Frank Klinker

Aufgaben: Integration

Teil 3: Aufgaben mit Parametern und dynamische Aspekte der Integration

Aufgabe 1. a) Bestimmen Sie den Parameter jeweils so, dass der Graph der Funktion mit der x-Achse eine Fläche mit dem angegebenen Flächeninhalt hat:

1) $f_a(x) = ax^2 + 2\,, \quad A = \dfrac{16}{3}$

2) $f_a(x) = a - \dfrac{1}{a}x^2\,, \quad A = \dfrac{4}{3}$

3) $f_a(x) = \dfrac{1}{a^3}x^3 - ax\,, \quad A = 4$

4) $f_a(x) = ax^2 - \dfrac{1}{1-a}x\,, \quad A = \dfrac{1}{24}$

b) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = x^2$ und $g_a(x) = a - x^2$

1) Formulieren Sie eine Bedingung für den Parameter a, sodass $f(x)$ und $g_a(x)$ tatsächlich eine Fläche einschließen.

2) Berechnen Sie a, sodass der Inhalt der Fläche aus 1) den Wert $A = \frac{8}{3}$ hat.

Aufgabe 2. a) Zeigen Sie dass für $0 < k < 1$ der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von $f_k(x) = kx - \frac{1}{1-k}x^2$ und der x-Achse ein lokales Maximum besitzt. Berechnen Sie dieses und zeigen Sie damit, dass zu $k = \frac{3}{5}$ der Flächeninhalt $A = \frac{18}{3125}$ gehört.

b) Berechnen Sie einen Parameter $a > 0$, sodass die Fläche zwischen den Parabeln $f_a(x) = ax^2 - ax$ und $g_a(x) = -ax^2 + \frac{1}{a}x$ den kleinsten Flächeninhalt hat.

c) Berechnen Sie einen Parameter $b > 0$, sodass die Fläche zwischen dem Graphen von $f_b(x) = bx(x^2 - 9)$ und der Winkelhalbierenden im ersten Quadranten minimal wird.

d) Berechnen Sie einen Parameter $a > 1$, sodass die Fläche zwischen dem Graphen von $f_a(x) = ax - (1-a)x^2$ und der x-Achse minimalen Inhalt hat.

e) Berechnen Sie die Parameter $k > 3$, sodass die Fläche zwischen $f_k(x)$ und der x-Achse ein lokales Extremum besitzt? Begründen Sie, warum es sich jeweils um ein absolutes Extremum handelt, und entscheiden Sie, ob es dann ein Maximum oder ein Minimum ist:

1) $f_k(x) = \frac{1}{9}(3-k)x^2 + k$

2) $f_k(x) = kx - \frac{1}{9}(k-3)x^3$

Aufgabe 3. Berechnen Sie den Integralmittelwert $\bar{I}$ der Funktion $f(x)$ im angegebenen Intervall $[a, b]$. Bestimmen Sie dazu jeweils einen Wert c, sodass $f(c) = \bar{I}$

a) $f(x) = x^2$, $[0, 3]$

b) $f(x) = x^2$, $[-3, 3]$

c) $f(x) = x^3$, $[0, 2]$

d) $f(x) = x^3$, $[-2, 2]$

e) $f(x) = x^3$, $[-2, 0]$

f) $f(x) = x^2 - x$, $[0, 2]$

g) $f(x) = x^2 - x$, $[-2, 0]$

h) $f(x) = x^2 - x$, $[-2, 2]$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 22. September 2025

Aufgabe 4. a) Geben Sie begründet eine Klasse von Funktionen an, für die der Integralmittelwert auf jedem Intervall $[-x_0, x_0]$ durch $\bar{I} = 0$ gegeben ist.

a) Geben Sie begründet eine Klasse von Funktionen an, für die der Integralmittelwert auf jedem Intervall $[-x_0, x_0]$ durch $\bar{I} = \dfrac{2}{x_0} \displaystyle\int_0^{x_0} f(x)\,dx$ gegeben ist.

Aufgabe 5. a) Die Funktion $\Phi(t) = -t^2(t-2)$, $0 < t < 2$ beschreibt die Durchsatzrate eines Switches in der Einheit $3\,\frac{Tbit}{h}$. Die Zeit t wird dabei in Stunden gemessen und gibt den Zeitraum 8:00 Uhr bis 10:00 Uhr wieder.

1) Berechnen Sie die Datenmenge zwischen 8:30 Uhr und 9:30 Uhr.
2) Berechnen Sie die Datenmenge auf dem gesamten betrachteten Zeitraum.

b) Die Geschwindigkeit eines Testfahrzeug wird fünf Stunden lang untersucht und mit Hilfe der Funktion $v(t) = 0{,}1t^3 - 0{,}7t^2 + 1{,}2t + 0{,}2$ modelliert. Dabei wird t in Stunden gemessen und $f(t)$ in der Einheit $100\frac{km}{h}$.

1) Berechnen Sie die Strecke, die zwischen der zweiten und dritten Stunde zurückgelegt wurde.
2) Berechnen Sie die mit Hilfe des Integralmittelwertes die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ auf dem gesamten Messintervalls.
3) Der Wert aus Aufgabe 2 beträgt $\bar{v} \approx 49{,}17\,\frac{km}{h}$. Bestimmen Sie, wann dieser Wert tatsächlich erreicht wird, und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.