EDUARD-SPRANGER-BERUFSKOLLEG

Berufskolleg und Berufliches Gymnasium der Stadt Hamm
für Technik, Informatik und Gestaltung

Fachkonferenz Mathematik/Naturwissenschaften

Von der Teilbarkeit zum RSA-Verfahren

Grundlagen der Zahlentheorie

EDUARD-SPRANGER-BERUFSKOLLEG

Berufskolleg und Berufliches Gymnasium der Stadt Hamm
für Technik, Informatik und Gestaltung

Fachkonferenz Mathematik/Naturwissenschaften

Von der Teilbarkeit zum RSA-Verfahren

Grundlagen der Zahlentheorie

Version: 12. Juni 2024

Mitwirkende:

Dr. Frank Klinker [*,1]

Dr. Lothar Mischke [1]

Willy Pöttker [2]

[1] Eduard-Spranger-Berufskolleg
Vorheider Weg 8, 59067 Hamm

[2] Freies Evangelisches Limbacher Schulzentrum
Marktstr. 11, 09212 Limbach-Oberfrohna

[*] Korrespondenzautor

Inhaltsverzeichnis

1 Teilbarkeit, Teiler, Primzahlen und Teilen mit Rest

1.1 Teilbarkeit und Teiler

Sind a und b zwei positive natürliche Zahlen, dann gilt

$$a \textbf{ ist Teiler von } b \iff \text{Es gibt eine natürliche Zahl } k, \text{ sodass } b = k \cdot a$$

Statt a **ist Teiler von** b sagt man auch b **wird von** a **geteilt** oder a **teilt** b und schreibt $a|b$.

Beispiel 1.1. 3 teilt 102, denn $102 = 34 \cdot 3$. Deswegen teilt auch 34 die Zahl 102.

Fakt 1.2.

1. Ist a ein Teiler von b, dann ist $a \leq b$.
2. Ist a ein Teiler von b, dann gibt es einen weiteren Teiler a' von b mit $a \cdot a' = b$, sodass Teiler immer in "Paaren" vorkommen. Ist keiner der beiden Teiler die Zahl 1, dann sind beide $\leq \frac{b}{2}$.
3. Ist a ein Teiler von b und b ein Teiler von a, dann ist $a = b$.
4. Ist a ein Teiler von b, dann ist a auch Teiler von jedem Produkt $b \cdot c$.
5. Die Umkehrung von 4. ist im Allgemeinen falsch, wie man an folgendem Beispiel sieht:

   12 teilt zwar $40 \cdot 30 = 1200$, aber 12 teilt weder 40 noch 30.

   Die Umkehrung von 4. kann aber richtig sein, wie das folgende Beispiel zeigt:

   12 teilt $24 \cdot 50 = 1200$, und 12 teilt den Faktor 24.

   Ob die Umkehrung gilt, hängt also stark von der Zerlegung von 1200 in ein Produkt ab.

   Wir werden später eine Situation kennenlernen, wo die Umkehrung unabhängig von der Zerlegung gilt (siehe Folgerung 2.4).
6. Ist a kein Teiler von $b \cdot c$, dann teilt a weder b noch c.

Fakt 1.3.

1. Jede Zahl hat mindestens zwei Teiler, nämlich 1 und sich selbst.
2. Eine Zahl kann viele oder wenig Teiler haben:

   - 60 hat viele Teiler: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 und 60
   - 65 hat wenig Teiler: 1, 5, 13, 65
   - 71 hat nur zwei Teiler: 1, 71

1.2 Primzahlen

Die Zahlen mit der minimalen Anzahl an Teilern werden eine wichtige Rolle spielen:

Definition 1.4. Eine Zahl p, die nur die zwei Teiler 1 und p hat, heißt **Primzahl**

Fakt 1.5.

- 1 ist keine Primzahl, da sie keine zwei Teiler hat.
- 2 ist die kleinste Primzahl.
- Außer 2 sind alle Primzahlen ungerade.
- Die Primzahlen zwischen 1 und 100 sind:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,$$
$$43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97$$

- Der **Sieb des Eratosthenes** ist ein Verfahren, wie man die Primzahlen herausfiltern kann, die kleiner als eine vorgegebene Zahl sind: Wikipedia: Der Sieb des Eratosthenes.

Man kann die Teiler einer Zahl a der Größe sortieren und wir haben:

Fakt 1.6. Der kleinste Teiler $\neq 1$ einer Zahl ist eine Primzahl.

Dass Fakt 1.6 wahr ist, sieht man wie folgt:

- Wir nehmen einmal an, dass a der kleinste Teiler einer vorgegebenen Zahl b ist. Weiter nehmen wir an, dass a keine Primzahl ist. Dann ließe a sich selbst in ein Produkt von zwei Zahlen zerlegen, die nicht 1 sind.
- Jeder dieser beiden Faktoren wäre dann selbst ein Teiler von b. Beide wären außerdem kleiner als der Teiler a mit dem wir gestartet sind.
- Da a aber selbst der kleinste Teiler von b gewesen sein sollte, kann es die Zerlegung von a nicht geben. Damit ist der kleinste Teiler a von b tatsächlich eine Primzahl.

1.3 Teilen mit Rest

Auch wenn eine Zahl kein Teiler einer anderen ist, dann gibt es eine sehr natürliche Zerlegung:

Fakt 1.7 (Teilbarkeit mit Rest). Ist $0 < a \leq b$, dann gibt es Zahlen k, r mit $k \geq 0$ und $0 \leq r < b - 1$, sodass

$$b = k \cdot a + r$$

Die Zahl r heißt **Rest von b beim Teilen durch a**. Der Rest r ist genau dann Null, wenn a ein Teiler von b ist.

Bemerkung 1.8.
- Praktisch erhalten wir den Rest r, indem wir die Zahl a so lange von b abziehen, bis wir eine Zahl zwischen Null und b erreichen.
- Mit dem Taschenrechner berechnen wir $b : a$ und nehmen vom Ergebnis nur den Teil vor dem Komma. Das ist dann k in der Zerlegung und r ist dann $b - k \cdot a$.

Folgerung 1.9. Es gibt unendlich viele Primzahlen.

1.4 Aufgaben zu Abschnitt 1

Aufgabe 1.10. Bestimmen Sie alle Teiler der folgenden Zahlen:

a)	36	b)	120	c)	98	d)	123
e)	99	f)	111	g)	1422	h)	299
i)	155	j)	657	k)	245	l)	63

Aufgabe 1.11. a) Markieren Sie bei den Teilern der Zahlen in Aufgabe 1.10 a)-l) jeweils die Primzahlen.

b) Erläutern Sie, was Ihnen auffällt, wenn Sie die Teilermenge einer Zahl mit Blick auf die darin vorkommenden Primzahlen betrachten.

Aufgabe 1.12. Führen Sie das Teilen mit Rest für die folgenden Zahlenpaare durch:

a)	(120, 36)	b)	(450, 38)
c)	(4350, 98)	d)	(1253, 123)

2 Der ggT und die Primfaktorzerlegung

2.1 Der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen

Man kann die Teiler zweier Zahlen a und b vergleichen und untersuchen, ob es gemeinsame Teiler gibt. Diese gemeinsamen Teiler kann man dann der Größe nach sortieren und bekommt so den größten gemeinsamen Teiler von a und b. Diesen bezeichnet man mit

$$\mathrm{ggT}(a,b) = \textbf{größter gemeinsamer Teiler} \text{ von } a \text{ und } b$$

Zwei Zahlen a und b heißen **teilerfremd**, wenn sie nur 1 als gemeinsamen Teiler haben. Das ist dann auch gleichzeitig ihr größter gemeinsamer Teiler, also:

$$a \text{ und } b \text{ sind } \textbf{teilerfremd} \iff \mathrm{ggT}(a,b) = 1$$

Fakt 2.1. 1. Ist p eine Primzahl, welche die Zahl b nicht teilt, dann gilt $\mathrm{ggT}(p,b) = 1$.

2. Die Aussage in Punkt 1. ist so nicht unbedingt korrekt, wenn p keine Primzahl ist: 4 teilt zwar 10 nicht, aber $\mathrm{ggT}(4,10) = 2$ ist trotzdem nicht 1.
3. Ist $\mathrm{ggT}(a,b) = g$, dann ist $\mathrm{ggT}\left(\frac{a}{g}, \frac{b}{g}\right) = 1$

Man kann den ggT zweier Zahlen a und b auch rechnerisch bestimmen und erhält dann eine eindeutige Darstellung von $\mathrm{ggT}(a,b)$ durch die Zahlen a und b:

Fakt 2.2. Sind a und b ganze Zahlen, dann gibt es ganze Zahlen k und ℓ, sodass

$$k \cdot a + \ell \cdot b = \mathrm{ggT}(a,b)\,.$$

2.2 Eigenschaften von Primzahlen und die Primfaktorzerlegung

Die folgenden Aussagen im Zusammenhang mit Primzahlen sind sehr natürlich aber auch sehr nützlich:

Fakt 2.3. Ist p eine Primzahl und a eine natürliche Zahl mit $\mathrm{ggT}(a,p) = 1$, dann sind nur die Vielfachen

$$a \cdot p, \quad a \cdot 2 \cdot p, \quad a \cdot 3 \cdot p, \quad \ldots$$

durch p teilbar.

Diese Tatsache gibt uns die Möglichkeit, die Teilbarkeitseigenschaft von Produkten auch umzukehren:

Folgerung 2.4. Ist p eine Primzahl, dann gilt:

Ist p ein Teiler von $a \cdot b$, dann ist p Teiler von a oder Teiler von b

Die Primzahlen und ihre Eigenschaften ermöglichen uns nun, jede Zahl in "minimale" Faktoren zu zerlegen

Fakt 2.5 (Primfaktorzerlegung). Ist a eine natürliche Zahl, dann gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$$

in ein Produkt von n Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Diese müssen nicht unterschiedlich sein.

Beispiel 2.6. $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, $184 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 23$, $1002 = 2 \cdot 3 \cdot 167$, $32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

Folgerung 2.7. Ist die Primfaktorzerlegung einer Zahl bekannt, dann erhalten wir alle Teiler der Zahl, indem wir die Primzahlen geeignet zu Produkten kombinieren.

