $\geq$).

Wir können die Gleichung aber auch in eine rein reelle Form umschreiben: Ist $z_0 = (a, b)$ und schreiben wir $z = (x, y)$ so gilt für das Quadrat der obigen Gleichung:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 .$$

Die Lösungsmege wird also durch einen Kreis beschrieben.

Wir haben hier die Fälle $z_0 = 2 + i$ und $r = \frac{3}{2}$, also die Menge $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - 2 - i| = \frac{3}{2}\}$ sowie $z_0 = 0$ und $r = 1$, also den EINHEITSKREIS $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$, in die Gaußsche Zahlenebene eingezeichnet:



Beispiel 13.2. Wir lösen die Gleichung $\boxed{|z + 1| \leq |z + i|}$. Das ist eigentlich eine reelle Ungleichung. Da beide Seiten positiv sind, ändern wir die Lösungsmenge nicht, wenn wir quadrieren. Außerdem wissen wir, dass für jede komplexe Zahl w das Betragsquadrat durch $|w|^2 = \mathrm{Re}(w)^2 + \mathrm{Im}(w)^2$ gegeben ist.

Mit $z = a + ib$ ist deshalb

$$|z + 1|^2 = (a + 1)^2 + b^2 \text{ und } |z + i|^2 = a^2 + (b + 1)^2 .$$

Die Ausgangsungleichung ist also äquivalent zu

$$(a+1)^2 + b^2 \leq a^2 + (b+1)^2, \text{ oder } a \leq b\,.$$

13.2 "Echte" komplexe Gleichungen

Beispiel 13.3. Wir lösen die Gleichung $\boxed{z + (3i-1)\bar{z} = 4i + 1}$.

Dazu schreiben wir $z = a + ib$, also $\bar{z} = a - ib$, und setzen das in die linke Seite der Gleichung ein:

$$a + ib + (3i-1)(a-ib) = a + ib + 3ai + 3b - a + ib = 3b + i(3a+2b)\,.$$

Ein Vergleich des Real- und Imaginärteils dieses Terms mit dem jeweiligen der rechten Seite der Ausgangsgleichung liefert die Gleichungen

$$3b = 1 \text{ und } 3a + 2b = 4, \text{ also } b = \frac{1}{3} \text{ und } a = \frac{10}{9}\,.$$

Beispiel 13.4. Eine weitere Form der Gleichung ist die quadratische Gleichung $\boxed{z^2 + az + b = 0}$ mit komplexen Koeffizienten a und b.

Hier kann man zwei verschiedene Fälle unterscheiden:

1. Die Koeffizienten a und b sind reell. Dann wissen wir wegen Satz 2.18 insbesondere, ob diese Gleichung reelle Lösungen hat und wie diese gegebenenfalls aussehen.

2. Die Koeffizienten a und b sind beliebige komplexe Zahlen.

Wenden wir uns zunächst dem ersten Fall zu. Weil wir nun die Möglichkeit haben aus negativen Zahlen die Wurzel zu ziehen erhalten wir die folgende Erweiterung von Satz 2.18.

Satz 13.5 (*pq*-Formel)**.** *Sind $p, q \in \mathbb{R}$ dann ist jede Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ in $\mathbb{C}$ lösbar.*

Ist $D := p^2 - 4q$ die Diskriminante, so besitzt die quadratische Gleichung ...

1. *... die eindeutige reelle Lösung* $\quad z = -\dfrac{p}{2} \quad$ *falls $D = 0$.*

2. ... die zwei reellen Lösungen

$$z_1 = -\frac{1}{2}(p + \sqrt{D}) \quad \textit{und} \quad z_2 = -\frac{1}{2}(p - \sqrt{D})$$

falls $D > 0$.

3. ... die zwei komplexen Lösungen

$$z_1 = -\frac{1}{2}(p + i\sqrt{-D}) \quad \textit{und} \quad z_2 = -\frac{1}{2}(p - i\sqrt{-D})$$

falls $D < 0$.

Insbesondere gilt im dritten Fall $z_1 = \overline{z_2}$.

Bemerkung 13.6. Sind p und q komplexe Zahlen, so stimmt die pq-Formel aus dem vorigen Satz immer noch und liefert die Lösungen der (komplexen) quadratischen Gleichung.

Achtung: Die Lösungen sind dann aber nicht komplex konjugiert zueinander!

Dafür müssen wir allerdings die Wurzel aus einer komplexen Zahl ziehen. Wie man das macht, erfahren wir im nächsten Kapitel.

Mit Satz 13.5 haben wir die folgende Erweiterung der reellen Variante des Fundamentalsatzes der Algebra 4.11.

Satz 13.7 (Fundamentalsatz der Algebra)**.**

- *Jedes nicht-konstante Polynom* p *hat über* $\mathbb{C}$ *mindestens eine Nullstelle.*
- *Jedes nicht-konstante Polynom läßt sich über* $\mathbb{C}$ *vollständig in Linearfaktoren zerlegen.*

(Hierbei sind als Koeffizienten ausdrücklich auch komplexe Zahlen zugelassen)

Bemerkung 13.8. Sind die Koeffizienten des Polynoms in Satz 13.5 alle reell, so tauchen die komplexen Nullstellen immer in Paaren aus komplexer Zahl und deren komplex konjugierter Zahl auf!

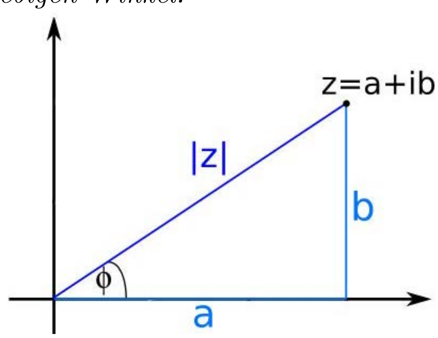
14 Komplexe Polarkoordinaten und Wurzeln

Wir wenden uns nun den komplexen Zahlen als Elemente der Gaußschen Zahlenebene zu.

Satz 14.1 (Polarkoordinatendarstellung)**.** *Sei $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine komplexe Zahl, die wir als Punkt in der Zahlenebene betrachten. Dann läßt sich die Lage der komplexen Zahl durch den Abstand zum Ursprung und den Winkel zur positiven reellen Achse eindeutig beschreiben. D.h.: Es gibt eine reelle Zahl $r > 0$ und einen Winkel $\phi \in [0, 2\pi[$, so dass z die folgende Darstellung hat*

$$z = r(\cos\phi + i \sin\phi)$$

Diese Darstellung ist für $z = 0$ mehrdeutig, und wir beschreiben $z = 0$ durch $r = 0$ und einen beliebigen Winkel.



Definition 14.2 (Polarkoordinaten)**.** Die Darstellung aus Satz 14.1 heißt Polarkoordinatendarstellung der Zahl z und der Winkel $\phi \in [0, 2\pi[$ heißt ihr Argument und wird mit $\arg(z)$ bezeichnet.

Bemerkung 14.3. Läßt man die Bedingung fallen, dass der Winkel, der sich aus der Polarkoordinatendarstellung ergibt, aus $[0, 2\pi[$ stammt, dann spricht man lediglich von dem (besser: einem) Polarwinkel von z.

Z.B. entspricht eine rein imaginäre Zahl, etwa i, den Winkeln $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ oder auch $\frac{2001}{2}\pi$, denn das Hinzuaddieren von 2π ändert den Sinus- und den Cosinuswert nicht.

Das Argument einer komplexen Zahl entspricht somit einer "Normierung" dieses Polarwinkels.

Satz 14.4 (Umrechnung Polarkoordinaten $\leftrightarrow$ kartesische Koordinaten)**.**

1. *Ist* $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, *so ist* $z = a + ib$ *mit*

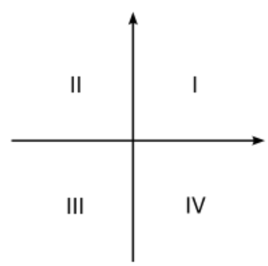
$$a = r\cos\phi \quad \textit{und} \quad b = r\sin\phi\,.$$

2. *Ist* $z = a + ib$, *so ist* $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ *und für* $z \neq 0$ *ist*

$$\phi = arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \textit{falls } a > 0, b \geq 0\,, \\ \frac{\pi}{2} & \textit{falls } a = 0, b > 0\,, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \textit{falls } a < 0\,, \\ \frac{3\pi}{2} & \textit{falls } a = 0, b < 0\,, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & \textit{falls } a > 0, b < 0\,, \end{cases}$$

Bemerkung 14.5. Wie oben erwähnt, entspricht die Beschränkung von $\arg(z)$ auf $[0, 2\pi[$ einer Normierung des Polarwinkels. Statt dessen hätte man sich genauso gut für $]-\pi, \pi]$ entscheiden können (oder jedes andere halboffene Intervall der Länge 2π).

Man sollte sich die Formeln für das Argument nicht merken, sondern ein Gefühl dafür entwickeln, in welchem Quadranten der Punkt sich befindet.



Dann braucht man lediglich den Wert $\arctan\left|\frac{b}{a}\right|$ zu berechnen und entweder diesen nutzen (I), von π abziehen (II), auf π aufaddieren (III) oder von 2π abziehen (IV).

