Frank Klinker

Aufgaben: Integration

Teil 2: Fläche zwischen zwei Graphen, erste Anwendungen

Aufgabe 1. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, die die Graphen der angegebenen Funktionen einschließen:

a) $f(x) = -x^2 + 12\,, \quad g(x) = 3$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 6\,, \quad g(x) = -2x + 3$

c) $f(x) = x^2 + 6x - 8\,, \quad g(x) = 2x + 4$

d) $f(x) = -2x^2 + 4x + 7\,, \quad g(x) = x^2 - 2x - 2$

e) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x\,, \quad g(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + x^2 - 11x - 15$

Aufgabe 2. Berechne Sie $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ für die folgenden Konstellationen:

a)	$f(x) = 2x + 1$	$a = -2, b = 3$
b)	$f(x) = -2x$	$a = -2, b = 2$
c)	$f(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - x + \dfrac{1}{2}$	$a = -0{,}5, b = 1$
d)	$f(x) = x^2 - 8x + 12$	$a = 1, b = 3$
e)	$f(x) = 5x^4 - 6x^2 - 1$	$a = -3, b = 4$
f)	$f(x) = 3x^2 + 4$	$a = 1, b = 5$
g)	$f(x) = 2x^2 + 6x - 3{,}5$	$a = -1, b = 1$
h)	$f(x) = x(x^2 - 4)$	$a = -2, b = 1$

Aufgabe 3. a) Die Überreste einer alten Stadtmauer mit Stadttor sollen restauriert werden. Zur Kalkulation der Kosten wird die Gesamtfläche der Mauer benötigt. Das Amt für Denkmalschutz gibt Ihnen die folgenden Daten:

– Länge der Mauer: $45\,m$; Höhe der Mauer: $11{,}5\,m$.

– Das Tor ist parabelförmig. In der Mitte hat es eine Höhe von $8{,}5\,m$ und unten eine Weite von $6{,}5\,m$.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 6. November 2024

b) Ein gemauerter Torbogen hat die Form zweier ineinander liegender Parabelbögen. Der Torbogen wird in einem Koordinatensystem durch die zwei Funktion $f_1(x)$ und $f_2(x)$ beschrieben:

$$f_1(x) = -0{,}5x^2 + 2x + 8\,, \quad f_2(x) = -0{,}65(x-2)^2 + 7\,.$$

Der Erboden befindet sich bei $y = 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Querschnitts des Mauerwerks.

Aufgabe 4. Als Eingang der Stadt soll ein großer Torbogen die Besucher begrüßen. Der Bogen soll aus außen und innen durch Parabelbögen begrenzt werden. Er hat eine Gesamthöhe von $30\,m$ und ein Gesamtbreite von $12\,m$, seine Durchfahrtshöhe beträgt $28\,m$ und die Durchfahrtsbreite $10\,m$.

In einem Koordinatensystem wir der äußere Bogen durch die Funktionsvorschrift $f_1(x) = -\frac{5}{6}x^2 + 30$ beschrieben.

a) Ergänzen Sie in der Skizze das zu den Angaben passende Koordinatensystem und benennen Sie spezielle, bekannte Punkte.

b) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift $f_2(x)$, die den inneren Bogen beschreibt.

c) Bestimmen Sie nachvollziehbar das Betonvolumen V_0 des Bogens, wenn dieser eine Dicke von $4\,m$ hat? Geben Sie dazu auch eine Stammfunktion von $f_1(x)$ an.

d) Berechnen Sie das Volumen $V(h)$ des Bogens oberhalb der Höhe $y = h$ für $0 \leq h \leq 30$, sodass insbesondere $V(0) = V_0$.

Begründen Sie kurz, warum man dabei die zwei Fälle $h < 28$ und $h \geq 28$ unterscheiden muss.

Zwischenergebnis:

$$V(h) = \begin{cases} \frac{16}{3}\left(\sqrt{\frac{6}{5}}\,(30-h)^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{\sqrt{28}}(28-h)^{\frac{3}{2}}\right) & \text{falls } 0 \leq h < 28 \\ \frac{16}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}(30-h)^{\frac{3}{2}} & \text{falls } 28 \leq h \leq 30 \end{cases}$$

e) In welcher Höhe h_0 wird das Volumen des Bogens in zwei gleiche Teile geteilt?

Nutzen Sie die App Geogebra, indem Sie mit deren Hilfe die (einzige!) Nullstelle der Funktion $V(h) - \frac{1}{2}V_0$ bestimmen.