2.3 Aufgaben zu Abschnitt 2

Aufgabe 2.8. a) Erläutern Sie mit Hilfe einer Liste der Primzahlen, wie man mit elementaren Rechnungen die Primfaktorzerlegung einer Zahl erhalten kann.

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) die Primfaktorzerlegung der folgenden Zahlen:

i)	36	ii)	120	iii)	111	iv)	580
v)	99	vi)	114	vii)	1420	viii)	180

Aufgabe 2.9. a) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe der Primfaktorzerlegung einer Zahl ihre sämtlichen Teiler erhalten kann.

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) die Teiler der Zahlen aus Aufgabe 2.8 b).

3 Der euklidische Algorithmus

Den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen zu bestimmen, indem zunächst für beide Zahlen alle Teiler bestimmt und dann den größten heraussucht, ist keine sonderlich effiziente Methode. Wünschenswert wäre eine Methode, mit der man den ggT berechnen kann.
Das kann man mit Hilfe des euklidischen Algorithmus, denn dieser erlaubt uns:

1. den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a, b)$ zweier positiver, ganzen Zahlen a, b zu berechnen und
2. die Zahlen k und ℓ in der Zerlegung $\mathrm{ggT}(a, b) = k \cdot a + \ell \cdot b$ berechnen.

Im Punkt 2. spricht man auch vom erweiterten euklidischen Algorithmus.

3.1 Die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers

Algorithmus 3.1 (Euklidischen Algorithmus).

$$
\begin{aligned}
&\text{Schritt } 1: && b = k_1 \cdot a + r_1 \\
&\text{Schritt } 2: && a = k_2 \cdot r_1 + r_2 \\
&\text{Schritt } 3: && r_1 = k_3 \cdot r_2 + r_3 \\
& && \vdots \\
&\text{Schritt } i: && r_{i-2} = k_i \cdot r_{i-1} + r_i \\
& && \vdots \\
&\text{Schritt } m-1: && r_{m-3} = k_{m-1} \cdot r_{m-2} + r_{m-1} \\
&\text{Schritt } m: && r_{m-2} = k_m \cdot r_{m-1} + \boxed{r_m} \\
&\text{Schritt } m+1: && r_{m-1} = k_{m+1} \cdot r_m
\end{aligned}
$$

- Schritt 1: Wir stellen b als Vielfaches von a mit Rest dar: Rest ist r_1
- Schritt 2: Wir stellen a als Vielfaches von r_1 mit Rest dar: Rest ist r_2
- Schritt 3: Wir stellen r_1 als Vielfaches von r_2 mit Rest dar: Rest ist r_3

- Wir wiederholen dies so lange, bis es keinen Rest mehr gibt (das klappt, da in jedem Schritt der positive Rest kleiner wird)
- Im vorletzten m-ten Schritt haben wir dann als Rest $r_m = \mathrm{ggT}(a, b)$ stehen

3.2 Der erweiterte euklidische Algorithmus

Neben dem Wert $\mathrm{ggT}(a, b)$ liefert der euklidische Algorithmus auch die oben beschriebene Zerlegung dieser Zahl:
Sind a und b ganze Zahlen, dann gibt es ganze Zahlen k und ℓ, sodass

$$\mathrm{ggT}(a, b) = k \cdot a + \ell \cdot b\,.$$

Algorithmus 3.2 (Erweiterter euklidischer Algorithmus).
Um die Zerlegung $\mathrm{ggT}(a, b) = k \cdot a + \ell \cdot b$ zu erhalten, nehmen wir uns die Rechnung aus dem euklidischen Algorithmus her und gehen wie folgt vor:

- Wir lösen Schritt 1 des Algorithmus nach dem Rest r_1 auf
- Wir lösen Schritt 2 nach r_2 auf und ersetzen dort r_1 durch das vorige Ergebnis.
- Wir lösen Schritt 3 nach r_3 auf und ersetzen dort r_1 und r_2 durch die zwei vorigen Ergebnisse.
- Wir lösen Schritt 4 nach r_4 auf und ersetzen dort r_2 und r_3 durch die zwei vorigen Ergebnisse.
- Diesen letzten Punkt wiederholen wir nun für Schritt 5 bis Schritt m.

Beispiel 3.3. Wir führen den erweiterten euklidischen Algorithmus für die Zahlen $a = 158$ und $b = 288$ durch.
Dabei finden wir links die Berechnung von $\mathrm{ggT}(a, b)$ und rechts die Berechnung der Zerlegung $\mathrm{ggT}(a, b) = k \cdot a + \ell \cdot b$:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{288} = 1 \cdot \underline{158} + \underline{130} & \underline{130} = 1 \cdot \underline{288} - 1 \cdot \underline{158} \\
\underline{158} = 1 \cdot \underline{130} + \underline{28} & \underline{28} = \underline{158} - 1 \cdot \underline{130} \\
 & \quad = \underline{158} - 1 \cdot (1 \cdot \underline{288} - 1 \cdot \underline{158}) \\
 & \quad = 2 \cdot \underline{158} - 1 \cdot \underline{288} \\
\underline{130} = 4 \cdot \underline{28} + \underline{18} & \underline{18} = \underline{130} - 4 \cdot \underline{28} \\
 & \quad = (1 \cdot \underline{288} - 1 \cdot \underline{158}) - 4 \cdot (2 \cdot \underline{158} - 1 \cdot \underline{288}) \\
 & \quad = 5 \cdot \underline{288} - 9 \cdot \underline{158} \\
\underline{28} = 1 \cdot \underline{18} + \underline{10} & \underline{10} = \underline{28} - 1 \cdot \underline{18} \\
 & \quad = (2 \cdot \underline{158} - 1 \cdot \underline{288}) - 1 \cdot (5 \cdot \underline{288} - 9 \cdot \underline{158}) \\
 & \quad = 11 \cdot \underline{158} - 6 \cdot \underline{288} \\
\underline{18} = 1 \cdot \underline{10} + \underline{8} & \underline{8} = \underline{18} - 1 \cdot \underline{10} \\
 & \quad = (5 \cdot \underline{288} - 9 \cdot \underline{158}) - 1 \cdot (11 \cdot \underline{158} - 6 \cdot \underline{288}) \\
 & \quad = 11 \cdot \underline{288} - 20 \cdot \underline{158} \\
\underline{10} = 1 \cdot \underline{8} + \boxed{2} & \boxed{2} = \underline{10} - 1 \cdot \underline{8} \\
 & \quad = (11 \cdot \underline{158} - 6 \cdot \underline{288}) - 1 \cdot (11 \cdot \underline{288} - 20 \cdot \underline{158}) \\
 & \quad = 31 \cdot \underline{158} - 17 \cdot \underline{288} \\
\underline{8} = 4 \cdot \underline{2} &
\end{array}
$$

Wir haben damit schließlich

$$\mathrm{ggT}(288, 158) = 2 \quad \text{und} \quad 2 = 31 \cdot 158 - 17 \cdot 288\,.$$

3.3 Aufgaben zu Abschnitt 3

Aufgabe 3.4. a) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe der Primfaktorzerlegungen zweier Zahlen ihren größten gemeinsamen Teiler bestimmen kann.

b) Berechnen Sie mit dem Ergebnis aus a) die ggT aller Paare, die sich aus den folgenden Zahlen bilden lassen:

$$36,\ 12,\ 111,\ 580,\ 99,\ 114,\ 1420,\ 180\,.$$

Aufgabe 3.5. Berechnen Sie mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus

1) den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen a und b, sowie

2) die ganzen Zahlen k und ℓ der Zerlegung $\operatorname{ggT}(a,b) = k \cdot a + \ell \cdot b$

für die folgenden Zahlenpaare:

a) $a = 580,\ b = 38$ b) $a = 5040,\ b = 582$

c) $a = 28,\ b = 744$ d) $a = 215,\ b = 64$

e) $a = 225,\ b = 85$ f) $a = 1521,\ b = 99$

4 Algebraische Grundlagen

In diesem Abschnitt beschreiben wir einige algebraische Strukturen, die wir beim Umgang mit Zahlen –genauer: beim Rechnen mit Zahlen– bereits kennengelernt haben.
Da diese Strukturen auch in allgemeineren Situationen auftreten können, wollen wir sie uns etwas genauer ansehen.
Wir werden jeweils zunächst eine allgemeine Beschreibung angeben und direkt im Anschluss die bekannten Beispiele dazu aufführen.

Bezeichnung 4.1. Eine **Verknüpfung auf einer Menge** ist eine Operation, die zwei Elementen aus der Menge ein neues Element der Menge zuordnet.

Beispiel 4.2.
1. Zum Beispiel sind Addition und Multiplikation Verknüpfungen auf der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$.
2. Genauso sind + und $\cdot$ auch Verknüpfungen auf den anderen bekannten Zahlenmengen: den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
3. Das Teilen : ist eine Verknüpfung auf der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und auf der Menge reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
4. Das Teilen ist keine Verknüpfung auf $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Da das Ergebnis einer Verknüpfung auf einer Menge immer in der Menge enthalten sein muss, spricht man auch davon, die Verknüpfung sei **abgeschlossen**.

4.1 Gruppen

Definition 4.3. Eine **Gruppe** $(G, \circ)$ ist eine Menge G mit einer Verknüpfung $\circ$ mit den folgenden Eigenschaften 1.-3.:

1.	$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle a, b, c in G	**Assoziativgesetz** oder **Verbindungsgesetz**
2.	Es gibt in G ein Element n, sodass $n \circ a = a \circ n = a$ für alle a in G	Existenz eines **neutralen Elements**
3.	Zu jedem Element a in G gibt es ein Element a' in G, sodass $a \circ a' = a' \circ a = n$	Existenz von **inversen Elementen**

Gilt zusätzlich noch die Eigenschaft 4., dann heißt $(G, \circ)$ eine **kommutative Gruppe**:

4. $a \circ b = b \circ a$ für alle a, b in G — **Kommutativgesetz** oder **Vertauschungsgesetz**

Beispiel 4.4.

1. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Addition + bilden eine kommutative Gruppe. Das neutrale Element ist die Null und das Inverse Element zu einer Zahl a ist die Zahl $-a$.
2. Auf die gleiche Art bilden die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ jeweils mit der Addition + eine kommutative Gruppe.
3. Die rationalen Zahlen ohne Null $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ bilden mit der Multiplikation $\cdot$ eine kommutative Gruppe. Das neutrale Element ist die Eins und zur Zahl q ist die Zahl $\frac{1}{q}$ das inverse Element.
4. Auf die gleiche Art bilden die reellen Zahlen ohne Null $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit der Multiplikation $\cdot$ eine kommutative Gruppe.
5. Die Menge aller Vektoren mit der Addition ist eine kommutative Gruppe. Das neutrale Element ist der Nullvektor und das inverse Element zu $\vec{v}$ ist $-\vec{v}$.
6. Alle Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die eine Umkehrfunktion besitzen, bilden mit der Hintereinanderausführung eine (nicht kommutative) Gruppe. Das neutrale Element ist die identische Abbildung, die jede Zahl auf sich selbst abbildet. Das inverse Element zu $f(x)$ ist ihre Umkehrabbildung $f^{-1}(x)$.
7. In der Ebene bilden die Drehungen um den Ursprung eine kommutative Gruppe. Die Verknüpfung ist dabei die Hintereinanderausführung zweier Drehungen, das neutrale Element ist die Drehung um den Winkel $0°$ und das Inverse einer Drehung ist die Drehung in umgekehrter Richtung mit gleichem Winkel.

Definition 4.5. Ein **Ring** $(R, +, \cdot)$ ist eine Menge R mit zwei Verknüpfung $+$ und $\cdot$ mit den folgenden Eigenschaften 1.-3.:

1.	$(R, +)$ ist kommutative Gruppe	Das neutrale Element n bzgl. $+$ heißt **Nullelement**
2.	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle a, b, c in R	Assoziativgesetz für $\cdot$
3.	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ für alle a, b, c in R	**Distributivgesetz** oder **Verteilungsgesetz**

Gilt in einem Ring zusätzlich noch die Eigenschaft 4., dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein **kommutativer Ring**:

4.	$a \cdot b = b \cdot a$ für alle a, b in R	Kommutativgesetz für $\cdot$

Gilt in einem Ring zusätzlich noch die Eigenschaft 5., dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein **Ring mit Eins**:

5.	Es gibt in R ein Element e, sodass $e \cdot a = a \cdot e = a$ für alle a in R	Das neutrale Element e bzgl. $\cdot$ heißt **Einselement**

Gilt in einem Ring zusätzlich noch die Eigenschaft 6., dann heißt $(R, +, \cdot)$ ein **nullteilerfreier Ring**:

6. Sind a und b ungleich dem Nullelement, dann ist auch $a \cdot b$ nicht das Nullelement

Fakt 4.6. Für einen kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ besteht die Menge R^* aus allen Elementen, die bezüglich $\cdot$ invertierbar sind.
R^* ist zusammen mit $\cdot$ eine kommutative Gruppe.

Beispiel 4.7. 1. Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ mit der Addition $+$ und der Multiplikation $\cdot$ bilden einen kommutativen Ring mit Eins. Das Nullelement ist die Null und das Einselement ist die Eins.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist nullteilerfrei, denn in $a \cdot b = 0$ muss immer $a = 0$ oder $b = 0$ sein.

In $\mathbb{Z}$ sind nur die Zahlen ± 1 bezüglich der Multiplikation invertierbar. Damit besteht die Gruppe $(\mathbb{Z}^*, \cdot)$ nur aus diesen beiden Elementen.

2. Genauso sind auch $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ nullteilerfreie, kommutative Ringe mit Eins.

   In $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ sind alle Zahlen außer der Null invertierbar bezüglich $\cdot$. Damit ist $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ und $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

3. Die Menge aller geraden ganzen Zahlen mit Addition und Multiplikation bildet einen kommutativen Ring. Er ist nullteilerfrei, besitzt aber keine Eins.

4.3 Körper

Definition 4.8. Ein **Körper** $(K, +, \cdot)$ ist eine Menge K mit zwei Verknüpfung $+$ und $\cdot$ mit den folgenden Eigenschaften 1.-3.:

1. $(K, +)$ ist kommutative Gruppe mit Nullelement 0
2. $(K\setminus\{0\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe mit Einselement 1
3. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle a, b, c in R (Distributivgesetz)

Fakt 4.9.
- Jeder Körper ist ein kommutativer Ring mit Eins, in welchem jedes Element außer das Nullelement invertierbar ist.
- Jeder Körper ist nullteilerfrei.

Beispiel 4.10.
1. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$ bilden einen Körper mit Nullelement 0 und Einselement 1.
2. Genauso bilden auch die reellen Zahlen $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ einen Körper.
3. Wir bezeichnen die Menge der Paare (a, b) reeller Zahlen als $\mathbb{R}^2$ und wir verknüpfen zwei Paare mit $\oplus$ und $\odot$:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \odot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

   Dann ist $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ ein Körper (**komplexe Zahlen**):
   - Das Nullelement ist $(0, 0)$

- Das Einselement ist $(1, 0)$
- Zu (a, b) ist $(-a, -b)$ das inverse Element bezüglich $\oplus$
- Zu $(a, b) \neq (0, 0)$ ist $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ das inverse Element bezüglich $\odot$

4.4 Aufgaben zu Abschnitt 4

Aufgabe 4.11. Führen Sie die Details zu den Beispielen in diesem Abschnitt durch.

Aufgabe 4.12. Überprüfen Sie, ob es sich bei den folgenden Operationen $\circ$ jeweils um Vernüpfungen auf den angegebenen Mengen handelt, d. h. ob sie abgeschlossen sind:

a) $a \circ b = a^2 - b$ auf $\mathbb{N}$

b) $a \circ b = a^2 - b$ auf $\mathbb{Z}$

c) $a \circ b = a^2 \cdot b^2$ auf $\mathbb{Q}$

d) $a \circ b = a \cdot b + a + b$ auf $\mathbb{N}$

e) $a \circ b = a^2 + b^2$ auf $\mathbb{N}$

f) $a \circ b = a^2 - b^2$ auf $\mathbb{R}$

Aufgabe 4.13. a) Untersuchen Sie die Verknüpfung aus Aufgabe 4.12 d) auf Kommutativität und Assoziativität.

b) Begründen Sie, warum 0 das neutrale Element der Verknüpfung aus Aufgabe 4.12 d) ist.

c) Begründen Sie, warum es zu keinem Element aus 0 ein inverses Element gibt.

Aufgabe 4.14. a) Zeigen Sie durch eine allgemeine Rechnung, dass die Verknüpfung aus Aufgabe 4.12 f) die Eigenschaft $a \circ b = -b \circ a$ besitzt.

b) Untersuchen Sie mit Hilfe einer allgemeinen Rechnung, ob die Verknüpfung aus Aufgabe 4.12 f) assoziativ ist.

Aufgabe 4.15. a) Zeigen Sie durch allgemeine Rechnungen, dass die Verknüpfung aus Aufgabe 4.12 c) kommutativ und assoziativ ist.

b) Überprüfen Sie, ob es zur Verknüpfung aus Aufgabe 4.12 c) ein neutrales Element gibt.

5 Der Zahlenraum $\mathbb{Z}_N$

5.1 Die Restklassenmenge $\mathbb{Z}_N$

Teilt man eine ganze Zahl durch eine feste Zahl N, dann hat der Quotient einen Rest der zwischen 0 und $N-1$ liegt.
Ist z. B. $N = 7$, so hat jede Zahle beim Teilen durch 7 den Rest $0, 1, 2, 3, 4, 5$ oder 6.

Definition 5.1. Die Menge der Reste beim Teilen durch N nennen wir die **Restklassenmenge** $\mathbb{Z}_N$. Wir schreiben dafür

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}\,.$$

Beispiel 5.2. Für $N = 7$ haben wir

$$\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\,.$$

5.2 Rechnen in $\mathbb{Z}_N$

Bemerkung 5.3. In der Menge $\mathbb{Z}_N$ können wir addieren, subtrahieren und multiplizieren wie mit ganzen Zahlen.
Wir müssen nach einer Rechnung das Ergebnis lediglich so ”korrigieren”, dass es tatsächlich in der Menge $\mathbb{Z}_N$ liegt. Das heißt, wir berechnen den Rest beim Teilen durch N.
Unsere Schreibweise dafür ist

$$9 \equiv 2 \bmod 7\,, \quad 123 \equiv 21 \bmod 51\,, \quad 859 \equiv 3 \bmod 8\,, \quad -18 \equiv 2 \bmod 5$$

Für die Zahlen $N = 7$ und $N = 10$ wollen wir die Addition und Multiplikation hier beispielhaft durchführen:

Beispiel 5.4 (Addieren in $\mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_{10}$)**.**

$$1 + 5 \equiv 6 \bmod 7 \qquad 6 + 8 \equiv 14 \equiv 4 \bmod 10$$
$$3 + 4 \equiv 7 \equiv 0 \bmod 7 \qquad 7 + 3 \equiv 10 \equiv 0 \bmod 10$$

Für $N = 7$ und $N = 10$ haben wir die folgenden zwei **Additionstabellen**:

$\mathbb{Z}_7$

+	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\mathbb{Z}_{10}$

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1
3	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
4	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3
5	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
6	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
7	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
8	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Beispiel 5.5 (Multiplizieren in $\mathbb{Z}_7$ und $\mathbb{Z}_{10}$)**.** Für die Multiplikation haben wir z. B.

$$1 \cdot 5 \equiv 5 \bmod 7 \qquad 6 \cdot 8 \equiv 48 \equiv 8 \bmod 10$$
$$3 \cdot 4 \equiv 12 \equiv 5 \bmod 7 \qquad 7 \cdot 3 \equiv 21 \equiv 1 \bmod 10$$

Das gibt für $N = 7$ und $N = 10$ die folgenden zwei **Multiplikationstabellen**:[1]

$\mathbb{Z}_7$

·	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
∗1	0	1	2	3	4	5	6
∗2	0	2	4	6	1	3	5
∗3	0	3	6	2	5	1	4
∗4	0	4	1	5	2	6	3
∗5	0	5	3	1	6	4	2
∗6	0	6	5	4	3	2	1

$\mathbb{Z}_{10}$

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
∗1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
∗3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
∗7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
∗9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

[1] Warum man in der Tabelle an manchen Stellen ein ∗ findet, wird ab Bemerkung 6.4 erklärt.

