Der Titel dieses Beispieltexts

Seminar Geometrie

Max Vortragend

31. Februar 1950

Inhaltsverzeichnis

1 Das erste Kapitel **2**

1.1 Eine Aufgabe 2

1.2 Ein zweiter Unterabschnitt 5

1.3 Ein weiterer Unterabschnitt 5

2 Die Umgebungen **5**

2.1 Der mathematische Kram 5

2.2 Die Anwendungen von all dem Vorigen 6

3 Grafiken **6**

Literatur **7**

1 Das erste Kapitel

Alles was hier folgt findet man weder in [2] oder in [1] noch in [3].

Aber nun klappt es auch mit den Umlauten:

Ü und ü statt Ü und ü

Ö und ö statt Ö und ö

Ä und ä statt Ä und ä

ß statt ß

1.1 Eine Aufgabe

<u>Aufgabe 1</u>

Wir betrachten das Nullstellengebilde M der Funktion $f(x, y, x) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$.

a) Zeigen Sie, dass M eine Rotationsfläche ist indem Sie M geeignet parametrisieren.

b) Zeigen Sie, dass M eine Regelfläche ist, indem Sie als Leitkurve $c(t)$ eine geeignete ebene Kurve wählen. Zeigen Sie dabei ebenfalls, dass die Beschreibung als Regelfläche auf zwei verschiedene Arten geschehen kann, das heißt bei gleicher Leitkurve mit Hilfe zweier linear unabhängiger Abbildungen $v_1(t)$ und $v_2(t)$.

c) Insbesondere gehen durch jeden Punkt von M zwei Erzeugende. Bestimmen Sie den Schnittwinkel der beiden Erzeugenden in Abhängigkeit des Punktes. Wie sieht dieser Winkel auf der Leitkurve aus?

Hinweis 1: Wenn man die Kurve in der xy-Ebene und v_1 und v_2 beide mit konstanter z-Komponente 1 wählt, so bekommt man zwei Darstellungen $\alpha_k(s, t) = c(t) + s\, v_k(t)$ mit $k = 1, 2$. Insbesondere ist für einen Punkt $p \in M$ bei dieser Wahl $p = \alpha_1(t_1, s) = \alpha_2(t_2, s)$ mit dem gleichen Parameter s! Dann hängt der Schnittwinkel $\xi(p)$ nur von s ab und es gilt $\cos(\xi) = \frac{s^2}{1+s^2}$.

Hinweis 2: Hilfreich sind evtl. die folgenden Regeln zum Rechnen mit trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned}
\sin(a)+\sin(b) &= 2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})\\
\sin(a)-\sin(b) &= 2\cos(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})\\
\cos(a)+\cos(b) &= 2\cos(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})\\
\cos(a)-\cos(b) &= 2\sin(\frac{a+b}{2})\sin(\frac{a-b}{2})\\
\cos(a-b) &= \cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)\\
\cos(2a) &= \frac{1-\tan^2(a)}{1+\tan^2(a)}
\end{aligned}$$

<u>Lösungsvorschlag:</u>

a) $\beta(u,t) = \big(\cosh(u)\cos(t), \cosh(u)\sin(t), \sinh(t)\big)^T$ ist die Parametrisierung als Rotationsfläche.

b) Man wählt als ebene Leitkurve $c(t) = \beta(0,t) = \big(\cos(t), \sin(t), 0\big)^T$. Wir machen den Ansatz $\alpha(t,s) = c(t) + s\,v(t)$ mit $v(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)^T$ und der Normierung $\|v(t)\|^2 = x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 2$.

   Wir setzen das in f ein und erhalten

$$\begin{aligned}
f(c(t)) &= (\cos(t) + sx(t))^2 + (\sin(t) + sy(t))^2 - s^2 z(t)^2 - 1\\
&= s^2(x(t)^2 + y(t)^2 - z(t)^2) + 2s(x(t)\cos(t) + y(t)\sin(t))
\end{aligned}$$

   Da das für alle s verschwinden muss folgt, zum einen

$$z(t)^2 = x(t)^2 + y(t)^2$$

   und zum zweiten

$$(x(t), y(t))^T \perp (\cos(t), \sin(t))^T\,.$$

   Das zweite liefert dann $x(t) = -r(t)\sin(t)$ und $y(t) = r(t)\cos(t)$ und das erste damit $z(t) = \pm r(t)$.

   Insgesamt haben wir also bisher

$$v(t) = r(t)\begin{pmatrix} -\sin(t)\\ \cos(t)\\ \pm 1\end{pmatrix}\,.$$

Wegen der gewünschten Normierung $\|v\|^2 = 2$ ist $r(t)^2 = \pm 1$. Somit haben wir nun vier Vektoren

$$v_1 = \pm \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$v_2(t) = \pm \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Für die beiden Vorzeichen liefert das aber jeweils die gleichen Erzeugenden, so dass wir die zwei Parametrisierungen

$$\alpha_1(t,s) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} , \tag{1}$$

$$\alpha_2(t,s) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

erhalten.