Beispiel 14.6.

z	$\lvert z\rvert$	$\arg(z)$	$\arctan\left\lvert\frac{b}{a}\right\rvert$
7	7	0	0
$2i$	2	$\frac{1}{2}\pi$	$-$
$1+i$	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$
$-1+\sqrt{3}i$	2	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$
$-1-2i$	$\sqrt{5}$	$\approx 1.35\pi$	$\approx 0.35\pi$
$4-3i$	5	$\approx 1.8\pi$	$\approx 0.2\pi$

Satz 14.7 (Rechnen mit Polarkoordinaten)**.**

1. *Für alle reellen Zahlen a gilt: Es ist $a > 0$ bzw. < 0 genau dann, wenn $\arg(a) = 0$ bzw. $= \pi$.*
2. *Für $a \in \mathbb{R}^{>0}$ und $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\arg(az) = \arg(z)$.*
3. *Für die komplex konjugierte Zahl $z \notin \mathbb{R}^{\geq 0}$ gilt:*
$$|\overline{z}| = |z| \quad \textit{und} \quad \arg(\overline{z}) = 2\pi - \arg(z)$$
Für $z \in \mathbb{R}^{>0}$ ist $|z| = |\bar{z}|$ und $\arg(z) = \arg(\bar{z}) = 0$.
4. *Wegen $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}$ gilt für $z \notin \mathbb{R}^{\geq 0}$:*
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad \textit{und} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi - \arg(z).$$
Für $z \in \mathbb{R}^{>0}$ ist $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ und $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = \arg(z) = 0$.
5. *Für das Produkt zweier komplexer Zahlen gilt:*
$$|wz| = |w|\,|z|$$
und
$$\arg(wz) = \begin{cases} \arg(w) + \arg(z) & \textit{falls } \arg(w) + \arg(z) < 2\pi \\ \arg(w) + \arg(z) - 2\pi & \textit{falls } \arg(w) + \arg(z) \geq 2\pi \end{cases}$$

6. *Für die Potenzen einer komplexen Zahl gilt:*

$$|z^n| = |z|^n \quad \textit{und} \quad \arg(z^n) = n \arg(z)$$

(dabei gilt die letzte Gleichung nur bis auf die Addition eines Vielfachen von 2π).

Bemerkung 14.8 (Vorsicht!). Die Eigenschaften für die Argumente in Satz 14.7 hängen von der Wahl des gewählten Intervalls ab. Bei uns ist das immer $[0, 2\pi[$.

Beispiel 14.9. Für alle $z \neq 0$ ist $-z = (-1) \cdot z$ und damit

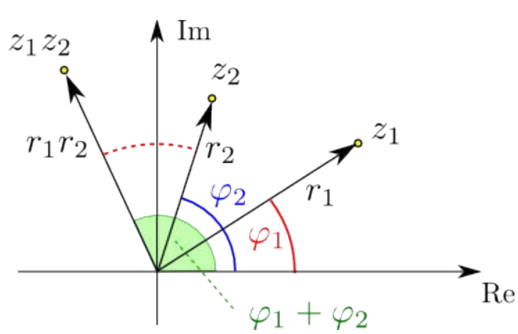
$$\arg(-z) = \arg((-1) \cdot z) = \pi + \arg(z) \quad \text{falls} \quad \arg(z) < \pi$$

und

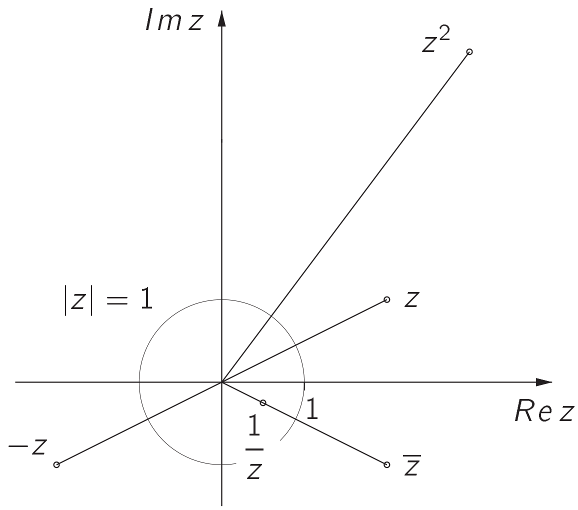
$$\arg(-z) = \arg((-1) \cdot z) = \arg(z) - \pi \quad \text{falls} \quad \arg(z) \geq \pi\,.$$

Bemerkung 14.10 (Geometrische Interpretation von Summe und Produkt)**.**

- Produkt: Wegen Punkt 5 des letzten Satzes gilt: Der Polarwinkel des Produktes zweier komplexer Zahlen ist die Summe der Polarwinkel der einzelnen Faktoren und die Länge des Produktes ist das Produkt der einzelnen Längen (man spricht auch von einer Drehstreckung).
- Summe: Die Summe zweier komplexer Zahlen entspricht der vektoriellen Addition der einzelnen Summanden (da die Summe – wie die Vektoraddition – komponentenweise definiert ist).



Für verschiedene aus z gebildete komplexe Zahlen erhalten wir dann in der komplexen Ebene das Folgende:

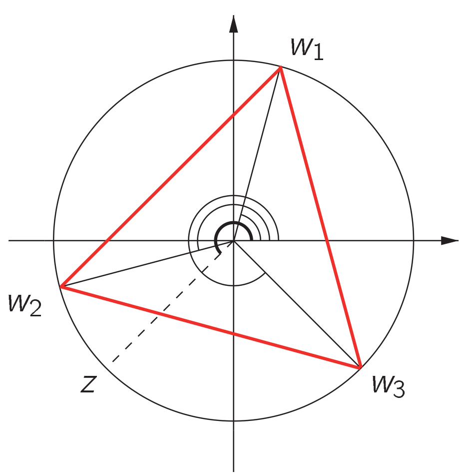


Satz 14.11 (Wurzeln)**.** *Jede komplexe Zahl $w \neq 0$ hat n n-te Wurzeln. Mit anderen Worten: Die Gleichung $z^n = w$ hat genau n verschiedene Lösungen $w_1, w_2, \ldots, w_n$ (die* Wurzeln *von w). Ist $\phi = \arg(w)$, so sind diese Wurzeln*

$$w_k = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\phi + 2\pi k}{n}\right)\right) ,$$

für $k = 1, \ldots, n$.

Beispiel 14.12. Löse die Gleichung $w^3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-i) =: z$.



Definition 14.13 (Komplexe Exponentialfunktion)**.** Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ definieren wir

$$\exp(z) := e^a(\cos b + i \sin b)\,.$$

Bemerkung 14.14.

- Für $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ gilt $\exp(a) = e^a$, so dass man hier die reelle Exponentialabbildung zurückerhält.
- Für $ib \in i\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ gilt $\exp(ib) = \cos b + i \sin b$.

Satz 14.15 (Formel von Moivre)**.** *Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)\,.$$

Bemerkung 14.16. Für alle $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\exp(nz) = \big(\exp(z)\big)^n\,.$$

Neben der letzten Eigenschaft erfüllt die komplexe Exponentialfunktion auch die anderen Eigenschaften ihrer reellen Schwester und wir schreiben deshalb wie im reellen Fall

$$e^z := \exp(z)\,.$$

Dann bekommt die Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl die kompakte (und übliche) Form

$$z = re^{i\phi}\,.$$

15 Lineare Gleichungssysteme

Bei der Integration rationaler Funktionen, bzw. bei der Partialbruchzerlegung, sind wir auf ein besonderes System von Gleichungen gestoßen.

Dabei handelte es sich um ein System mit mehreren Variablen, die auf eine ganz spezielle Art in das System eingehen.

Definition 15.1 (Lineares Gleichungssystem – LGS)**.** Ein (reelles) LINEARES GLEICHUNGSSYSTEM (LGS) mit n Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und m Gleichungen hat folgende Gestalt

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

mit $a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$.

Die a_{ij} heißen die KOEFFIZIENTEN des LGS und die b_j heißen die RECHTE SEITE des LGS.

Das LGS heißt HOMOGEN, wenn alle b_j's verschwinden.

Notation 15.2. Statt der Form in der Definition benutzen wir auch die etwas kompaktere Schreibweise

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

oder noch kompakter

$$(A|b)$$

mit

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Definition 15.2 (cont.)**.** Die Lösungsmenge des LGS $(A|b)$ bezeichnen wir mit

$$L(A,b) := \big\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, (x_1,\dots,x_n) \text{ löst } (A|b)\big\}$$

Satz 15.3 (Gauß-Operationen)**.** *Die folgenden Operationen angewendet auf das System $(A|b)$ verändern die Lösungsmenge des LGS nicht:*

1. *Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $a \neq 0$.*
2. *Vertauschen von Zeilen.*
3. *Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.*
4. *Vertauschen von Spalten*

Bemerkung 15.4 (**Achtung**)**.** Wenn man Punkt 4. anwendet, muss man sich merken, welche Variable zu welcher Spalte gehört!

Satz 15.5 (Gauß-Algorithmus)**.** *Es sei $(A|b)$ ein lineares Gleichungssystem, dann kann man durch geeignete Gauß-Operationen erreichen, dass das LGS die folgende Form bekommt:*

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc}
j_1 & j_2 & & j_k & j_{k+1} & & j_n \\
\downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & c_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & c_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & c_k \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{k+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m
\end{array}\right)
\end{array}$$

Dabei gibt j_ℓ an, dass diese Spalte zur j_ℓ-ten Variablen gehört.