5.3 Aufgaben zu Abschnitt 5

Aufgabe 5.6. a) Berechnen Sie:

i) $3 \cdot 5 \bmod 12$ ii) $14 \cdot (-25) \bmod 4$

iii) $-7 + 19 \bmod 3$ iv) $(-4) + 18 \bmod 6$

v) $8 \cdot (114 + 300) \bmod 3$ vi) $(17 \cdot 9) \cdot 132 \bmod 12$

b) Überprüfen Sie die Rechnungen und korrigieren Sie gegebenenfalls:

i) $14 - 15 \equiv 3 \bmod 4$ ii) $157 \cdot 151 \equiv -5 \bmod 3$

iii) $583^3 \equiv 1 \bmod 4$ iv) $5^{121} \equiv 1 \bmod 6$

Aufgabe 5.7. Berechnen Sie möglichst geschickt unter Ausnutzung der gültigen Rechenregeln:

a) $12 \cdot 27 \bmod 13$ b) $112 \cdot 917856 \bmod 4$

c) $3100 + 201 \bmod 5$ d) $423 + 21 \cdot 313 \bmod 5$

e) $105 \cdot 82 + 213 \cdot 197 \bmod 9$ f) $5^{121} \equiv 5 \bmod 7$

Aufgabe 5.8. a) Stellen Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle für das Rechnen modulo 11 auf.

b) Stellen Sie die Additions- und die Multiplikationstabelle für $\mathbb{Z}_8$ auf.

Aufgabe 5.9. a) Begründen Sie, warum eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.

b) Begründen Sie, warum die "Quersummenregel" auch für den Teiler 9 gilt, aber für keinen anderen Teiler.

c) Formulieren Sie auf der Basis der bisherigen Überlegungen eine alternative Quersummenregel für den Teiler 11.

Aufgabe 5.10. Die 13-stellige Europäische Artikel-Nummer (EAN-13) besteht aus 12 Ziffern, die einen Artikel eindeutig identifizieren. Dazu kommt eine dreizehnte Prüfziffer, an der man erkennen kann, ob die vorigen Ziffern korrekt sind. Diese Nummer wird in der Regel durch einen Strichcode ergänzt.

Grafik: Wikipedia

Grafik: F.K.

Die Ziffern der EAN-13 werden von vorne nach hinten durchnummeriert, wobei P die Prüfziffer bezeichnet: $z_1\ z_2\ z_3\ z_4\ z_5\ z_6\ z_7\ z_8\ z_9\ z_{10}\ z_{11}\ z_{12}\ P$.
Die Prüfziffer ergibt sich aus den ersten zwölf Ziffern wie folgt:

$$(z_1 + z_3 + z_5 + z_7 + z_9 + z_{11}) + 3 \cdot (z_2 + z_4 + z_6 + z_8 + z_{10} + z_{12}) + P \equiv 0 \bmod 10$$

a) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob die Prüfziffer in dem Beispiel aus der Wikipedia korrekt ist.

b) In der zweiten Grafik ist die Prüfziffer abhanden gekommen. Berechnen Sie diese.

Aufgabe 5.11. Eine einfache Art einen Text zu chiffrieren ist die Caesar-Verschlüsselung. Bei ihr erhält man den verschlüsselten Buchstaben im Wesentlichen dadurch, dass man ihn durch einen im Alphabet verschobenen ersetzt. Beschreiben lässt sich das wie folgt:

- Wir ersetzen jeden Buchstaben durch seine Stelle im Alphabet: $A = 1, B = 2, \ldots, Z = 26$
- Der Schlüssel s gibt die Anzahl der Stellen wieder, um die wir verschieben (dabei ist $s > 0$ oder $s < 0$ abhängig davon, ob wir nach rechts oder nach links verschieben).
- Entspricht x dem Buchstaben der Originalnachricht, dann entspricht $y \equiv x + s \bmod 26$ dem Buchstaben der chiffrierten Nachricht.

a) Verschlüsseln Sie den Text *Das Kaninchen versteckt sich in seinem Bau* mit $s = 5$.

b) Erläutern Sie, warum die Gleichung $x \equiv y - s \bmod 26$ geeignet ist, um den verschlüsselten Text zu decodieren?

c) Entschlüsseln Sie den Text, der mit $e = 8$ verschlüsselt wurde: *lmz nckpa eizbmb dwz lmu jic*.

d) Erläutern Sie, warum die Verschlüsselungen mit dem Schlüssel $0 < s < 26$ und $s' = -(26 - s) < 0$ das gleiche Resultat liefern?

e) Dies spezielle Caesar-Verschlüsselung zum Schlüssel $s = 13$ nennt man **ROT13**. Erläutern Sie, was das Besondere an dieser Verschlüsselung ist?

Aufgabe 5.12. Das achtstellige Geburtsdatum $z_1\ z_2\ .\ z_3\ z_4\ .\ z_5\ z_6\ z_7\ z_8$ einer Person wird innerhalb einer Behörde verschlüsselt weitergeleitet. Dazu wird jede Ziffer des Datums mit Hilfe der Formel

$$y_i \equiv 3 \cdot z_i \bmod 10$$

codiert.

a) Codieren Sie das Datum 17.03.1984.

b) Begründen Sie im Detail, warum $z_i \equiv 7 \cdot y_i \bmod 10$ die Formel zum Entschlüsseln der Daten ist.

c) Entschlüsseln Sie 32023714.

d) Begründen Sie, warum die Formel $y_i = 4 \cdot z_i \bmod 10$ nicht zum Verschlüsseln geeignet ist.

e) Erläutern Sie, welche Eigenschaft die Zahl a mindestens besitzen muss, damit $y_i = a \cdot z_i \bmod 10$ zum Verschlüsseln verwendet werden kann.

6 Teilerfremdheit und die Eulersche φ-Funktion

6.1 Teilerfremdheit und Ergänzungen zu den Restklassenmengen

Um die Multiplikationstabellen weiter untersuchen zu können, wiederholen wir:

Definition 6.1. Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a, b \neq 0$ heißen **teilerfremd**, wenn sie als gemeinsamen Teiler lediglich die 1 haben. Wir schreiben dafür

$$\mathrm{ggT}(a, b) = 1$$

und sagen auch **der größte gemeinsame Teiler** ist 1.

Beispiel 6.2.
- Die Zahlen 10 und 4 sind nicht teilerfremd, denn sie haben neben 1 noch den gemeinsamen Teiler 2, sodass $\mathrm{ggT}(4, 10) = 2$.
- Die Zahlen 10 und 9 sind teilerfremd, denn es ist $\mathrm{ggT}(9, 10) = 1$.
- Die Zahl 7 ist teilerfremd zu jeder Zahl außer zu ihren Vielfachen. Das gilt nicht nur für die 7, sondern für jede Primzahl p:

$$\mathrm{ggT}(p, a) = 1, \quad \text{für } a \neq kp,\ k \in \mathbb{Z}$$

Bemerkung 6.3. Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren macht in $\mathbb{Z}_N$ keine großen Probleme. Größere Probleme gibt es da beim Dividieren. Das sollte uns nicht wundern, denn das klappt ja schon nicht in $\mathbb{Z}$.
Allerdings sehen wir in z. B. $\mathbb{Z}_{10}$ das folgende Phänomen: Es gelten die Gleichungen

$$5 \cdot 3 \equiv 5 \cdot 17 \bmod 10 \qquad \text{und} \qquad 7 \cdot 3 = 7 \cdot 13 \bmod 10\,.$$

Hier kann man in der rechten Gleichung die 7 kürzen aber in der linken Gleichung darf man die 5 nicht kürzen.
Der Unterschied besteht darin, dass $\mathrm{ggT}(7, 10) = 1$ (dann durften wir kürzen), aber $\mathrm{ggT}(5, 20) \neq 1$ (dann durften wir nicht kürzen). Das können wir so zusammenfassen:

1. Ist $m \cdot a \equiv m \cdot b \bmod N$ und $\mathrm{ggT}(m, N) = g$, dann ist $a \equiv b \bmod \frac{N}{g}$

Besonders interessant ist das in dem Fall, wo m und N teilerfremd sind, also $\text{ggT}(m, N) = 1$:

2. Ist $m \cdot a \equiv m \cdot b \bmod N$ und $\text{ggT}(m, N) = 1$, dann ist $a \equiv b \bmod N$

Wir sehen uns die zwei Multiplikationstabellen zu $N = 10$ und $N = 7$ nochmal genauer an:

Bemerkung 6.4.
- In den Multiplikationstabellen ist auffällig, dass in einigen Zeilen und analogen Spalten jede mögliche Zahl auch als Ergebnis vorkommt (das sind die Zeilen mit $*$).
- In $\mathbb{Z}_7$ trifft dies für jede Zeile zu, in $\mathbb{Z}_{10}$ aber nur für die Zeilen zu 1,3,7 und 9.
- In den anderen Zeilen tritt nicht nur nicht jede Zahl auf, sondern es tritt auch die Zahl 0 als Ergebnis einer Multiplikation auf. Das ist ein enormer Unterschied zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, wo das nicht passieren kann.

Fakt 6.5.
1. In der Multiplikationstabelle zu $\mathbb{Z}_N$ kommen in der Zeile zur Zahl a alle Zahlen von 1 bis $N-1$ vor, wenn N und a teilerfremd sind, also wenn $\text{ggT}(N, a) = 1$.
2. In der Multiplikationstabelle zu $\mathbb{Z}_N$ kommen in den Zeilen zur Zahl a nicht alle Zahlen von 1 bis $N-1$ vor, wenn N und a nicht teilerfremd sind, also wenn $\text{ggT}(N, a) = g > 1$.
   Genauer: Es tauchen nur die Reste von Vielfachen von g auf. Insbesondere kommt die 1 nicht vor, aber die 0 kommt mehr als einmal vor.

Die Eigenschaften des modularen Rechnens in $\mathbb{Z}_N$ und Fakt 6.5 lassen sich so zusammenfassen:

Folgerung 6.6.
1. $\mathbb{Z}_N$ ist mit der modularen Addition eine kommutative Gruppe.
2. $\mathbb{Z}_N$ ist mit der modularen Addition und Multiplikation ein kommutativer Ring mit Eins.
3. $\mathbb{Z}_N^*$ enthält alle Elemente aus $\mathbb{Z}_N$, die teilerfremd zu N sind.
4. Sind $a \in \mathbb{Z}_N$ und N nicht teilerfremd, so gibt es eine Zahl $b \in \mathbb{Z}_N$, sodass $a \cdot b = 0 \bmod N$. Das heißt, $\mathbb{Z}_N$ ist nur nullteilerfrei, wenn N eine Primzahl ist.

