Frank Klinker

Analytische Geometrie

Teil 4: Geraden, Geraden, Geraden

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden durch die Punkte A und B.

a) $A(4/2/-3),\ B(0/1/-5)$ b) $A(-2/0/0),\ B(8/2/0)$ c) $A(4/-2/3),\ B(4/-2/0)$

Aufgabe 2.

Überprüfen Sie auf welcher der Geraden $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{k}$ die Punkte A bis H liegen.

$$\mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}7\\4\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix},\quad \mathfrak{h}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-7\\3\end{pmatrix},\quad \mathfrak{k}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}5\\-3\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2{,}5\\-1{,}5\end{pmatrix}$$

$A(3/0/4)$	$B(-8/8/-8)$	$C(12/-10/4)$	$D(4/4/-4)$
$E(4/-3/12)$	$F(9/7/-8)$	$G(4/-2/1)$	$H(-1/-18/-7)$

Aufgabe 3.

Überprüfen Sie, ob die Punkte auf der Geraden $\mathfrak{g}$ durch $A(2/4/-3)$ und $B(6/-8/0)$ liegen:

$P(-10/30/-12)$ $Q(4/-2/-1{,}5)$ $R(2{,}4/2{,}8/2{,}7)$ $S(0/10/-4{,}5)$

Aufgabe 4.

Prüfen Sie nach, ob es Zahlen a, b, c gibt, sodass der Punkt Q auf der Geraden durch die Geraden A und B liegt. Geben Sie Q gegebenenfalls an:

a) $A(2/1/1),\ B(0/1/2),\ Q(a/2/c)$ b) $A(2/1/4),\ B(3/3/1),\ Q(a/0/c)$
c) $A(2/2/1),\ B(3/1/0),\ Q(0/b/c)$ d) $A(-5/2/0),\ B(3/4/0)\,Q(0/b/c)$

Aufgabe 5.

Überprüfen Sie, welche der vier Geraden identisch bzw. echt parallel sind:

$$\mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \mathfrak{h}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}3\\2\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\6\\3\end{pmatrix},$$
$$\mathfrak{k}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}4\\6\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\quad \mathfrak{l}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\6\\-2\end{pmatrix}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die Durchstoßpunkte der folgenden Geraden mit allen drei Koordinatenebenen:

$$\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.

Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden $\mathfrak{g}$ durch die Punkte A und B und der Geraden $\mathfrak{h}$ durch P und Q auf und untersuchen Sie deren gegenseitige Lage. Berechnen Sie ggf. den Schnittpunkt.

a) $A(0/-1/2)$, $B(1/0/1)$, $P(3/0/2), Q(4/-1/4)$

b) $A(1/0/1)$, $B(3/2/0)$, $P(7/6/-2), Q(11/10/-4)$

c) $A(4/2/1)$, $B(1/2/3)$, $P(8/6/1), Q(7/8/3)$

Aufgabe 9.

Geben Sie eine Parameterdarstellung für eine zu $\mathfrak{g}$ parallelen Geraden durch P an

a) $\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, P(-2/5/3)$ b) $\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, P(5/-7/0)$

Aufgabe 10.

Geben Sie jeweils eine Parameterform einer Geraden an, die zu $\mathfrak{g}$ echt parallel, identisch, windschief ist oder mit $\mathfrak{g}$ genau einen gemeinsamen Punkt hat.

$$\mathfrak{g}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k}: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11.

Geben Sie Zahlen a und b an, für die die Geraden $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ (i) echt parallel sind, (ii) identisch sind oder (iii) sichin einem Punkt schneiden?

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4-b \end{pmatrix},$$

Aufgabe 12.

Untersuchen Sie, ob eine Seite des Dreiecks mit den Eckpunkten A, B und C auf der Geraden $\mathfrak{g}$ liegt, oder echt parallel zu ihr ist.

$$A(-2/4/6),\ B(-2/-5/4),\ C(6/3/2),\ \mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13.

Bestimmen Sie die Durchstoßpunkte der folgenden Geraden mit allen drei Koordinatenebenen:

$$\mathfrak{g}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{g}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g}_3 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{g}_4 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g}_5 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{g}_6 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -21 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$