Die Zahl k nennt man den Rang *des LGS.*

Bemerkung 15.6 (Praktische Durchführung des Gauß-Algorithmus)**.**

> **Step 1:** Wir versuchen durch 3.(Tausch von Zeilen), 4.(Tausch von Spalten) und 1.(Skalierung einer Zeile) eine “1” in die obere linke Ecke zu bekommen. (Ist dies nicht möglich, dann endet der Algorithmus, denn die Koeffizienten, mit denen man diesen Schritt gestartet hat, sind alle Null.)

Step 2: Durch Anwenden von 2.(Addition von Zeilen) erzeugen wir Nullen unterhalb und oberhalb dieser "1".

Step 3: Wir beginnen nun wieder mit Step1. Allerdings wenden wir ihn auf das kleinere System an, das wir durch Löschen der ersten Spalte und ersten Zeile erhalten.

Beispiel 15.7. Wir lösen das LGS

$$\begin{array}{rrrrcr} 2x_1+ & 6x_2+ & & 2x_4 & = & 10 \\ x_1+ & 3x_2+ & x_3+ & 2x_4 & = & 7 \\ 3x_1+ & 9x_2+ & 4x_3 & & = & 16 \\ 3x_1+ & 9x_2+ & x_3+ & x_4 & = & 17 \end{array}$$

oder

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 6 & 0 & 2 & 10 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 16 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & 17 \end{array}\right)$$

1.) Vertausche Z1 und Z2.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 2 & 6 & 0 & 2 & 10 \\ 3 & 9 & 4 & 0 & 16 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & 17 \end{array}\right) \end{array}$$

2.) Addiere $(-2)\times$ Z1 zu Z2, dann $(-3)\times$ Z1 zu Z3 und $(-3)\times$ Z1 zu Z4.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \end{array}\right) \end{array}$$

3.) Vertausche S2 und S4.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -4 \end{array}\right) \end{array}$$

4.) Addiere Z2 zu Z1, dann $(-3)\times$ Z2 zu Z3 und $(-1)\times$ Z2 zu Z3. Dann multipliziere Z2 mit $-\frac{1}{2}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

5.) Multipliziere Z3 mit $\frac{1}{7}$, addiere $(-1)\times$ Z3 zu Z2, dann Z3 zu Z1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dies ist nun die Endform des Gauß-Algorithmus, aus dem wir die Lösung ablesen:

Der Rang des LGS ist $k = 3$ und als freien Parameter wählen wir x_2.

Wir schreiben die Gleichungen noch einmal aus:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_4 &= 1 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

und es gilt

$$L(A, b) = \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = 4 - 3x_2, x_3 = 1, x_4 = 1\big\}$$

Setzen wir $x_2 = t$ für den freien Parameter, so schreiben wir auch

$$L(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Schauen wir uns nochmal das Endergebnis des Gauß-Algorithmus aus Satz 15.5 an. Wir wollen überlegen, wie man daraus etwas über die Lösbarkeit des Ausgangs-LGS sagen kann.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc}
\overset{j_1}{\downarrow} & \overset{j_2}{\downarrow} & \cdots & \overset{j_k}{\downarrow} & \overset{j_{k+1}}{\downarrow} & \cdots & \overset{j_n}{\downarrow} & \\
\end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & c_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & c_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & c_k \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{k+1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_m
\end{array}\right)
\end{array}$$

Satz 15.8 (Lösbarkeit eine LGS)**.** *Es sei $(A|b)$ ein LGS vom Rang k. Der Gauß-Algorithmus liefert die folgenden Fälle für die Lösungsmenge $L(A,b)$:*

1. *Ist mindestens eine der Zahlen $c_{k+1},\ldots,c_m$ ungleich Null, so ist*
$$L(A,b)=\emptyset.$$
2. *Ist $k=n\leq m$ und $c_{n+1}=\ldots=c_m=0$, so ist das System eindeutig lösbar und es gilt*
$$L(A,b)=\{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_{j_1}=c_1,x_{j_2}=c_2,\ldots,x_{j_n}=c_n\}.$$
3. *Ist $k<n$ und $c_{k+1}=\ldots=c_m=0$, so können die $n-k$ Variablen $x_{j_{k+1}},\ldots,x_{j_n}$ als freie Parameter gewählt werden.*

   Damit sind die Werte $x_{j_1},\ldots,x_{j_k}$ für jede Wahl der Parameter eindeutig bestimmt.

   *Man sagt: Die Lösungsmenge $L(A,b)$ ist $(n-k)$-*DIMENSIONAL.

16 Vektoren

In Kapitel 1 haben wir das Kreuzprodukt von Mengen eingeführt: Für eine Menge M sind die Elemente aus $M^n := \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{n\text{-mal}}$ genau die n-Tupel $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ mit $m_j \in M$. (vgl. Definition 1.5). Das nutzen wir für die folgende Definition aus.

Definition 16.1 (Vektoren im Zahlenraum)**.** Ein VEKTOR mit n Komponenten (im Zahlenraum) ist ein n-Tupel reeller Zahlen, also ein Element aus $\mathbb{R}^n$. Wir schreiben die Komponenten eines Vektors in eine Spalte:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

(Manchmal benutzen wir die platzsparende Schreibweise $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^T$, wobei ^{T} andeutet, dass wir eigentlich einen Spaltenvektor meinen).

Mit Vektoren kann man auch rechnen:

Definition 16.2 (Rechnen mit Vektoren)**.**

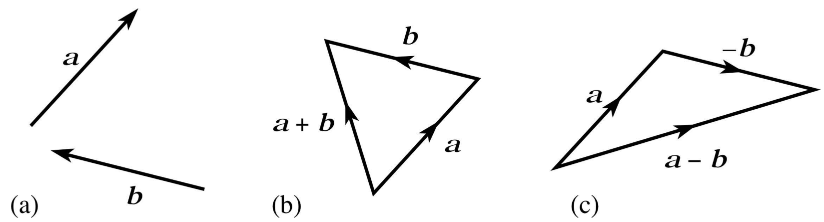
- Man kann zwei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ miteinander addieren, gemäß $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$.
- Man kann einen Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ und eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ miteinander multiplizieren, gemäß $\alpha \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{pmatrix}$.

Wir beschränken uns in der kommenden Betrachtung auf $\mathbb{R}^2$ (obwohl alles auch im Höherdimensionalen richtig bleibt).

Bemerkung 16.3 (Vektoren und Geometrie)**.** Wir identifizieren einen Vektor $\vec{a} = \binom{a_1}{a_2}$ mit dem Pfeil $\overrightarrow{OA}$, der den Ursprung O der Ebene mit den Punkt $A = (a_1, a_2)$ verbindet. Sei $\vec{b}$ ein weiterer Vektor mit zugehörigem Punkt $B = (b_1, b_2)$ und α eine reelle Zahl.

- Die Addition $\vec{a} + \vec{b}$ entspricht einem Pfeil $\overrightarrow{OC}$, wobei der Punkt C wie folgt konstruiert wird:

  Verschiebe den Pfeil $\overrightarrow{OB}$ so, dass sein Anfang in A liegt. Dann zeigt das Ende dieses verschobenen Pfeils auf den Punkt C.

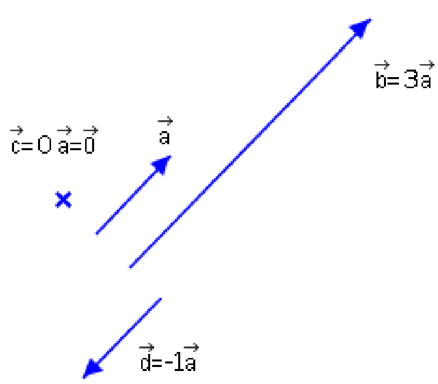


- Die Multiplikation $\alpha\vec{a}$ entspricht dem Pfeil $\overrightarrow{OD}$, wobei der Punkt D wie folgt konstruiert wird:

  Ist $\alpha \geq 0$, so entspricht die Richtung des Pfeils $\overrightarrow{OD}$ der von $\overrightarrow{OA}$ und die Länge des Pfeils $\overrightarrow{OD}$ ist gegeben durch die Länge des Pfeils $\overrightarrow{OA}$ multipliziert mit α.

  Insbesondere ist für $\alpha = 0$ das Produkt $0\vec{a}$ gerade der Nullvektor $\overrightarrow{OO}$, also $D = O$.

  Ist $\alpha < 0$ so kehrt sich die Richtung um, aber die Länge ist die gleiche wie im ersten Fal'



Satz 16.4 (Rechenregeln für Vektoren)**.** *Es seien $\vec{u}, \vec{v}$ und $\vec{w}$ Vektoren und α und β seien reelle Zahlen, dann gilt:*

1. $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$.
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$.
3. $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{v}$.
4. $(\alpha + \beta) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{v}$.
5. $\alpha \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \alpha \cdot \vec{v} + \alpha \cdot \vec{w}$
6. $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$.
7. *Es gibt einen* NULLVEKTOR $\vec{0}$ *mit* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$.
8. *Zu $\vec{v}$ gibt es einen Vektor $-\vec{v}$ mit $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.*

Bemerkung 16.5. (zu 7.) ... nämlich $\vec{0} := (0, 0, \ldots, 0)^T$.