5. $\mathbb{Z}_N$ ist nur dann ein Körper, wenn N eine Primzahl ist.
6. **Beispiele:** $\mathbb{Z}_{10}$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, der nicht nullteilerfrei ist. $\mathbb{Z}_7$ ist ein Körper.

6.2 Die Eulersche φ-Funktion

Da zu einem vorgegebenen Modus N die hierzu teilerfremden Zahlen eine besondere Rolle spielen, ist es auch interessant, ihre Anzahl zu kennen:

Definition 6.7 (Die Eulersche φ-Funktion).
Für eine positive natürliche Zahl N bezeichnet

$$\varphi(N)$$

die Anzahl der zu N teilerfremden Zahlen in der Menge $\{1, 2, \ldots, N-1\}$. φ heißt die **Eulersche φ-Funktion**.

Beispiel 6.8.

1,2,3,4,5,6 sind teilerfremd zu 7,	$\varphi(7) = 6$
1,3,7,9 sind teilerfremd zu 10	$\varphi(10) = 4$
1,3,5,7 sind teilerfremd zu 8	$\varphi(8) = 4$
1,7,11,13,17,19,23,29 sind teilerfremd zu 30	$\varphi(30) = 8$
1,2,4,7,8,11,13,14 sind teilerfremd zu 15	$\varphi(15) = 8$
1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 77, 79, 83, 89, 91, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 119 sind teilerfremd zu 120	$\varphi(120) = 32$

Bemerkung 6.9. Für eine Primzahl p ist die Berechnung von $\varphi(p)$ recht einfach. Da alle Zahlen $1, 2, \ldots, p-1$ teilerfremd zu p sind, gilt:

Ist p eine Primzahl, dann ist $\varphi(p) = p - 1$

Fakt 6.10 (Multiplikationsregel für die φ-Funktion)**.**

Lässt sich die Zahl N in das Produkt von zwei teilerfremden Zahlen N_1 und N_2 zerlegen, also $N = N_1 \cdot N_2$, dann gilt

$$\varphi(N) = \varphi(N_1) \cdot \varphi(N_2) \,.$$

Beispiel 6.11.

- Es ist $120 = 8 \cdot 15$ und $\mathrm{ggT}(8, 15) = 1$. Weiter ist $\varphi(8) = 4$ und $\varphi(15) = 8$. Damit ist $\varphi(8) \cdot \varphi(15) = 4 \cdot 8 = 32$ und das stimmt mit $\varphi(120) = 32$ überein.
- Anderseits ist aber auch $120 = 4 \cdot 30$ aber mit $\mathrm{ggT}(4, 30) = 2 > 1$. Es ist $\varphi(4) = 2$ und $\varphi(30) = 8$ und deshalb $\varphi(4) \cdot \varphi(30) = 2 \cdot 8 = 16$. Das stimmt nicht mit $\varphi(120) = 32$ überein.

Bemerkung 6.12.

- Die Multiplikationsregel ist leider nur bedingt nützlich, weil es ist in der Regel schwierig ist, eine Zahl in ein Produkt teilerfremder Zahlen zu zerlegen.
- Damit ist auch die Berechnung von $\varphi(N)$ in der Regel kompliziert, insbesondere für große N.

6.3 Aufgaben zu Abschnitt 6

Aufgabe 6.13. Bestimmen Sie $\varphi(N)$, indem Sie die Menge der zur Zahl N jeweils die teilerfremden Zahlen auflisten und diese abzählen:

a) $N = 18$ b) $N = 30$ c) $N = 74$ d) $N = 52$

Aufgabe 6.14. In den folgenden Aufgaben sind $p, p_1, p_2, \ldots, p_n$ unterschiedliche Primzahlen und $r, r_1, r_2, \ldots, r_n$ positive ganze Zahlen.
Begründen Sie folgende Aussagen:

a) Ist $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$, dann ist

$$\varphi(N) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot \ldots \cdot (p_n - 1) \,.$$

c) Ist $N = p^r$, dann ist

$$\varphi(N) = p^{r-1}(p - 1) = N \cdot \left(1 - \tfrac{1}{p}\right) .$$

e) Ist $N = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$, dann ist

$$\varphi(N) = N \cdot \left(1 - \tfrac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \tfrac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \tfrac{1}{p_n}\right).$$

Aufgabe 6.15. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 6.14 berechnen Sie:

a) $\varphi(8)$ b) $\varphi(546)$

c) $\varphi(56)$ d) $\varphi(288)$

e) $\varphi(16200)$ f) $\varphi(391)$

7 Potenzieren in $\mathbb{Z}_N$ und der Satz von Euler

7.1 Potenzieren in $\mathbb{Z}_N$

Das Potenzieren mit natürlichen Zahlen im Restklassenraum $\mathbb{Z}_N$ ist eigentlich kein Problem, denn es ist ja "lediglich" Multiplikationen durchzuführen. Dabei lohnt es sich Potenzgesetze zu verwenden und sich im Wesentlichen auf kleine Potenzen zurückzuziehen:

Beispiel 7.1.

$$\begin{aligned}
2^7 &\equiv 128 \equiv 9 \bmod 17\\
2^7 &\equiv 2^4 \cdot 2^3 \equiv 16 \cdot 8 \equiv (-1) \cdot 8 \equiv -8 \equiv 9 \bmod 17\\
2^{66} &\equiv (2^4)^{16} \cdot 2^2 \equiv (-1)^{16} \cdot 4 \equiv 4 \bmod 17\\
8^{10} &\equiv ((-3)^2)^5 \equiv (9)^5 \equiv (-2)^5 \equiv -32 \equiv 1 \bmod 11\\
8^{21} &\equiv 8 \cdot (((-3)^2)^2)^5 \equiv 8 \cdot ((-2)^2)^5 \equiv 8 \cdot (4)^5 \equiv 8 \cdot 4 \cdot (4^2)^2\\
&\equiv 8 \cdot 4 \cdot 5^2 \equiv 8 \cdot 4 \cdot 3 \equiv 8 \cdot 12 \equiv 8 \cdot 1 \equiv 8 \bmod 11
\end{aligned}$$

Fakt 7.2. Wenn wir bereits wissen, dass es eine Potenz gibt, sodass $a^K \equiv 1 \bmod N$ gilt, dann können wir Rechnungen sehr vereinfachen: Wir können das nämlich nutzen, um einen beliebigen Exponenten zu verkleinern. Im vorigen Beispiel können wir nutzen, dass $8^{10} \equiv 1 \bmod 11$ ist. Damit haben wir

$$8^{21} = 8^{10\cdot 2+1} \equiv (8^{10})^2 \cdot 8 \equiv 1^2 \cdot 8 \equiv 8 \bmod 11\,.$$

Etwas formaler lautet das:

Gilt $a^K \equiv 1 \bmod N$ und $\ell = m \bmod K$, dann ist $a^\ell \equiv a^m \bmod N$.

Wir brauchen dann nur noch die Potenzen $a^1, a^2, \ldots, a^{K-1}$ berechnen und kennen danach bereits alle!

7.2 Der Satz von Euler

Das Problem in Bemerkung 7.2 besteht nun darin: Wie finden wir zu vorgegebener Basis a einen solchen Exponenten K?
Da hilft uns der folgende Satz von Euler (daher hat die Funktion φ ihren Namen):

Satz 7.3 (Satz von Euler)**.**

Ist N eine positive, natürliche Zahl und a teilerfremd zu N, d. h. $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$ so gilt

$$a^{\varphi(N)} = 1 \bmod N\,.$$

Multiplizieren wir die Gleichung mit a, dann erhalten wir eine Version, die für alle Zahlen a gültig ist:

$$a^{\varphi(N)+1} \equiv a \bmod N\,.$$

Bemerkung 7.4. 1. Das Ergebnis des Satzes ist erstaunlich, da es besagt, dass es einen Exponenten mit der in Bemerkung 7.2 gewünschten Eigenschaft gibt, der für alle (interessanten) Basen der gleiche ist!

2. Ist p eine Primzahl, dann ist $\varphi(p) = p - 1$. Damit gilt für alle Zahlen $a = 1, 2, \ldots, p-1$:

$$a^{p-1} = 1 \bmod p\,.$$

Schreiben wir das etwas anders, so gibt das den Satz von Euler für Primzahlen:

Für alle Primzahlen p und alle Zahlen a gilt

$$a^p \equiv a \bmod p$$

7.3 Aufgaben zu Abschnitt 7

Aufgabe 7.5. Berechnen Sie:

a) $9^{81} \bmod 11$ b) $14^{722} \bmod 5$ c) $(-9)^{182} \bmod 7$

Aufgabe 7.6. Zeigen Sie mit Hilfe der Eulerschen φ-Funktion, dass

a) $632^{107} \equiv 42 \bmod 53$ b) $166^{138} \equiv 4 \bmod 24$ c) $208^{325} \equiv 5 \bmod 7$

Aufgabe 7.7. a) Begründen Sie, warum es zum Bestimmen der letzten beiden Ziffern einer Zahl reicht, ihren Wert modulo 100 zu berechnen.

b) Bestimmen Sie die letzten beiden Stellen der Zahl 7^{1283}.

