Frank Klinker

Analytische Geometrie

Teil 8.1: Gegenseitige Lage von Ebenen und Geraden (mit Koordinatenform)

Geben Sie in den folgenden Aufgaben zunächst eine Koordinatenform der Ebene an und verwenden Sie diese zur Lösung der Aufgabe.

Aufgabe 1.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene $\mathcal{E}$ und der Geraden $\mathfrak{g}$ und berechnen Sie ggf. den Durchstoßpunkt der Geraden mit der Ebene.

a) $\mathcal{E}:\vec{x}(t,s)=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},\ \mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$

b) $\mathcal{E}:\vec{x}(t,s)=\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-5\\16\\13\end{pmatrix},\ \mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}2\\-4\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

c) $\mathcal{E}:\vec{x}(t,s)=\begin{pmatrix}-7\\8\\3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix},\ \mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}13\\-11\\-4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\1\\-5\end{pmatrix}$

d) $\mathcal{E}:\vec{x}(t,s)=\begin{pmatrix}-4\\1\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}4\\1\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

e) $\mathcal{E}:\vec{x}(t,s)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}8\\10\\12\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-50\\72\\-98\end{pmatrix},\ \mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\6\\10\end{pmatrix}$

f) $\mathcal{E}:\vec{x}(t,s)=\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix},\ \mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}-7\\-8\\10\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\10\\24\end{pmatrix}$

g) $\mathcal{E}:\vec{x}(t,s)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-6\\0\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\3\\-9\end{pmatrix},\ \mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\3\\-3\end{pmatrix}$

h) $\mathcal{E}:\vec{x}(t,s)=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\-3\\-6\end{pmatrix},\ \mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}0\\-4\\-5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-2\\-5\end{pmatrix}$

i) $\mathcal{E}:\vec{x}(t,s)=\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}4\\6\\-10\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\7\\-6\end{pmatrix},\ \mathfrak{g}:\vec{x}(t)=\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix}$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 10. September 2023

Aufgabe 2.

Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Ebene $\mathcal{E}$ und der Geraden $\mathfrak{g}$. Bestimmen Sie den Parameter a jeweils so, dass die Gerade (i) echt parallel zur Ebene verläuft, (ii) innerhalb der Ebene verläuft und (iii) mit der Ebene einen Durchstoßpunkt gemeinsam hat.

a) $\mathcal{E} : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ a+4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ a+4 \\ a+2 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a+2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathcal{E} : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a+2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ a-1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -a \end{pmatrix}$

c) $\mathcal{E} : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2a+4 \\ 8 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2+2a \\ 8-a \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -a \\ -3 \\ 3-3a \end{pmatrix}$

d) $\mathcal{E} : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ a+2 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$, $\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1-a \\ a-3 \\ -2 \end{pmatrix}$

e) $\mathcal{E} : \vec{x}(t,s) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a^2-4a+3 \\ 3a-3 \\ a^2-1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2a+4 \\ -4 \\ a^2-3a-14 \end{pmatrix}$,

$\mathfrak{g} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 2a \\ a+1 \\ 5a+4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1-a \\ -1 \\ -a-1 \end{pmatrix}$