(zu 8.) ... nämlich $-\vec{v} := (-1) \cdot \vec{v} = (-v_1, \ldots, -v_n)^T$.

Definition 16.6 (Linearkombination)**.** Es seien $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ Vektoren. Eine Summe der Form

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$$

heißt LINEARKOMBINATION und die Zahlen $\alpha_j \in \mathbb{R}$ heißen KOEFFIZIENTEN der Linearkombination.

Beispiel 16.7. Der Vektor $(6, 4, 2)^T \in \mathbb{R}^3$ ist eine Linearkombination der Vektoren $(1, 0, 0)^T$, $(0, 1, 0)^T$ und $(0, 0, 1)^T$ mit den Koeffizienten 6, 4 und 2.

Er ist aber auch eine Linearkombination der Vektoren $(2, 1, 3)^T$, $(4, 2, 1)^T$ und $(1, 0, 1)^T$ mit den Koeffizienten $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{5}$ und -2.

Definition 16.8 (linear abhängig, linear unabhängig)**.** Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots,$ $\vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ heißen LINEAR ABHÄNGIG, wenn es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

1. die α_i nicht alle Null sind und
2. die Linearkombination $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k$ den Nullvektor $\vec{0}$ ergibt.

Sie heißen LINEAR UNABHÄNGIG, wenn sie nicht linear abhängig sind.

Folgerung 16.9. Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_k$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Gleichung

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

(als Gleichung für die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$) nur die Lösung $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ hat.

Beispiel 16.10.

1. Die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind linear abhängig, denn es gilt $4\vec{u} + (-1)\vec{v} + (-2)\vec{w} = \vec{0}$.

2. Die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind linear unabhängig, denn $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \vec{0}$ ist gleichbedeutend mit $\begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und damit gleichbedeutend mit dem LGS

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta &= 0 \\ 2\alpha + \beta &= 0 \end{cases}$$

und dies hat die eindeutige Lösung $\alpha = \beta = 0$ (vgl. Kapitel 15).

Bemerkung 16.11.

1. $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ist linear abhängig, genau dann, wenn $\vec{v} = 0$.

2. Die lineare Abhängigkeit zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist gleichbedeutend mit jeweils

   a) $\vec{v}$ und $\vec{w}$ liegen auf einer Geraden durch den Nullpunkt.

   b) Je einer der Vektoren ist ein Vielfaches des anderen.

3. Die lineare Abhängigkeit dreier Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist gleichbedeutend mit jeweils

   a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ liegen in einer Ebene durch den Nullpunkt.

   b) Mindestens einer der Vektoren ist eine Linearkombination der anderen beiden.

Bemerkung 16.12 (Erzeugnis, Basis)**.**

1. Das ERZEUGNIS der Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ ist die Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren.

   i. Das Erzeugnis eines Vektors ist eine Gerade durch den Nullpunkt.

   ii. Das Erzeugnis zweier Vektoren ist a) eine Gerade, wenn die Vektroen linear abhängig sind oder b) eine Ebene, wenn sie linear unabhängig sind.

2. Das Erzeugnis als Teilmenge der Menge $\mathbb{R}^n$ erfüllt die Punkte 1.-8., siehe Satz 16.4.

3. Läßt sich jedes Element von $\mathbb{R}^n$ eindeutig(!) als Linearkombination der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^n$ darstellen, dann nennt man $\left\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\right\}$ eine BASIS von $\mathbb{R}^n$.

4. Die Eindeutigkeit für alle Vektoren kann nur dann klappen, wenn es sich in 3. um genau n Vektoren handelt.

5. Die Elemente einer Basis sind linear unabhängig, z.B besitzt eine Basis des $\mathbb{R}^2$ genau zwei und eine Basis des $\mathbb{R}^3$ genau drei Vektoren.

6. n Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sie eine Basis bilden.

7. Die STANDARDBASIS des $\mathbb{R}^n$ besteht aus den KANONISCHEN EINHEITSVEKTOREN

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 16.13. Jeder Vektor des $\mathbb{R}^2$ läßt sich mit Hilfe der Vektoren $(1,0)^T$, $(0,1)^T$ und $(1,1)^T$ darstellen, jedoch nicht eindeutig. Eindeutigkeit bekommt man, wenn man einen der Vektoren wegläßt.

Beispiel 16.14 (Vektoren und Geometrie)**.**

- Verbindet man in einem Dreieck die Seitenmitten, so erhält man ein Dreieck, dessen Seiten zu den Seiten des Originaldreiecks parallel sind.
- Verbindet man in einem Viereck die Seitenmitten, so erhält man ein Parallelogramm.

17 Skalar- und Vektorprodukt

Bisher hatten wir die Möglichkeit Vektoren des $\mathbb{R}^n$ zu addieren und Vektoren mit rellen Zahlen zu multiplizieren.

Man kann aber auch Vektoren miteinander multiplizieren, nur ist das Ergebnis kein Vektor, sondern eine Zahl.

Im Spezialfall $n = 3$ gibt es auch ein Produkt, dass für zwei Vektoren einen Vektor liefert. (Solch ein Produkt gibt es auch noch einmal im $\mathbb{R}^7$)

Definition 17.1 (Skalarprodukt, Norm und Winkel)**.**

- Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\vec{v} \cdot \vec{w} := v_1 w_1 + v_2 w_2 + \ldots + v_n w_n \,.$$

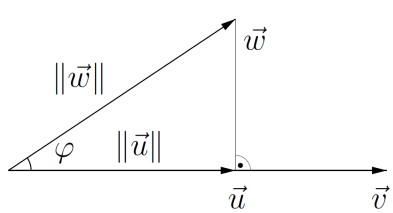
- Die Norm (oder der Betrag) eines Vektors ist definiert durch

$$\|\vec{v}\| := \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2} \,.$$

- Der Winkel $\varphi \in [0, \pi]$ zwischen zwei Vektoren $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\cos\varphi := \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|} \,.$$

Geometrische Situation:



$$\|\vec{u}\| = \|\vec{w}\| \cos\varphi$$

Mit den Bezeichnungen aus der Abbildung gilt: $\|\vec{v}\|\|\vec{u}\| = \vec{v} \cdot \vec{w}$. D.H.: Der Wert des Skalarproduktes entspricht dem Flächeninhalt des Rechtecks, das von $\vec{v}$ und der um $90°$ gedrehten Projektion von $\vec{w}$ auf $\vec{v}$ aufgespannt wird.

Satz 17.2 (Eigenschaften des Skalarproduktes und der Norm)**.**

1. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$.
2. $\vec{v} \cdot \big(\alpha\vec{w} + \beta\vec{u}\big) = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w}) + \beta(\vec{v} \cdot \vec{u}\big)$.
3. *Für* $\vec{v} \neq \vec{0}$ *ist* $\left\| \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \right\| = 1$.
4. $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ *genau dann, wenn* $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *senkrecht aufeinander stehen.*
5. *Der Vektor* $\binom{-b}{a}$ *steht senkrecht auf dem Vektor* $\binom{a}{b}$.
6. $\|\vec{v}\| \geq 0$.
7. $\|\vec{v}\| = 0$ *genau dann, wenn* $\vec{v} = \vec{0}$.
8. $\|\alpha\vec{v}\| = |\alpha|\|\vec{v}\|$.

Satz 17.3 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung)**.** *Für Vektoren* $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *gilt*

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\,.$$

Die Gleichheit tritt genau dann auf, wenn $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *linear abhängig sind.*

Satz 17.4 (Dreiecksungleichung)**.** *Für Vektoren* $\vec{v}$ *undn* $\vec{w}$ *gilt*

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

und

$$\big|\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|\big| \leq \|\vec{v} - \vec{w}\|,$$

sowie damit dann

$$\|\vec{v} - \vec{w}\| \leq \|\vec{v} - \vec{u}\| + \|\vec{u} - \vec{w}\|.$$

Satz 17.5 (Parallelogrammgleichung)**.** *Für Vektoren* $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *gilt*

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2 = 2\|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{w}\|^2.$$

Wie schon zu Beginn des Kapitels angedeutet gibt es im Fall des $\mathbb{R}^3$ noch ein Produkt zwischen Vektoren, dass als Ergebnis wieder einen Vektor liefert.

Definition 17.6 (Kreuzprodukt)**.** Es seien $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
Dann ist das Kreuzprodukt (oder Vektorprodukt) $\vec{v} \times \vec{w}$ definiert durch

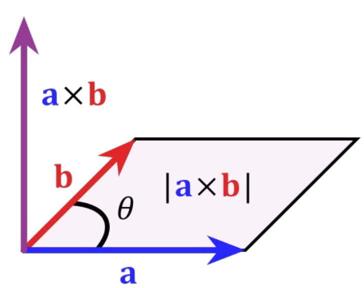
$$\vec{v} \times \vec{w} := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Satz 17.7 (Eigenschaften des Kreuzproduktes)**.**

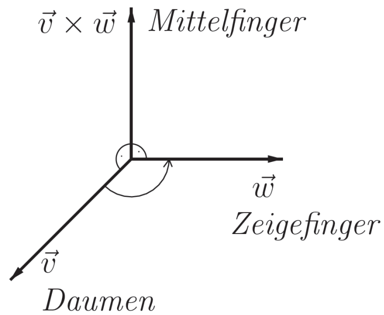
1. $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$.
2. $\vec{v} \times \big(\alpha\vec{w} + \beta\vec{u}\big) = \alpha(\vec{v} \times \vec{w}) + \beta(\vec{v} \times \vec{u}\big)$.
3. *Ist* α *der Winkel zwischen* $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *so ist* $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \sin\alpha$.
4. $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$ *genau dann, wenn* $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *linear abhängig sind.*
5. $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = \vec{0}$.
   D.h. $\vec{v} \times \vec{w}$ *steht sowohl senkrecht auf* $\vec{v}$ *als auch auf* $\vec{w}$.