8 Das RSA-Verschlüsselungsverfahren

8.1 Die Grundidee des RSA-Verfahrens und eine Babyvariante

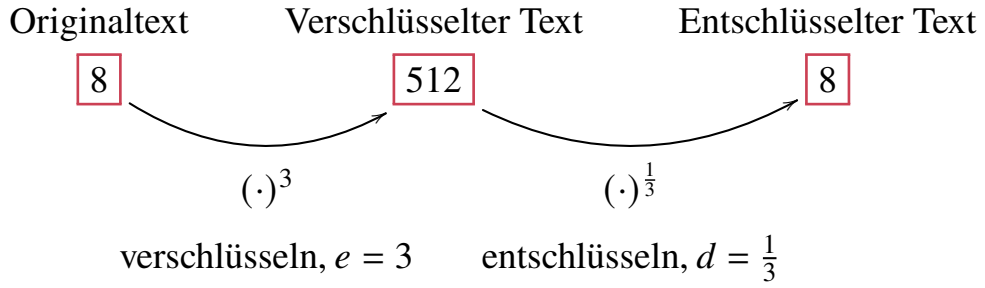
Die Idee des RSA-Verfahrens ist es, eine Nachricht durch Potenzieren zu verschlüsseln.
Dazu übersetzt man zunächst das zu codierende Alphabet in Zahlen, zum Beispiel A = 1, B = 2, . . . , Z = 26.
Als nächstes wählt man einen Schlüssel[2], zum Beispiel $e = 3$.
Unsere Nachricht lautet 'AHBZ=1,8,2,26' und diese gilt es zu verschlüsseln:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} = 1 &\mapsto 1^3 = 1 \\ \mathrm{H} = 8 &\mapsto 8^3 = 512 \\ \mathrm{B} = 2 &\mapsto 2^3 = 8 \\ \mathrm{Z} = 26 &\mapsto 26^3 = 17576 \end{aligned}$$

Damit lautet der verschlüsselte Text

$$\mathrm{AHBZ} = 1, 8, 2, 26 \mapsto 1, 512, 8, 17576$$

Wie entschlüsselt man nun den codierten Text?
Das ist hier recht einfach, da man lediglich eine Wurzel ziehen muss, und zwar die dritte Wurzel. Das lässt sich auch mit Hilfe von Potenzieren formulieren: Das Entschlüsseln erfolgt über das Potenzieren mit dem Exponenten $d = \frac{1}{3}$.



[2] e: encrypt (verschlüsseln), d: decrypt (entschlüsseln)

Problem 8.1. • Kennen wir e, so auch d. Dabei spielt es keine Rolle ob e ganzzahlig ist, denn man erhält d als Lösung der leicht zu lösenden Gleichung

$$ex = 1 \tag{1}$$

- Man kann durch Raten und Probieren e herausfinden, wenn man etwa weiß, dass e und die Originalnachricht natürliche Zahlen sind und man den verschlüsselten Text kennt:

  Der verschlüsselte Text sei $512 = 2^9$. Dann sind die möglichen Schlüssel $e = 9, e = 3$ oder $e = 1$ mit den Originalnachrichten

e	9	3	1
Nachricht	2	8	512

  Hat man nun mehrere verschlüsselte Texte, so kann man durch einfache Ausschlussverfahren auf das korrekte e schließen.

Der Grund für das simple Dekodieren ist:

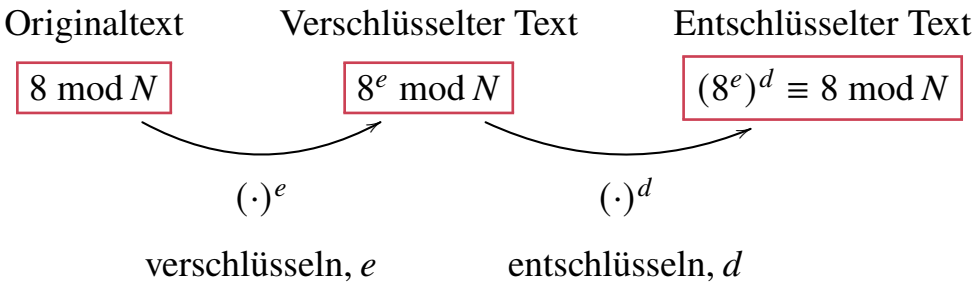
Rechnen über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist zu einfach

8.2 RSA-Verfahren über $\mathbb{Z}_N$

Statt über den reellen Zahlen zu rechnen, verwenden wir als Zahlenmenge die **Restklassenmenge** $\mathbb{Z}_N$ der Reste beim Teilen durch die positive ganze Zahl N:

$$\mathbb{Z}_N = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$$

Die Idee ist wieder die gleiche wie im ersten Abschnitt:



- Wir starten mit einem Schlüssel e, den wir zum Potenzieren unserer Originalnachricht verwenden. Die Rechnung führen wir nun in $\mathbb{Z}_N$ durch.

- Um eine Chance zum Entschlüsseln zu haben, auch wenn man den passenden Schlüssel d hat, ist der Modus N nötig.
- Dass heißt der Schlüssel zum Verschlüsseln ist (e, N) und der zum Entschlüsseln ist (d, N)

8.2.1 Erzeugen der Schlüssel (e, N) und (d, N)

Das Problem der Schlüsselgenerierung ist im Prinzip das gleiche wie in der Babyvariante: Wenn ich den Schlüssel e kenne, dann muss ich, um den Schlüssel d herauszufinden bzw. zu bestimmen, 'nur' ein d finden mit

$$(a^e)^d \equiv a^{ed} \equiv a \bmod N$$

oder etwas umgeschrieben

$$a^{ed-1} \equiv 1 \bmod N\,.$$

Mit Hilfe des Satzes von Euler wissen wir nun, dass $a^{ed-1} = 1$ immer dann gilt, wenn d so gewählt ist, dass $ed - 1$ ein Vielfaches von $\varphi(N)$ ist. Also benötigen wir ein d sodass $ed - 1 \equiv 0 \bmod \varphi(N)$.
Das heißt, zur Bestimmung von d lösen wir die Gleichung

$$ex \equiv 1 \bmod \varphi(N)\,, \tag{2}$$

siehe auch die analoge Gleichung (1) im Babybeispiel.

Bemerkung 8.2. Wir können nicht mit jedem Schlüssel e starten: Wir müssen gewährleisten, dass die Gleichung (2) auch lösbar ist. Dazu müssen e und $\varphi(N)$ teilerfremd sein, also $\mathrm{ggT}(e, \varphi(N)) = 1$.

Bemerkung 8.3.
- Kenne ich nun als Hersteller des Verschlüsselungsverfahrens N und $\varphi(N)$, so kann ich den öffentlichen Schlüssel (e, N) und den geheimen Schlüssel (d, N) mit Hilfe von (2) erzeugen.
- Wir wissen bereits, dass es in der Regel schwierig ist $\varphi(N)$ zu berechnen. Da man aber, nachdem man einmal d erzeugt hat, $\varphi(N)$ nicht mehr benötigt, kann man diese Information löschen. Damit ist ein wichtiger Teil nicht mehr verfügbar, den man zur Rekonstruktion des (geheimen) Schlüssels (d, N) benötigt! Ein Angriff auf dieses Verfahren ist somit sehr schwierig.
- Aus dem gleichen Grund ist es auch nicht sinnvoll Primzahlen als Modus zu wählen, da dann $\varphi(N)$ leicht zu bestimmen ist.

Bemerkung 8.4. Um die Bestimmung von $\varphi(N)$ sehr schwer zu gestalten, die Berechenbarkeit selbst aber verhältnismäßig einfacheinfach, trifft man folgende Wahlen.

- Wähle zwei große Primzahlen p und q.
- Wähle $N = p \cdot q$.
- Damit ist $\varphi(N) = \varphi(p) \cdot \varphi(p) = (p-1)(q-1)$.

Die Rekonstruktion von p und q aus N und damit die Bestimmung von $\varphi(N)$ ist ein sehr schwieriges Problem, sodass ein Angriff auf das Verfahren, d. h. die Bestimmung von (d, N) aus (e, N), sehr schwierig ist.

8.2.2 Zur Lösung der Gleichung $e \cdot x \equiv 1 \bmod \varphi(N)$

Die Bestimmung der Lösung von (2), also von

$$e \cdot x \equiv 1 \bmod \varphi(N)\,,$$

geschieht mit Hilfe des erweiterten euklidischen Algorithmus:

> Sind a und b ganze Zahlen, dann gibt es ganze Zahlen k und ℓ, sodass
>
> $$k \cdot a + \ell \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b)\,.$$

Wir wissen, dass e so gewählt werden muss, dass $\mathrm{ggT}(e, \varphi(N)) = 1$. Damit gibt es ganze Zahlen k und ℓ, sodass

$$k \cdot e + \ell \cdot \varphi(N) = 1\,. \tag{3}$$

Damit ist dann

$$k \cdot e + \ell \cdot \varphi(N) \equiv e \cdot k \equiv 1 \bmod \varphi(N)$$

und $d = k$ ist eine Wahl für den Schlüssel zum Entschlüsseln.[3]

[3] Liefert der euklidische Algorithmus für k keinen Wert zwischen 1 und $\varphi(N) - 1$, so kann man ein beliebiges Vielfaches von $\varphi(N)$ zu k addieren oder subtrahieren, und d als diesen Wert wählen. Das ändert nichts an der Eigenschaft $e \cdot d \equiv 1 \bmod \varphi(N)$.

8.3 Ein Fahrplan für das RSA-Verfahren

Wir fassen den vorigen Abschnitt in Form eines Fahrplans zusammen:

Schritt 1. Wähle zwei Primzahlen p und q und berechne damit $N = p \cdot q$

Schritt 2. Berechne $\varphi(N) = (p-1) \cdot (q-1)$ und bestimme eine Zahl e mit $\mathrm{ggT}\left(e, \varphi(N)\right) = 1$.
Das gibt den öffentlichen Schlüssel (e, N).

Schritt 3. Berechne d aus dem Faktor vor e im erweiterten euklidischen Algorithmus für e und $\varphi(N)$: $k \cdot e + \ell \cdot \varphi(N) = 1$.
Ist $0 < k < \varphi(N)$, dann wähle $d = k$, andernfalls addiere/subtrahiere $\varphi(N)$ so oft zu/von k, bis der Wert die gewünschte Eigenschaft hat: das ist dann d.
Das gibt den geheimen Schlüssel (d, N).

Schritt 4. Verschlüssele eine Originalnachricht A zu $\bar{A}$, indem du $A^e \equiv \bar{A} \bmod N$ berechnest.

Schritt 5. Entschlüssele eine codierte Nachricht $\bar{B}$ zu B, indem du $\bar{B}^d \equiv B \bmod N$ berechnest.

8.4 Beispiel: Das RSA-Verfahren in $\mathbb{Z}_{221}$

Wir verschlüsseln und entschlüsseln wieder die Nachricht 'AHBZ' aus dem Babybeispiel, jetzt nach dem obigen Fahrplan:

Schritt 1. Wir wählen $p = 13$ und $q = 17$ und somit $N = 13 \cdot 17 = 221$.

