

Analytische Geometrie

Teil 3: Geraden und Beträge

Aufgabe 1.

Überprüfen Sie auf Schnittpunkte und beschreiben Sie die gegenseitige Lage der Geraden.

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathbf{g} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; & \mathbf{h} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{b) } \mathbf{g} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; & \mathbf{h} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{c) } \mathbf{g} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; & \mathbf{h} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 2.

Bestimmen Sie die Punkte A_{yz} , A_{xz} und A_{xy} , in denen die Gerade \mathbf{g} die xy -Ebene, die xz -Ebene und die yz -Ebene schneidet:

$$\mathbf{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.

Die vier Punkte $P(1/0/2)$, $Q(3/2/6)$, $R(3/0/8)$ und $S(1/-2/4)$ liegen alle in einer Ebene und bilden ein Viereck. Überprüfen Sie, ob diese Punkte ein Parallelogramm bilden.

Aufgabe 4.

Eine Pyramide hat die Ecken $A(0/0/4)$, $B(3/0/0)$, $C(0/6/0)$ und $D(-2/1/0)$.

- Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem
- Welche Kanten der Pyramide sind windschief?

Aufgabe 5.

Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden:

$$\begin{aligned} \text{a) } \mathfrak{g} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; & \mathfrak{h} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ \text{b) } \mathfrak{g} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; & \mathfrak{h} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{c) } \mathfrak{g} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; & \mathfrak{h} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 6.

Zeigen Sie, dass alle drei Geraden durch einen Punkt verlaufen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; & \mathfrak{g}_2 : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \\ \mathfrak{g}_3 : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 7.

Berechnen Sie den Mittelpunkt Z zwischen A und B . Berechnen Sie ebenfalls $|AB|$, $|AZ|$, und $|BZ|$, um ihre Rechnung zu überprüfen.

$$\begin{aligned} \text{a) } A(3/4/2); B(1/2/10) & \quad \text{b) } A(1/1/12); B(-1/-4/-15) \\ \text{c) } A(1/2/4); B(2/3/1) & \quad \text{d) } A(-2/-4/6); B(-2/1/4) \end{aligned}$$

Aufgabe 8.

Zeigen Sie, dass $X(1,25/1,75/0)$ auf der Strecke zwischen $P(1/2/-1)$ und $Q(2/1/3)$ liegt. Berechnen Sie $|PX|$ und $|QX|$.