Geometrische Eigenschaften:

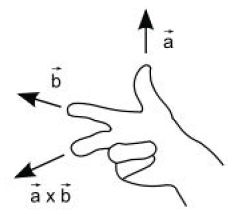
6. $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$ *entspricht dem Flächeninhalt des von* $\vec{v}$ *und* $\vec{w}$ *aufgespannten Parallelogramms.*
   D.h.: $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\|\|\vec{w}\| \sin\theta$



7. $\vec{v}$, $\vec{w}$ *und* $\vec{v} \times \vec{w}$ *bilden in dieser Reihenfolge ein* Rechtssystem.



Rechte-Hand-Regel



Eine Kombination des Sakalrproduktes und des Kreuzproduktes im $\mathbb{R}^3$ liefert ein weiteres geometrisch relevantes Produkt:

Definition 17.8 (Spatprodukt)**.** Das Spatprodukt dreier Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ ist definiert durch

$$\mathfrak{s}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

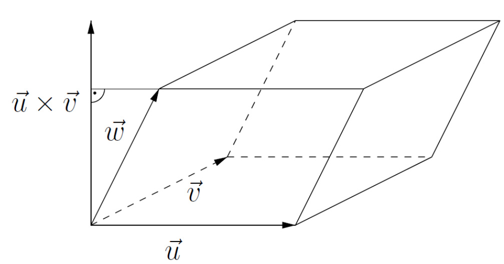
Die folgenden Eigenschaften des Spatproduktes sind direkte Konsequenzen aus denen der beiden beteiligten Produkte:

Folgerung 17.9 (Eigenschaften des Spatproduktes)**.**

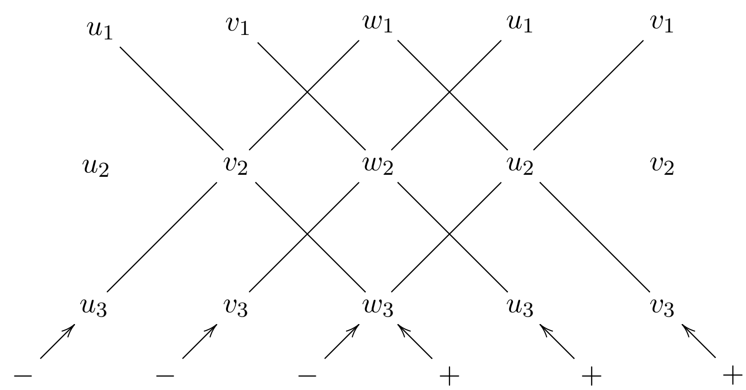
1. Das Spatprodunkt ist total schiefsymmetrisch, d.h.

$$\begin{aligned}\mathfrak{s}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &= \mathfrak{s}(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}) \\ &= \mathfrak{s}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) \\ &= -\mathfrak{s}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) \\ &= -\mathfrak{s}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) \\ &= -\mathfrak{s}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})\end{aligned}$$

2. Der Betrag des Spatproduktes $|\mathfrak{s}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$, entspricht dem Volumen des von $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannten Spats.



Bemerkung 17.10. Man kann das Spatprodukt der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ mit Hilfe der Sarrus-Regel berechnen.



Es ist nämlich

$$\mathfrak{s}\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = u_1 v_2 w_3 + v_1 w_2 u_3 + w_1 u_2 v_3 - u_1 w_2 v_3 - v_1 u_2 w_3 - w_1 v_2 u_3$$

18 Geraden und Ebenen

Definition 18.1 (Gerade und Ebene)**.** Es seien $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren und $\vec{a}$ ein weiterer Vektor.

- Eine GERADE g ist eine Menge der Form

$$g = \{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v} \,|\, t \in \mathbb{R}\}\,.$$

- Eine EBENE E ist eine Menge der Form

$$E = \{\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{w} \,|\, t, s \in \mathbb{R}\}\,.$$

Dabei heißt $\vec{a}$ AUFPUNKTVEKTOR und $\vec{v}$ bzw. $\vec{v}, \vec{w}$ heißen RICHTUNGSVEKTOREN der Geraden bzw. Ebene.

Diese Darstellungen nennt man PARAMETERDARSTELLUNGEN der Geraden bzw. Ebene.

Bemerkung 18.2. Die Richtungsvektoren sind nicht eindeutig.

- Im Fall der Gerade ist mit $\vec{v}$ auch jeder Vektor $\alpha\vec{v}$ für $\alpha \neq 0$ ein Richtungsvektor der gleichen Geraden.
- Im Fall der Ebene läßt sich jeder der Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ durch eine Linearkombinaton $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ ersetzen, ohne die Ebene zu ändern (man muss nur die lineare Unabhängigkeit erhalten).

Definition 18.3 (Parallelität)**.**

- Zwei Geraden im $\mathbb{R}^3$ heißen PARALLEL, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind.
- Zwei Ebenen im $\mathbb{R}^3$ heißen PARALLEL, wenn die Richtungsvektoren der einen Ebene jeweils als Linearkombination der Richtungsvektoren der anderen Ebene dargestellt werden können.

Definition 18.4 (Normalenvektor einer Ebene)**.** Ein Vektor $\vec{n}$ heißt NORMALENVEKTOR der Ebene E, wenn $\vec{n}$ auf zwei (linear unabhängigen) Richtungsvektoren der Ebene senkrecht steht. Gilt zusätzlich noch $\|\vec{n}\| = 1$, so nennt man $\vec{n}$ einen EINHEITS- NORMALENVEKTOR.

Bemerkung 18.5. Steht ein Vektor auf zwei Richtungsvektoren einer Ebene senkrecht, dann bereits auf allen möglichen.

Satz 18.6 (Berechnung eines Normalenvektors)**.**

1. *Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Richtungsvektoren einer Ebene, so ist*

$$\vec{n} := \frac{1}{\|\vec{v} \times \vec{w}\|} (\vec{v} \times \vec{w})$$

ein Einheitsnormalenvektor der Ebene.

2. *Der Einheitsnormalenvektor einer Ebene ist bis auf das Vorzeichen eindeutig.*

3. *Zwei Ebenen sind genau dann parallel, wenn die Einheitsnormalenvektoren (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmen.*

Bemerkung 18.7. Punkt 3 ist gleichbedeutend damit, dass zwei beliebige Normalenvektoren linear abhängig sind.

Geraden sind bereits durch die Angabe zweier unterschiedlicher Punkte eindeutig festgelegt, eine Ebene durch die Angabe dreier Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.

Satz 18.8. *Es seien P und Q zwei Punkte im Raum und $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und $\vec{q} = \overrightarrow{OQ}$ die zugehörigen Ortsvektoren. Dann gibt es genau eine Gerade durch P und Q. Diese ist gegeben durch*

$$g_{PQ} = \{\vec{p} + t(\vec{p} - \vec{q}) \,|\, t \in \mathbb{R}\} .$$

Es sei R ein weiterer Punkt, der nicht auf der Geraden g_{PQ} liegt und $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$ sein Ortsvektor. Dann gibt es genau eine Ebene, die die Punkte P, Q und R enthält. Diese ist gegeben durch

$$E_{PQR} = \{\vec{p} + t(\vec{p} - \vec{q}) + s(\vec{p} - \vec{r}) \,|\, t, s \in \mathbb{R}\} .$$

Satz 18.9 (Hessesche Normalenform)**.**

1. *Eine Ebene E im $\mathbb{R}^3$ und $\vec{a}$ ein beliebiger Aufpunktvektor. Dann läßt sich E in der Form*

$$E = \{\vec{x} \,|\, \vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0\} ,$$

darstellen, wobei $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene ist. Mit $\vec{x} = (x, y, z)^T$ und $\vec{n} = (a, b, c)$ und $\vec{n} \cdot \vec{a} = d$ schreibt sich die Ebene als

$$E = \left\{(x, y, z)^T \,|\, ax + by + cz = d\right\} ,$$

2. *Ist $\vec{n}$ ein Einheitsnormalvektor der Ebene, so ist $d_0 := \vec{n} \cdot \vec{a}$ unabhängig von der Wahl des Aufpunktes.*

3. *Wählt man den Einheitsnormalenvektor $\vec{n}$ so, dass $d_0 \geq 0$, so nennt man die Darstellung*

$$E = \{\vec{x} \,|\, \vec{n} \cdot \vec{x} = d_0\}$$

Hessesche Normalenform *(HNF) der Ebene.*

4. *Ist $d_0 > 0$, so ist die HNF eindeutig.*

Beispiel 18.10 (Umrechnung: Parameterform $\longrightarrow$ Normalform)**.** Liegt eine Ebene in Parameterform $E = \{\vec{x} \,|\, \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v} + s\vec{w}, t, s \in \mathbb{R}\}$ vor, so ist eine Normalform durch $E = \{\vec{x} \,|\, (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{x} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{a}\}$ gegeben.