Schritt 2. Damit ist $\varphi(N) = 12 \cdot 16 = 192$ und wir wählen $e = 23$, sodass $(23, 221)$ der öffentliche Schlüssel ist.

Das klappt, denn e und $\varphi(N)$ sind teilerfremd: Es ist $\varphi(N) = 192 = 2^6 \cdot 3$ und $e = 23$ ist eine Primzahl.

Schritt 3. Zur Bestimmung von d suchen wir zunächst Zahlen k und ℓ, sodass

$$k \cdot 23 + \ell \cdot 192 = 1\,.$$

Das machen wir mit dem euklidischen Algorithmus:

$$
\begin{array}{lll}
192 = 8 \cdot 23 + 8 & \longrightarrow & 8 = 192 - 8 \cdot 23 \\
23 = 2 \cdot 8 + 7 & \longrightarrow & 7 = 23 - 2 \cdot 8 \\
 & & \quad = 23 - 2 \cdot (192 - 8 \cdot 23) \\
 & & \quad = 17 \cdot 23 - 2 \cdot 192 \\
8 = 1 \cdot 7 + \boxed{1} & \longrightarrow & \boxed{1} = 8 - 7 \\
 & & \quad = (192 - 8 \cdot 23) - (17 \cdot 23 - 2 \cdot 192) \\
 & & \quad = 3 \cdot 192 - 25 \cdot 23 \\
7 = 7 \cdot 1 & &
\end{array}
$$

Das gibt uns $k = -25$ und $\ell = 3$. Weil $k < 0$ ist, setzen wir

$$d = -25 + 192 = 167$$

Wir machen die Probe:

$$e \cdot d \equiv 23 \cdot 167 \equiv 3841 \equiv 20 \cdot 192 + 1 \equiv 1 \bmod 192\,.$$

Der private Schlüssel zum Decodieren ist $(167, 221)$.

Schritt 4. Wir verschlüsseln die Nachricht 'AHBZ':

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} = 1 \longmapsto 1^{23} &\equiv 1 \bmod 221 \\
\mathrm{B} = 2 \longmapsto 2^{23} &\equiv 8 \cdot (2^{10})^2 \equiv 8 \cdot 140^2 \\
&\equiv 8 \cdot 4 \cdot 70^2 \equiv 8 \cdot 4 \cdot 38 \equiv 111 \bmod 221 \\
\mathrm{H} = 8 \longmapsto 8^{23} &\equiv (2^{23})^3 \equiv 111^3 \equiv 111 \cdot 111^2 \equiv 111 \cdot 166 \\
&\equiv 83 \bmod 221 \\
\mathrm{Z} = 26 \longmapsto 26^{23} &\equiv 2^{23} \cdot 13^{23} \\
&\equiv 111 \cdot 13^2 \cdot (13^3)^7 \equiv 111 \cdot 13^2 \cdot (-13)^7 \\
&\equiv -111 \cdot (13^3)^3 \equiv -111 \cdot (-13)^3 \\
&\equiv -111 \cdot 13 \equiv 104 \bmod 221
\end{aligned}
$$

Damit ist der verschlüsselte Text:

$$\mathrm{AHBZ} = 1, 8, 2, 26 \longmapsto 1, 83, 111, 104$$

Schritt 5. Zum Decodieren müssen wir nun Folgendes berechnen:[4]

$$\begin{aligned}
1^{167} &\equiv 1 \bmod 221\\
83^{167} &\equiv (83^8)^{20} \cdot (83^2)^3 \cdot 83 \equiv 38^3 \cdot 83 \equiv 64 \cdot 83\\
&\equiv 8 \bmod 221\\
111^{167} &\equiv 111^2 \cdot (111^3)^{55} \equiv 111^2 \cdot (83)^{55}\\
&\equiv 111^2 \cdot 83 \cdot (83^{16} \cdot 83^2)^3 \equiv 111^2 \cdot 83 \cdot 38^3\\
&\equiv 111^2 \cdot 83 \cdot 64 \equiv 111^2 \cdot 8 \equiv 166 \cdot 8\\
&\equiv 2 \bmod 221\\
104^{167} &\equiv (8 \cdot 13)^{167} \equiv (2^{24})^{20} \cdot 2^{20} \cdot 2 \cdot (13^{23})^7 \cdot (13^3)^2\\
&\equiv 152 \cdot 2 \cdot (-13)^7 \cdot (-13)^2 \equiv -83 \cdot (13^3)^3\\
&\equiv 83 \cdot 13^3 \equiv -83 \cdot 13\\
&\equiv 26 \bmod 221
\end{aligned}$$

Der decodierte Text ist damit

$$1, 8, 2, 26 = \text{AHBZ}\,.$$

8.5 Aufgaben zu Abschnitt 8

Aufgabe 8.5. $p = 17$ und $q = 11$ sind die zwei Primzahlen mit denen das RSA-Verfahren durchgeführt wird.

a) Verschlüsseln Sie die Information 65 mit Hilfe des öffentlichen Schlüssels $(7; 187)$.

b) Begründen Sie, warum $(7; 187)$ der kleinstmögliche öffentliche Schlüssel ist.

c) Berechnen den zu $(7; 187)$ gehörigen privaten Schlüssel $(d; 187)$.

Aufgabe 8.6. Ein RSA-Verfahren nutzt die Primzahlen $p = 31$ und $q = 37$.

a) Bestimmen Sie einen öffentlichen Schlüssel $(e; N)$ so, dass e so klein wie möglich ist.

b) Berechnen den zu $(e; N)$ aus a) gehörigen privaten Schlüssel $(d; N)$.

c) Als öffentlicher Schlüssel wird nun verwendet $(11; 1147)$.
Begründen Sie mit Hilfe geeigneter Rechnungen, dass dann 174 die Verschlüsselung von 10 ist.

[4] Wir wollen Euler nicht benutzen, da wir $\varphi(221)$ "nicht kennen". Aber wir nutzen die vorigen Rechnungen und z. B. $2^{24} \equiv 2^{23} \cdot 2 \equiv 111 \cdot 2 \equiv 222 \equiv 1 \bmod 221$, $38^4 \equiv 38^2 \cdot 38^2 \equiv 118^2 \equiv 1 \bmod 221$ oder $83^2 \equiv 38 \bmod 221$

9 Die Begründungen für einige der Aussagen

9.1 Die Begründung für Folgerung 1.9

Es gibt unendlich viele Primzahlen

Wir zeigen, dass es zu einer endlichen, lückenlos aufsteigenden Menge an Primzahlen immer eine weitere Primzahl geben muss, die dann größer ist als alle bisherigen.
Wir nehmen also die ersten n Primzahlen her: $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Die neue Zahl, die wir berechnen ist

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 \,.$$

Diese Zahl ist durch keine der vorigen n vielen Primzahlen teilbar, da sie beim Teilen jeweils den Rest 1 hat, siehe Fakt 1.7.
Wegen Fakt 1.6 ist der kleinste Teiler von q, der ungleich 1 ist, eine Primzahl. Dies ist entweder q selbst oder eine neue Primzahl. In beiden Fällen muss dieser Primzahlteiler aber größer als p_n sein, da es bei $p_1, \ldots, p_n$ keine Lücke gab.

9.2 Die Begründung für Fakt 2.3

Ist p eine Primzahl und a eine natürliche Zahl mit $\mathrm{ggT}(a, p) = 1$, dann sind nur die Vielfachen

$$a \cdot p, \quad a \cdot 2 \cdot p, \quad a \cdot 3 \cdot p, \quad \ldots$$

durch p teilbar.

Zunächst sieht man direkt, dass alle Zahlen in der Liste durch p teilbar sind.

Wir müssen also noch begründen, dass es keine weiteren Zahlen gibt, die zwar durch p teilbar sind aber nicht von der speziellen Form.
Die Begründung erfolgt in mehreren Schritten:

1. Wir suchen uns das kleinste Vielfache von a heraus, dass durch p teilbar ist.

   Diese Zahl ist dann von der Form $a \cdot m$. Dabei muss $1 < m \leq p$ gelten, denn 1 ist ausgeschlossen, da a nicht durch p teilbar sein soll, und $m > p$ ist ausgeschlossen, da dann $a \cdot p$ kleiner als $a \cdot m$ wäre.

2. Wir nehmen uns jetzt ein weiteres Vielfaches von a her, dass ebenfalls durch p teilbar ist. Das können wir als $a \cdot h$ schreiben. Es muss $h \geq m$ gelten, da $a \cdot m$ das kleinste durch p teilbare Vielfache war.
3. Für die beiden Vielfachen aus 1. und 2. gibt es (wegen $h \geq m$) zwei Zahlen k und r mit $h = k \cdot m + r$ und $0 \leq r < m$, siehe Fakt 1.7.
4. Damit ist $a \cdot r = a \cdot h - a \cdot k \cdot m$ ebenfalls durch p teilbar, weil $a \cdot h$ und $a \cdot k \cdot m$ durch p teilbar sind.

   Weil aber $a \cdot r < a \cdot m$ ist und $a \cdot m$ das kleinste Vielfache war, dass durch p teilbar war, muss $r = 0$ sein.
5. Wegen 4. ist $h = k \cdot m$ und das beliebige(!) Vielfache $a \cdot h$, das durch p teilbar ist, ist von der Form $a \cdot k \cdot m$.

Bis jetzt haben wir: Alle Vielfachen von a, die von p geteilt werden, sind von der Form $a \cdot k \cdot m$. Dabei ist $a \cdot m$ das kleinste aller Vielfachen, die durch p teilbar sind.
Jetzt bleibt nur noch zu begründen, warum m selber p ist:

6. Auf alle Fälle wird $a \cdot p$ von p geteilt. Daher muss $a \cdot p$ auch von der Form $a \cdot p = a \cdot k \cdot m$ sein und damit $p = k \cdot m$. das heißt, m ist ein Teiler von p, also $m = 1$ oder $m = p$, weil p eine Primzahl ist. Wegen $m > 1$ aus Punkt 1. ist damit $m = p$.

9.3 Die Begründung für Fakt 2.5

Ist a eine natürliche Zahl, dann gibt es eine eindeutige Zerlegung

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n$$

in ein Produkt von n Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Diese müssen nicht unterschiedlich sein.

