

Analytische Geometrie
Teil 2.3: Geraden, Geraden, Geraden

Aufgabe 1.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden durch die Punkte A und B .

- a) $A(4/2/-3)$, $B(0/1/-5)$ b) $A(-2/0/0)$, $B(8/2/0)$ c) $A(4/-2/3)$, $B(4/-2/0)$

Aufgabe 2.

Überprüfen Sie auf welcher der Geraden \mathfrak{g} , \mathfrak{h} und \mathfrak{k} die Punkte A bis H liegen.

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} A(3/0/4) & B(-8/8/-8) & C(12/-10/4) & D(4/4/-4) \\ E(4/-3/12) & F(9/7/-8) & G(4/-2/1) & H(-1/-18/-7) \end{array}$$

Aufgabe 3.

Überprüfen Sie, ob die Punkte auf der Geraden \mathfrak{g} durch $A(2/4/-3)$ und $B(6/-8/0)$ liegen:

$$P(-10/30/-12) \quad Q(4/-2/-1,5) \quad R(2,4/2,8/2,7) \quad S(0/10/-4,5)$$

Aufgabe 4.

Prüfen Sie nach, ob es Zahlen a, b, c gibt, sodass der Punkt Q auf der Geraden durch die Geraden A und B liegt. Geben Sie Q gegebenenfalls an:

- a) $A(2/1/1)$, $B(0/1/2)$, $Q(a/2/c)$ b) $A(2/1/4)$, $B(3/3/1)$, $Q(a/0/c)$
c) $A(2/2/1)$, $B(3/1/0)$, $Q(0/b/c)$ d) $A(-5/2/0)$, $B(3/4/0)$, $Q(0/b/c)$

Aufgabe 5.

Überprüfen Sie, welche der vier Geraden identisch bzw. echt parallel sind:

$$\begin{array}{l} \mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{k} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{l} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 6.

Bestimmen Sie die Durchstoßpunkte der folgenden Geraden mit allen drei Koordinatenebenen:

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden \mathfrak{g} und \mathfrak{h} :

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 8.

Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Geraden \mathfrak{g} durch die Punkte A und B und der Geraden \mathfrak{h} durch P und Q auf und untersuchen Sie deren gegenseitige Lage. Berechnen Sie ggf. den Schnittpunkt.

- a) $A(0/-1/2), B(1/0/1), P(3/0/2), Q(4/-1/4)$
- b) $A(1/0/1), B(3/2/0), P(7/6/-2), Q(11/10/-4)$
- c) $A(4/2/1), B(1/2/3), P(8/6/1), Q(7/8/3)$

Aufgabe 9.

Geben Sie eine Parameterdarstellung für eine zu \mathfrak{g} parallelen Geraden durch P an

$$\text{a) } \mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, P(-2/5/3) \quad \text{b) } \mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, P(5/-7/0)$$

Aufgabe 10.

Geben Sie jeweils eine Parameterform einer Geraden an, die zu \mathfrak{g} echt parallel, identisch, windschief ist oder mit \mathfrak{g} genau einen gemeinsamen Punkt hat.

$$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{h} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{k} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11.

Geben Sie Zahlen a und b an, für die die Geraden \mathfrak{g} und \mathfrak{h} (i) echt parallel sind, (ii) identisch sind oder (iii) sich in einem Punkt schneiden?

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} b \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, & \mathfrak{h} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \mathfrak{h} : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4-b \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Aufgabe 12.

Untersuchen Sie, ob eine Seite des Dreiecks mit den Eckpunkten A , B und C auf der Geraden \mathfrak{g} liegt, oder echt parallel zu ihr ist.

$$A(-2/4/6), B(-2/-5/4), C(6/3/2), \mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 13.

Bestimmen Sie die Durchstoßpunkte der folgenden Geraden mit allen drei Koordinatenebenen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, & \mathfrak{g}_2 : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_3 : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, & \mathfrak{g}_4 : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{g}_5 : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, & \mathfrak{g}_6 : \vec{x}(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -21 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$