Z.B.: Für

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{a} = 3$, so dass eine Normalenform durch

$$-6x + 15y - 6z = 3$$

gegeben ist. Wegen $\left\| \begin{pmatrix} -6 \\ 15 \\ -6 \end{pmatrix} \right\| = 3\sqrt{11}$ ist die HNF dann

$$-\frac{2}{\sqrt{33}}x + \frac{5}{\sqrt{33}}y - \frac{2}{\sqrt{33}}z = \frac{1}{\sqrt{33}}$$

Beispiel 18.11 (Umrechnung: Normalform $\longrightarrow$ Parameterform)**.** Liegt eine Ebene in Normalform $E = \{\vec{x} \,|\, ax + by + cz = d\}$ vor und ist etwa $a \neq 0$ (d.h. E ist nicht parallel zur x-Achse), so kann man die Bedingung "aufblähen" zu

$$\begin{array}{rlll} x = & \frac{d}{a} & -\frac{b}{a}t & -\frac{c}{a}s \\ y = & & t & \\ z = & & & s \end{array}$$

Das wiederum kann man schreiben als

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{d}{a} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und liefert damit eine Parameterdarstellung der Ebene.

Mit Hilfe der HNF kann man den Abstand eines Punktes von einer Ebene bestimmen

Satz 18.12 (Abstand Punkt $\leftrightarrow$ Ebene)**.** *Es sei* $\{\vec{x}\,|\,\vec{n}\cdot\vec{x}=d_0\}$ *die HNF der Ebene* E *und* $\vec{a}$ *ein beliebiger Aufpunktvektor. Ferner sei* P *ein Punkt im Raum und* $\vec{p}$ *sein Ortsvektor. Dann misst*

$$d(P) := |\vec{n}\cdot(\vec{a}-\vec{p})|$$

den Abstand des Punktes P *von der Ebene* E*. Insbesondere gilt für den Nullpunkt* $d(O)=d_0$*.*

19 Aussagenlogik

Definition 19.1 (Wahrheitswerte, Aussagen)**.** Eine (LOGISCHE) AUSSAGE A ist eine Behauptung über einen Sachverhalt, der genau einer der beiden WAHRHEITSWERTE "wahr" (w) oder "falsch" (f) zugeordnet werden kann.

Beispiel 19.2. Die folgenden Sätze sind Aussagen

- "Die Temperatur in Dortmund beträgt heute 25°."
- "Der Erdboden ist nass, also regnet es."
- "Es regnet, also ist der Erdboden nass."
- "$2 + 2 = 4$" oder auch "$\sin \pi = 1$"
- "$2 + 1 = 3$ oder $\sin \pi = 0$"

Man kann mit Aussagen auch operieren:

Definition 19.3 (Negation, NOT)**.** Ist A eine Aussage so nennt man $\neg A$ die NEGATION von A (man sagt auch "nicht A"). Sie ist definiert über ihren Wahrheitsgehalt:

Wenn A falsch ist, dann ist $\neg A$ wahr.

Wenn A wahr ist, dann ist $\neg A$ falsch.

Definition 19.4 (Konjunktion, AND)**.** Sind A und B Aussagen, so bezeichnet $A \wedge B$ die KONJUNKTION (man sagt auch "A und B"). Sie ist definiert über ihren Wahrheitsgehalt:

Wenn A und B wahr sind, dann ist $A \wedge B$ wahr.

Wenn A wahr und B falsch ist, dann ist $A \wedge B$ falsch.,

Wenn A falsch und B wahr ist, dann ist $A \wedge B$ falsch. ,

Wenn A und B falsch sind, dann ist $A \wedge B$ falsch.

Definition 19.5 (Disjunktion, OR)**.** Sind A und B Aussagen, so bezeichnet $A \vee B$ die DISJUNKTION (man sagt auch "A oder B"). Sie ist definiert über ihren Wahrheitsgehalt:

Wenn A und B wahr sind, dann ist $A \vee B$ wahr. ,

Wenn A wahr und B falsch ist, dann ist $A \vee B$ wahr. ,

Wenn A falsch und B wahr ist, dann ist $A \vee B$ wahr. ,

Wenn A und B falsch sind, dann ist $A \vee B$ falsch.

Definition 19.6 (Tautologie, Kontradiktion)**.** Es sei A eine beliebige Aussage, dann ist ...

1. ... die TAUTOLOGIE, $\mathbb{W}$, die Aussage mit dem Wahrheitswert der Aussage $(\neg A) \vee A$,
2. ... die KONTRADIKTION, $\mathbb{F}$, die Aussage mit dem Wahrheitswert der Aussage $(\neg A) \wedge A$

Das heißt, $\mathbb{W}$ ist immer wahr und $\mathbb{F}$ ist immer falsch.

Die Definitionen 19.3-19.5 kann man gut mit Hilfe von WAHRHEITSWERTTABELLEN beschreiben:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\mathbb{W}, A \vee \neg A$	$\mathbb{T}, A \wedge \neg A$
w	w	f	w	w	w	f
w	f	f	f	w	w	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	f

Definition 19.7 (Die Äquivalenz)**.** Es seien $A, B, \ldots$ Aussagen und weiter seien $F(A, B, \ldots)$ und $G(A, B, \ldots)$ Ausdrücke die durch Verknüpfung der Aussagen entstehen. Dann heißen $F(A, B, \ldots)$ und $G(A, B, \ldots)$ ÄQUIVALENT, wenn für alle Kombinationen von Wahrheitswerten der Aussagen $A, B, \ldots$ die Aussagen $F(A, B, \ldots)$ und $G(A, B, \ldots)$ den gleichen Wahrheitswert haben.

Wir schreiben dann $F(A, B, \ldots) \Longleftrightarrow G(A, B, \ldots)$.

Bemerkung 19.8. Die Äquivalenz von Aussagenverknüpfungen läßt sich sehr gut mit Hilfe von Wahrheitswerttabellen überprüfen. Gehen k Aussagen A_1, A_2, ..., A_k in die Äquivalenz ein, so braucht man eine Tabelle mit 2^k Zeilen.

Satz 19.9 (Einfache Beispiele)**.** *Es seien A und B Aussagen. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*

$$\neg(\neg A) \Longleftrightarrow A$$

$$
\begin{aligned}
A \wedge B &\Longleftrightarrow B \wedge A & \qquad A \vee B &\Longleftrightarrow B \vee A \\
A \vee A &\Longleftrightarrow A & \qquad A \wedge A &\Longleftrightarrow A \\
A \vee \mathbb{W} &\Longleftrightarrow \mathbb{W} & \qquad A \wedge \mathbb{W} &\Longleftrightarrow A \\
A \vee \mathbb{F} &\Longleftrightarrow \mathbb{A} & \qquad A \wedge \mathbb{F} &\Longleftrightarrow \mathbb{F}
\end{aligned}
$$

Satz 19.10 (Rechenregeln)**.** *Es seien A, B und C Aussagen. Dann gelten folgende Äquivalenzen:*

1. *Assoziativgesetze:*

$$(A \wedge B) \wedge C \Longleftrightarrow A \wedge (B \wedge C) \text{ und } (A \vee B) \vee C \Longleftrightarrow A \vee (B \vee C)$$

2. *Distributivgesetze:*

$$A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \text{ und } A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

3. *De Morgansche Regeln:*

$$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B \text{ und } \neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$$

Definition 19.11 (Subjunktion, Bikonditional)**.** Es seien A und B Aussagen. Dann ist die Subjunktion durch

$$A \to B :\Longleftrightarrow \neg A \vee B$$

und das Bikonditional durch

$$A \leftrightarrow B :\Longleftrightarrow (A \to B) \wedge (B \to A)$$

definiert.

Bemerkung 19.12. Die Wahrheitswertabellen dieser Verknüpfungen lauten wie folgt:

A	B	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
w	w	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
f	f	w	w

Mit Hilfe des Bikonditionals kann man die Äquivalenz zweier Aussagenverknüpfungen auch wie folgt charakterisieren.

Bemerkung 19.13. Für zwei Aussageverknüpfungen $F(A,\ldots)$ und $G(A,\ldots)$ gilt:

$$F(A,\ldots) \iff G(A,\ldots)$$

ist gleichbedeutend mit

$$F(A,\ldots) \leftrightarrow G(A,\ldots) \iff \mathbb{W}$$

Definition 19.14 (Die Folgerung)**.** Mit den Bezeichnungen aus 19.11 definieren wir die Folgerung analog zur Äquivalenz:

$$F(A,\ldots) \Longrightarrow G(A,\ldots)$$

ist gleichbedeutend mit

$$F(A,\ldots) \rightarrow G(A,\ldots) \iff \mathbb{W}$$

Beispiel 19.15 (Mengenverknüpfungen)**.** Mit Hilfe der logischen Verknüpfungen lassen sich die Mengenoperationen und Mengenbeziehungen, die wir in Definition 1.6 sprachlich definiert haben, wie folgt formalisieren.

- $M \cap M = \{x \,|\, x \in M \wedge x \in N\}$
- $M \cup M = \{x \,|\, x \in M \vee x \in N\}$
- $N \setminus M = \{x \,|\, x \in N \wedge \neg(x \in M)\}$
- $M \subset N \iff \forall x : (x \in M \rightarrow x \in N)$
- $M = N \iff \forall x : (x \in M \leftrightarrow x \in N)$

Mit Hilfe der Formalisierung aus Beispiel 19.15 und mit Hilfe der Regeln für die logischen Operationen, lassen sich die Rechenregeln für Mengen in Satz 1.8 überprüfen.

