Frank Klinker

Analytische Geometrie

Teil 8.2: Gegenseitige Lage zweier Ebenen

Aufgabe 1.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ und bestimmen Sie ggf. eine Parameterform der Schnittgeraden. Geben Sie dazu zunächst für eine der Ebenen eine Koordinatenform an und verwenden Sie diese zur Lösung der Aufgabe.

a) $\mathcal{E}_1 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{E}_1 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $\mathcal{E}_1 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\mathcal{E}_1 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\mathcal{E}_1 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

f) $\mathcal{E}_1 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

g) $\mathcal{E}_1 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}, \mathcal{E}_2 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 30. Oktober 2023

Aufgabe 2. Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ und bestimmen Sie ggf. eine Parameterform der Schnittgeraden. Geben Sie dazu zunächst für eine der Ebenen eine Parameterform an und verwenden Sie diese zur Lösung der Aufgabe.

a) $\mathcal{E}_1 :\ -x - 2y + 3z = -1$, $\mathcal{E}_2 :\ 2x + 4y - 6z = 2$

b) $\mathcal{E}_1 :\ x + y + z = 1$, $\mathcal{E}_2 :\ x + 5z = 8$

c) $\mathcal{E}_1 :\ -4x + 6y - 2z = -7$, $\mathcal{E}_2 :\ 2x - 3y + z = -5$

d) $\mathcal{E}_1 :\ x + z = 0$, $\mathcal{E}_2 :\ y = 1{,}2$

Aufgabe 3.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebenen $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$. Bestimmen Sie den Parameter a jeweils so, dass die Ebenen

1) echt parallel sind,
2) identisch sind und
3) sich in einer Geraden schneiden.

a) $\mathcal{E}_1 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ -a \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_2 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{E}_1 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ a \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}_2 : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 2-a \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ a-4 \\ -a \end{pmatrix}$