c) Es sei $p = \alpha_1(t_1, s_1) = \alpha_2(t_2, s_2)$ ein Punkt der Fläche, dann ist

$$\begin{pmatrix} \cos(t_1) - s_1 \sin(t_1) \\ \sin(t_1) + s_1 \cos(t_1) \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t_2) + s_2 \sin(t) \\ \sin(t_2) - s_2 \cos(t) \\ s_2 \end{pmatrix} .$$

Die dritte Gleichung liefert dann $s_1 = s_2 = s$ und die ersten beiden liefern

$$s = \frac{\cos(t_1) - \cos(t_2)}{\sin(t_2) + \sin(t_2)} = \tan(\tfrac{t_2 - t_1}{2})$$

und

$$s = \frac{\sin(t_2) - \sin(t_1)}{\cos(t_1) + \cos(t_2)} = \tan(\tfrac{t_2 - t_1}{2}) .$$

Weiter ist der Winkel ξ zwischen den Erzeugenden in p gegeben durch den Winkel zwischen den Richtungsvektoren, also

$$\cos(\xi) = \frac{\langle v_1(t_1), v_2(t_2) \rangle}{\|v_1(t_1)\| \|v_2(t_2)\|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\big(- \sin(t_1)\sin(t_2) - \cos(t_1)\cos(t_2) + 1\big) \\
&= \frac{1}{2}\big((1 - \cos(t_2 - t_1))\big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1 - \tan^2(\frac{t_2 - t_1}{2})}{1 + \tan^2(\frac{t_2 - t_1}{2})}\Big) \\
&= \frac{\tan^2(\frac{t_2 - t_1}{2})}{1 + \tan^2(\frac{t_2 - t_1}{2})} \\
&= \frac{s^2}{1 + s^2}
\end{aligned}
$$

Auf der Leitkurve ist das 90° und entspricht dem Winkel zwischen $v_1(t)$ und $v_2(t)$.

1.2 Ein zweiter Unterabschnitt

Der ist aber leer, bis auf die folgende

Bemerkung 1.1. Die Nummerierung der verschiedenen Umgebungen erfolgt fortlaufend in einem Abschnitt.

1.3 Ein weiterer Unterabschnitt

Satz 1.2. *Das mit der Nummerierung ist so sehr praktisch, da man nicht so lange sucht!*

2 Die Umgebungen

2.1 Der mathematische Kram

Definition 2.1. Zwei ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen aufeinanderfolgend, wenn $a = b + 1$ oder $b = a + 1$ gilt.

Definition 2.2. Es sei $a \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl, dann nennt man

$$
|a| := \begin{cases} a & \text{wenn } a \geq 0 \\ -a & \text{wenn } a < 0 \end{cases} \tag{3}
$$

den Betrag der Zahl a.

Bemerkung 2.3. Für alle Zahlen $a \in \mathbb{Z}$ ist $|a| \in \mathbb{N}$.

Satz 2.4. *Der Betrag der Differenz zweier ganzen Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ ist gleich eins genau dann, wenn die Zahlen a und b aufeinanderfolgen.*

Proof. Wegen Definition 2.1 lässt sich die Behauptung von Satz 2.4 wie folgt umschreiben:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : |a - b| = 1 \Leftrightarrow (a = b + 1 \vee b = a + 1)\,.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} |a - b| = 1 &\Leftrightarrow a - b = 1 \vee a - b = -1 \\ &\Leftrightarrow a = b + 1 \vee b = a + 1. \end{aligned}$$

Dabei gilt die erste Gleichung wegen Definition 2.2. □

Korollar 2.5. So sieht ein Korollar aus ...

Bezeichnung 2.6. ... so eine Bezeichnung ...

Lemma 2.7. *... so ein Lemma ...*

Proof. ... so dessen Beweis. □

2.2 Die Anwendungen von all dem Vorigen

Und *last but not least* folgt das

Beispiel 2.8. Dies ist ein Beispiel für etwas was vorher gemacht wurde.[1]

3 Grafiken

Nutzen Sie pdflatex zum Übersetzen der .tex-datei. Speichern Sie dazu alle Grafikdateien, die Sie einbinden wollen als pdf-datei. So erhält z. B. die Abbildungen 1 und 2

[1] Dies ist eine sehr wichtige Umgebung!

Abbildung 1: typische Messreihe

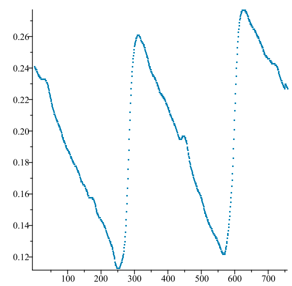
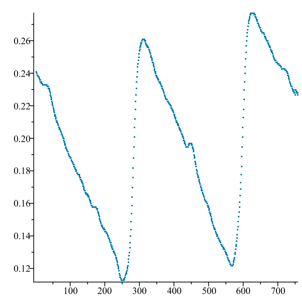


Abbildung 2: untypische Messreihe



Literatur

[1] William Fulton and Joe Harris. *Representation theory*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. A first course, Readings in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1991.

[2] S. M. Salamon. Quaternionic Kähler manifolds. *Invent. Math.* **67**, 1982, 143-171.

[3] James E. Humphreys. *Introduction to Lie algebras and representation theory. 3rd printing, rev.* Graduate Texts in Mathematics, 9. New York - Heidelberg - Berlin: Springer-Verlag. XII, 171 p., 1980.