Beispiel 19.16 (Begründung für Satz 1.8.5)**.** Es gilt $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$, denn

$$\begin{aligned} x \in (M \cup N)^c &\iff \neg(x \in (M \cup N)) \\ &\iff \neg(x \in M \vee x \in N) \\ &\iff \neg(x \in M) \wedge \neg(x \in N) \\ &\iff x \in M^c \wedge x \in N^c \\ &\iff x \in (M^c \cap N^c) \end{aligned}$$

20 Vollständige Induktion

20.1 Das Induktionsprinzip

Die VOLLSTÄNDIGE INDUKTION ist ein Beweisverfahren. Mit ihr lassen sich Aussagen beweisen, die über der Menge der natürlichen Zahlen formuliert sind.

Ist nun $A(n)$ so eine Familie von Aussagen, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ eine Aussage, so lautet die zu beweisende Aussage

Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A(n)$ eine wahre Aussage.

oder etwas formeller

$\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$

Bemerkung 20.1. Manchmal ist es sinnvoll oder notwendig statt ganz $\mathbb{N}$ nur $\mathbb{N}^{\geq k}$ zu betrachten. Zum Beispiel gilt $A(n) :\Longleftrightarrow n - 2 > 0$ nur für $\mathbb{N}^{\geq 3}$.

Bevor wir zu einigen Beispielen und Anwendungen kommen formulieren wir zuerst einmal das Induktionsprinzip

Satz 20.2 (Vollständige Induktion)**.** *Es sei $A(n)$ eine Familie von Aussagen über der $\mathbb{N}^{\geq k}$ und es gelte*

(IA) $A(k)$ ist wahr,

und

(IS) Ist $A(m)$ wahr, so ist auch $A(m+1)$ wahr

Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq k}$ wahr.

(IA) nennt man auch den INDUKTIONSANFANG *und (IS) den* INDUKTIONSSCHLUSS*.*

Das folgende Beispiel ergänzt die Aufgabe zu Kapitel 1.

Beispiel 20.3. Es sei M eine n-elementige Menge, und $\mathcal{P}(M)$ ihre Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von M.

Dann besitzt $\mathcal{P}(M)$ genau 2^n Elemente.

Die folgenden Aussagen sind typisch für einen Induktionsbeweis.

20.2 Summen, Gleichungen

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

3. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$.

6. Für alle $n \geq \mathbb{N}^+$ gilt $1 + 4 + 7 + ... + (3n-2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$

20.3 Ungleichungen

7. Es sei $x > -1$ eine feste reelle Zahl. Dann gilt:

   Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(1+x)^n \geq 1 + nx$

8. Ist $x \neq 0$ so gilt 6. mit “$>$” für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq 2}$.

9. Es sei $p \geq 2$. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ ist $p^n \geq n$.

10. Es sei $p \geq 3$. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ ist $p^n \geq n^2$.

11. Für alle $n \in \mathbb{N}^{\geq 5}$ gilt $2^n > n^2$.

20.4 Produkte

12. Für alle $n \geq 2$ ist $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$.

13. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(1 + \frac{1}{2^{2^i}}) = \frac{2^{2^{n+1}}-1}{2^{2^{n+1}-1}}$.

14. Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ ist $\displaystyle\prod_{i=1}^{n-1}(1+\frac{2}{i}) = \sum_{k=1}^{n} k$.

15. Für alle $n \in \mathbb{N}^+$ ist $\displaystyle\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

20.5 Teilbarkeit

16. 3 teilt $13^n + 2$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

17. 3 teilt $2^{2n+1} + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

18. 6 teilt $n^3 - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

19. 47 teilt $7^{2n} - 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

20. 15 teilt $3n^5 + 5n^3 + 7n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

20.6 Ableitungen

21. Es ist $f(x) = \frac{x}{1-x}$. Dann ist $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}^+$.

22. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $f(x) = x^n$, dann ist $f'(x) = nx^{n-1}$.

23. Es sei $f(x) = e^{-x^2}$. Dann gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein Polynom p_n vom Grad n, so dass $f^{(n)}(x) = p_n(x)e^{-x^2}$.

24. Es sei $f(x) := \dfrac{1}{ax+b}$. Dann ist $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

25. Es sei $f(x) = \sin(ax) + \cos(bx)$. Dann ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) = a^n \sin\left(ax + n\frac{\pi}{2}\right) + b^n \cos\left(bx + n\frac{\pi}{2}\right)$.

26. Es sei $f_n(x) = x^n$. Dann ist $\displaystyle\int f_n(x)dx = \frac{x}{n+1} f_n(x) + c$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

21 Aussageformen

Definition 21.1 (Aussageformen)**.** Eine Aussageform $\mathcal{A}$ über einer Grundmenge G ist ein Satz in Form einer Aussage, der eine Variable enthält, die ihre Werte in G annimmt.

Wird die Variable durch einen konkreten Wert aus $x \in G$ ersetzt, so liegt eine Aussage $\mathcal{A}(x)$ vor.

Beispiel 21.2.

- Ist G die Menge der Orte auf der Erdoberfläche, so ist "Die Temperatur am Ort x beträgt heute 25°" eine Aussageform auf der Grundmenge G. Für jeden Ort in G erhält man eine Aussage, der man dann einen Wahrheitswert zuordnen kann.
- Ist $G = \mathbb{N}$, so ist "$2 + x = 3$" eine Aussageform auf der Grundmenge der natürlichen Zahlen.

Definition 21.3 (Erfüllungsmenge)**.**

1. Ist $\mathcal{A}$ eine Aussageform auf der Grundmenge G so nennt man die Menge
$$\mathscr{L}(\mathcal{A}) := \{x \in G \,|\, \mathcal{A}(x) \text{ ist wahr}\}$$
die ERFÜLLUNGSMENGE von $\mathcal{A}$.
2. Gilt für die Erfüllungsmenge einer Aussageform $\mathscr{L}(\mathcal{A}) = G$, so nennt man $\mathcal{A}$ ALLGEMEINGÜLTIG.
3. Ist die Aussage $\mathcal{A}(x)$ für alle $x \in G$ falsch, dh. $\mathscr{L}(\mathcal{A}) = \emptyset$, so nennt man $\mathcal{A}$ NICHT ERFÜLLBAR.
4. Ist für eine Aussageform $\mathscr{L}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, so heißt $\mathcal{A}$ ERFÜLLBAR.

Beispiel 21.4. Gegeben sei die Aussagenform $\mathcal{A}$, wobei $\mathcal{A}(x)$ durch die Aussage "Das Quadrat von x ist 2" definiert ist.

$\mathcal{A}$ ist erfüllbar für $G = \mathbb{R}$ und nicht erfüllbar für $G = \mathbb{Q}$. $\mathcal{A}$ ist allgemeingültig für $G = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$.

Definition 21.5 (Verknüpfen von Aussageformen)**.** Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussageformen auf der gleichen Grundmenge G so sind die Aussageformen $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ und $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ punktweise definiert, dh.

$$\begin{aligned}
(\neg\mathcal{A})(x) &:= \neg(\mathcal{A}(x)),\\
(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})(x) &:= \mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x),\\
(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})(x) &:= \mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x).
\end{aligned}$$

Bemerkung 21.6. Wir bezeichnen mit $\mathbb{W}$ bzw. $\mathbb{F}$ die Aussageformen, die für beliebiges $x \in G$ stets wahr bzw. falsch ist.

Die Rechenregeln aus Satz 19.8 und 19.9 übertragen sich analog, und auch die Definition 19.10 läßt sich direkt übertragen.

Satz 21.7. *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussageformen auf der gleichen Grundmenge G. Dann gilt*

1. $\mathscr{L}(\neg\mathcal{A}) = \big(\mathscr{L}(\mathcal{A})\big)^c$,
2. $\mathscr{L}(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = \mathscr{L}(\mathcal{A}) \cap \mathscr{L}(\mathcal{B})$,
3. $\mathscr{L}(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = \mathscr{L}(\mathcal{A}) \cup \mathscr{L}(\mathcal{B})$

und damit zum Beispiel auch

4. $\mathscr{L}(\mathcal{A} \to \mathcal{B}) = \big(\mathscr{L}(\mathcal{A}) \setminus \mathscr{L}(\mathcal{B})\big)^c$.

Satz 21.8. *Die Aussageform $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ist genau dann allgemeingültig, wenn $\mathscr{L}(\mathcal{A}) \subset \mathscr{L}(\mathcal{B})$.*

Beispiel 21.9 (Mengenoperationen)**.** Es seien $M, N \subset G$ Mengen und $\mathcal{M}$ die Aussageform, für die die Aussage $\mathcal{M}(x)$ durch $x \in M$ definiert ist (analog für $\mathcal{N}$). Dann ist $\mathscr{L}(\mathcal{M}) = M$ und $\mathscr{L}(\mathcal{N}) = N$.

Über genau diese Aussageformen haben wir die Mengenoperationen definiert (vgl. Kapitel 1)

Definition 21.10 (Allquantor, Existenzquantor)**.** Es sei $\mathcal{A}$ eine Aussageform über der Grundmenge G.