Der Zusatz, dass die Primzahlen unterschiedlich sein dürfen, haben wir bereits an den Beispielen gesehen.
Dass es so eine Zerlegung immer gibt, sieht man, indem man beschreibt, wie man sie erhält. Dazu wendet man den folgenden Algorithmus an:

i. Ist a eine Primzahl, dann ist man fertig.
ii. Ist a keine Primzahl, dann gibt es Zahlen b und c, die nicht 1 sind und die a zerlegen: $a = b \cdot c$.
iii. Mit b und c startet man nun neu mit Schritt i. und ii.

iv. Das Verfahren endet, wenn man in Schritt iii. nur noch Primzahlen hat.

Wir müssen jetzt noch begründen, warum es keine zwei unterschiedlichen Zerlegungen geben kann. Das tun wir in mehreren Schritten:

1. Wir tun so, als gäbe es zwei Zerlegungen für a, nämlich

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_m \,.$$

   Darin sollen die Primzahlen der Größe nach sortiert sein und es soll $n \leq m$ sein.

2. Da p_1 die Zahl $q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_m$ teilt, muss diese von der Form $p_1 \cdot k$ sein.
   Das heißt, p_1 muss unter den ganzen Primzahlen $q_1, \ldots, q_m$ vorkommen, etwa $p_1 = q_1$. Wir können diese Primzahl jetzt auf beiden Seiten dividieren und behalten

$$p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_n = q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_m \,.$$

3. Den Schritt aus 2. wiederholen wir jetzt n mal und bekommen $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \ldots, p_n = q_n$. Die Gleichung, die nach Division übrig bleibt, ist

$$1 = q_{n+1} \cdot \ldots \cdot q_m \,.$$

   Diese Gleichung darf auf der rechten Seite aber keine weiteren Faktoren haben. Das geht jedoch nur, wenn $n = m$ ist und damit beide Zerlegung von vornherein gleich.

9.4 Die Begründung für Fakt 6.5

1. Wir befinden uns in $\mathbb{Z}_N$ und sehen uns dort die Zahl a an. Es gilt

   Ist $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$, dann haben die Werte $k \cdot a$ mit $k = 0, 1, \ldots, (N-1)$ alle verschiedene Rest modulo N. D. h. durchlaufen alle Reste $0, 1, \ldots, N-1$ und decken ganz $\mathbb{Z}_N$ ab.

   Denn ist $k \cdot a \equiv \ell \cdot a \bmod N$, also $(k - \ell) \cdot a \equiv 0 \bmod N$, dann wäre wegen Bemerkung 6.3.2 auch $k - \ell \equiv 0 \bmod N$, also $k = \ell \bmod N$. Das passiert aber in der aufgeführten Menge nicht.

2. Ist aber $\mathrm{ggT}(a, N) = g > 1$, dann ist wegen Fakt 2.1.3 $\mathrm{ggT}(\frac{a}{g}, \frac{N}{g}) = 1$.

Damit durchlaufen die Zahlen $k \cdot \frac{a}{g}$ mit $k = 0, \ldots m-1$ alle Reste $0, 1, \ldots, m-1$ modulo $\frac{N}{g}$, wobei $m = \frac{N}{g}$ ist.

Multiplizieren wir das mit g, dann sehen wir, dass $k \cdot a = k \cdot \frac{a}{g} \cdot g$ die Reste $0, g, 2 \cdot g, \ldots (m-1)g$ modulo N durchläuft.

Ist nun $\ell > m$ dann gibt es ein $0 \leq r < m$ und eine Zahl j, sodass $\ell = j \cdot m + r$. Dann ist $\ell \cdot a = (j \cdot m + r) \cdot a = j \cdot m \cdot a + r \cdot a = j \cdot \frac{N}{g} \cdot a + r \cdot a = r \cdot a + j \cdot \frac{a}{g} \cdot N$, also $\ell \cdot a \equiv r \cdot a \bmod N$ und wir erhalten einen Rest, der bereits vorhanden war.

Wir fassen zusammen:

Ist $\mathrm{ggT}(a, N) = g$, dann nehmen die Werte $k \cdot a$ mit $k = 0, 1, \ldots, N-1$ nur die Reste $0, g, 2 \cdot g, \ldots N - g$ modulo N an. Insbesondere ist 1 nicht darunter und alle Werte wiederholen sich genau g mal.

9.5 Die Begründung für Fakt 6.10

Für die Begründung von Fakt 6.10 werden wir die folgenden natürlichen Eigenschaften ganzer Zahlen benötigen:

- Ist $a \equiv b \bmod N$ und teilt q die Zahl N, dann gilt auch $a \equiv b \bmod q$.
- Ist $\mathrm{ggT}(a, m) = g$, dann ist auch $\mathrm{ggT}(a + k \cdot m, m) = g$.
- Ist $\mathrm{ggT}(a, m) = 1$ und $\mathrm{ggT}(a, n) = 1$, dann ist auch $\mathrm{ggT}(a, m \cdot n) = 1$.

Wir gehen in drei Schritten vor, um Fakt 6.10 zu begründen. Dabei gilt immer die Voraussetzung, dass N_1 und N_2 teilerfremd sind, also $\mathrm{ggT}(N_1, N_2) = 1$.

1. Durchläuft k alle Reste modulo N_2 und ℓ alle Reste modulo N_1, dann durchläuft $k \cdot N_1 + \ell \cdot N_2$ alle Reste modulo $N_1 \cdot N_2$.

   Da die Anzahl der berechneten Werte mit der Anzahl aller möglichen Reste übereinstimmt, müssen wir lediglich zeigen, dass ihre Reste unterschiedlich sind.

   Ist aber $k \cdot N_1 + \ell \cdot N_2 \equiv k' \cdot N_2 + \ell' \cdot N_2 \bmod N_1 \cdot N_2$, dann ist auch $k \cdot N_1 \equiv k' \cdot N_1 \bmod N_2$ und $\ell \cdot N_2 \equiv \ell' \cdot N_2 \bmod N_1$. Wegen $\mathrm{ggT}(N_1, N_2) = 1$ ist dann aber auch $k \equiv k' \bmod N_2$ und $\ell \equiv \ell' \bmod N_1$.

   Damit sind alle oben beschriebenen Reste modulo $N_1 \cdot N_2$ tatsächlich verschieden und geben somit alle möglichen Reste.

2. Durchläuft k alle teilerfremden Reste modulo N_2 und ℓ alle teilerfremden Reste modulo N_1, dann durchläuft $k \cdot N_1 + \ell \cdot N_2$ nur teilerfremde Reste modulo $N_1 \cdot N_2$.

   Mit $\text{ggT}(N_1, N_2) = 1$, $\text{ggT}(k, N_2) = 1$ und $\text{ggT}(\ell, N_1) = 1$ gilt auch $\text{ggT}(k \cdot N_1 + \ell \cdot N_2, N_1) = 1$ und $\text{ggT}(k \cdot N_1 + \ell \cdot N_2, N_2) = 1$. Die beiden letzten zusammen geben dann $\text{ggT}(k \cdot N_1 + \ell \cdot N_2, N_1 \cdot N_2) = 1$.

3. Ist k nicht teilerfremd zu N_2 oder ℓ nicht teilerfremd zu N_1, dann ist auch $k \cdot N_1 + \ell \cdot N_2$ nicht teilerfremd zu $N_1 \cdot N_2$.

   Hat z. B. der Rest k einen gemeinsamen Teiler d mit N_2, also $k = d \cdot k'$, $N_2 = d \cdot n$, dann hat auch $k \cdot N_1 + \ell \cdot N_2 = d \cdot k' \cdot N_1 + d \cdot \ell \cdot n$ einen gemeinsamen Teiler mit $N_1 \cdot N_2 = d \cdot N_1 \cdot n$.

1.-3. geben uns nun, dass in Punkt 2. alle teilerfremden Reste modulo $N_1 \cdot N_2$ durchlaufen werden. Da es genau $\varphi(N_1)$ viele teilerfremde Reste von N_1 gibt und $\varphi(N_2)$ viele teilerfremde Reste von N_2, haben wir nun gezeigt, dass es im Fall $\text{ggT}(N_1, N_2) = 1$ genau $\varphi(N_1) \cdot \varphi(N_2)$ viele teilerfremde Reste von $N_1 \cdot N_2$ gibt, also:

$$\varphi(N_1 \cdot N_2) = \varphi(N_1) \cdot \varphi(N_2) \quad \text{falls } \text{ggT}(N_1, N_2) = 1$$

9.6 Die Begründung für den Satz von Euler (Satz 7.3)

Ist N eine positive, natürliche Zahl mit $\text{ggT}(a, N) = 1$ so gilt

$$a^{\varphi(N)} = 1 \bmod N\,.$$

Wir nehmen zur Begründung der Aussage alle Zahlen zwischen 0 und N her, die teilerfremd zu N sind. Davon gibt es $\varphi(N)$ Stück, etwa $r_1 < r_2 < \ldots < r_{\varphi(N)}$.

- Wir multiplizieren jetzt diese Zahlen mit a, also $a \cdot r_1, a \cdot r_2, \ldots, a \cdot r_{\varphi(N)}$.

  Dann sind die Ergebnisse weiterhin teilerfremd zu N.

- Keine zwei dieser neuen Zahlen haben den gleichen Rest modulo N.

  Das liegt daran, dass aus $a \cdot r_i \equiv a \cdot r_j \bmod N$ die Gleichung $r_i \equiv r_j \bmod N$ folgt (wegen $\text{ggT}(a, N) = 1$ dürfen wir durch a teilen). Weil aber $0 < r_i, r_j < N$ ist folgt schließlich $r_i = r_j$.

  Die Reste der Zahlen $a \cdot r_1, a \cdot r_2, \ldots, a \cdot r_{\varphi(N)}$ modulo N sind also die gleichen, wie die Zahlen $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(N)}$.

- Deshalb ist

$$
\begin{aligned}
& (a \cdot r_1) \cdot (a \cdot r_2) \cdot \ldots \cdot (a \cdot r_{\varphi(N)}) \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(N)} \bmod N \\
\Longleftrightarrow\ & a^{\varphi(N)} \cdot (r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(N)}) \equiv r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(N)} \bmod N \\
\Longleftrightarrow\ & a^{\varphi(N)} \equiv 1 \bmod N
\end{aligned}
$$

  Den letzte Schritt durften wir wieder machen, weil $r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_{\varphi(N)}$, wie jeder der Faktoren, teilerfremd zu N ist.