- $\forall x \in G : \mathcal{A}(x)$ bedeutet, dass die Aussageform $\mathcal{A}$ allgemeingültig ist — Für jedes $x \in G$ ist $\mathcal{A}(x)$ wahr.
- $\exists x \in G : \mathcal{A}(x)$ bedeutet, dass die Aussageform $\mathcal{A}$ erfüllbar ist — Es gibt ein $x \in G$, so dass $\mathcal{A}(x)$ wahr ist.

Bemerkung 21.11. Es sei $\mathcal{A}$ eine Aussageform über G. Dann gilt

1. $\mathcal{A}$ ist erfüllbar $\iff$ $\exists x \in G : \mathcal{A}(x)$.
2. $\mathcal{A}$ ist nicht erfüllbar $\iff$ $\forall x \in G : \neg\mathcal{A}(x)$.

3. $\mathcal{A}$ ist allgemeingültig $\iff$ $\forall x \in G : \mathcal{A}(x)$.
4. $\mathcal{A}$ ist nicht allgemeingültig $\iff$ $\exists x \in G : \neg\mathcal{A}(x)$.

In der letzten Bemerkung haben wir schon von folgendem Sachverhalt Gebrauch gemacht:

Satz 21.12 (Negation von Quantoren)**.** *Es gilt:*

1. $\neg\big(\exists x \in G : \mathcal{A}(x)\big) \iff \forall x \in G : \neg\mathcal{A}(x)$
2. $\neg\big(\forall x \in G : \mathcal{A}(x)\big) \iff \exists x \in G : \neg\mathcal{A}(x)$

Beispiel 21.13. Es seien $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{B}$ Aussageformen auf G_1 bzw. G_2. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\neg\big(\forall x \in G_1\, \exists y \in G_2 : (\mathcal{A}(x) \to \mathcal{B}(x))\,\big) \\ \iff &\exists x \in G_1\, \forall y \in G_2 : (\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{B}(x)) \end{aligned}$$

Satz 21.14. *Es sei $\mathcal{A}$ eine Aussageform auf der Menge $G_1 \times G_2$. Dann gilt:*

1. *Nebeneinanderstehende gleiche Quantoren darf man vertauschen, dh.*

$$\forall x \in G_1\, \forall y \in G_2 : \mathcal{A}(x,y) \iff \forall y \in G_2\, \forall x \in G_1 : \mathcal{A}(x,y)$$

und

$$\exists x \in G_1\, \exists y \in G_2 : \mathcal{A}(x,y) \iff \exists y \in G_2\, \exists x \in G_1 : \mathcal{A}(x,y).$$

2. *Bei unterschiedlichen Quantoren darf man das (in der Regel) nicht.*

Beispiel 21.15 (zu 2.)**.** Es sei G_1 die Menge aller Hunde und G_2 die Menge aller Beine. Weiter sei $\mathcal{A}(x,y)$ die Aussage "Bein y gehört zu Hund x". Dann ist sicher der folgende Satz wahr:

$\forall x \in G_1\, \exists y \in G_2 : \mathcal{A}(x,y)$ also "Für alle Hunde existiert ein Bein, so dass das Bein dem Hund gehört."

Aber sicher nicht dieser:

$\exists y \in G_2\, \forall x \in G_1 : \mathcal{A}(x,y)$ also "Es gibt ein Bein, so dass dieses Bein allen Hunden gehört."

22 Beweisführung

Definition 22.1 (Folgerung))**.** Sind $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussageformen über der Grundmenge G, so ist die FOLGERUNG wie folgt definiert:

$$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \text{ genau dann, wenn } \forall x \in G : \mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}(x)$$

Das heißt: $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, wenn die Subjunktion $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ allgemeingültig ist.

Definition 22.2 (Äquivalenzumformung)**.** Zwei Aussageformen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ über der Grundmenge G heißen ÄQUIVALENT, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}$.

Wir wiederholen und erweitern an dieser Stelle den Satz 21.8.

Satz 22.3.

1. *$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ genau dann, wenn $\mathscr{L}(\mathcal{A}) \subset \mathscr{L}(\mathcal{B})$.*
2. *$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ genau dann, wenn $\mathscr{L}(\mathcal{A}) = \mathscr{L}(\mathcal{B})$.*

Regel 22.4 (Aussagen mit einem Existenzquantor)**.** *Eine Existenzaussage $\exists x \in G : \mathcal{A}(x)$ kann man beweisen, indem man ein konkretes $x \in G$ angibt, so dass $\mathcal{A}(x)$ wahr ist.*

Der Beweis beginnt dann üblicherweise so: "Wähle $x =$..."

Beispiel 22.5 (zu Regel 22.4)**.** Es sei $f(x) = \sin(x)$. Dann gibt es ein $x \in [-2\pi, 2\pi]$, so dass $f(x) = 0$.

Regel 22.6 (Aussagen mit einem Allquantor)**.** *Eine Allaussage $\forall x \in G : \mathcal{A}(x)$ kann man beweisen, indem für einen Wert x, von dem man nichts weiter annimmt, als dass er aus G stammt, nachweist, dass $\mathcal{A}(x)$ wahr ist.*

Der Beweis beginnt dann üblicherweise so: "Sei $x \in G$ beliebig ..."

Beispiel 22.7 (zu Regel 22.6)**.** Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $x^4 + 2x^2 + 1 \geq x$.

Regel 22.8 (Folgerungen und Äquivalenzen)**.**

1. *Ist eine Aussage $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ zu zeigen, so kann der Beweis wegen Satz 22.3 wie folgt verlaufen:*

   Sei $x \in \mathscr{L}(\mathcal{A})$ beliebig. Weise nun die Gültigkeit von $\mathcal{B}(x)$ nach.

2. *Die Aussage $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ kann man beweisen, indem man 1. in beide Richtung durchführt.*

Beispiel 22.9 (zu Regel 22.8)**.**

(zu 1.) Aus $x > 1$ folgt $x^4 + 2x > 1$

(zu 2.) $|x| > 1$ ist äquivalent zu $x^4 + 2x^2 > 3$.

Regel 22.10 (Allaussagen mit zwei Quantoren)**.** *Den Beweis von $\forall x \in G_1 \, \exists y \in G_2 : \mathcal{A}(x, y)$ kann man wie folgt aufbauen:*

Es sei $x \in G_1$ beliebig. Dann finde ein $y \in G_2$ (das von x abhängen darf), so dass $\mathcal{A}(x, y)$ wahr ist.

Beispiel 22.11 (zu Regel 22.10)**.**

- Für alle Zahlen gibt es noch eine größere, dh. $\forall x \in \mathbb{R} \, \exists y \in \mathbb{R} : y > x$
- Zu allen zwei positiven Zahlen, gibt es eine weiter positive Zahl, die kleiner ist als beide. Dh. $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \, \exists z \in \mathbb{R}^+ : z < x \ \wedge \ z < y$

Regel 22.12 (Existenzaussagen mit zwei Quantoren)**.** *Den Beweis von $\exists x \in G_1 \, \forall y \in G_2 : \mathcal{A}(x, y)$ kann man wie folgt aufbauen:*

Gib ein konkretes $x \in G_1$ an, so dass $\mathcal{A}(x, y)$ für alle $y \in G_2$ wahr ist.

Beispiel 22.13 (zu Regel 22.12)**.** $\exists x \in \mathbb{R} \, \forall y \in \mathbb{R}^{>1} : y \sin x < -1$.

Beispiel 22.14 (zu Regeln 22.10 und 22.12)**.** Die Folge $(\frac{1}{n^2})$ ist eine Nullfolge. Das heißt: $\forall \epsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : \frac{1}{n^2} < \epsilon$.

Regel 22.15 (Indirekter Beweis)**.** *Will man $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ beweisen, so kann man stattdessen $\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$ zeigen. Diese beiden Aussagen sind äquivalent.*

Beispiel 22.16 (zu Regel 22.15)**.** Gilt für eine Funktion $f'(x_0) \neq 0$, so hat f in x_0 kein Extremum. Wir zeigen stattdessen: Hat f in x_0 ein Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Regel 22.17 (Widerlegen von Aussagen)**.** *Soll eine Aussage A widerlegt werden, so kann man diese zunächst negieren, und dann zeigen, dass $\neg A$ allgemeingültig ist.*

Das ist insbesondere oft bei Aussagen, die Quantoren beinhalten anwendbar.

Beispiel 22.18 (zu Regel 22.17)**.** Behauptet wird: $\forall x < -2 : x^2 < 5$ ist falsch. Gezeigt wird stattdessen $\exists x < -2 : x^2 \geq 5$ mit Hilfe von 22.4.

Regel 22.19 (Widerspruchsbeweise)**.** *1. Will man zeigen, dass eine Aussage A wahr ist, so kann man stattdessen zeigen, dass $\neg A \to \mathbb{F}$ wahr ist. Diese Aussagen sind äquivalent.*

Angewendet wird die oft in folgender Form:

2. Statt der Aussage $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ beweist man die Aussage $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B} \Rightarrow \mathbb{F}$.

Beispiel 22.20 (zu Regel 22.19)**.**

(zu 1.) $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.

(zu 2.) Es sei $f(x) = x^2 - 1$. Statt $f(x) > 0 \Rightarrow |x| > 1$ zeige, dass $f(x) > 0 \wedge |x| \leq 1$ zu einem Widerspruch führt.