Frank Klinker

Diskussion von Funktionen mit Parametern (1)

Aufgabe 1. Gegeben sei die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = t^2\left(x + \frac{1}{t}\right)e^{-tx} \qquad \text{mit } t \in \mathbb{R}\,, t > 0$$

a) Begründen Sie kurz, warum der Definitionsbereich für alle Funktionen f_t stets ganz $\mathbb{R}$ ist.

b) Untersuchen den Graphen von f_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte sowie das Verhalten des Graphen für $|x| \to \infty$.

Zeichnen Sie den Graphen von f_1 über dem Intervall $[-1{,}5\,;\,4]$.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der Ortskurve der Wendepunkte.

d) Berechnen Sie die Flächenmaßzahl $A(z)$ der Fläche zwischen dem Graphen von f_t und der x-Achse über dem Intervall $[-1\,;\,z]$ mit $z > -1$ und bestimmen Sie $\lim\limits_{z\to\infty} A(z)$.

Aufgabe 2. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = \left(\frac{x}{t} + 1\right)e^{t-x}\,.$$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) Begründen Sie kurz, warum der Definitionsbereich für alle Funktionen f_t stets ganz $\mathbb{R}$ ist.

b) Untersuchen Sie K_t auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte und Asymptoten (bei der Untersuchung auf Wendepunkte wird auf das hinreichende Kriterium verzichtet).

Zeichnen Sie die Graphen der Funktion f_1 und der Ableitungsfunktion f_1' im Bereich $-1 \leq x \leq 4$ in ein gemeinsames Achsenkreuz (LE $= 2\,cm$).

c) Zeigen Sie, dass für jedes $t > 0$ die Graphen von f_t und f_t' genau einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. Berechnen Sie diesen.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de

d) Das Schaubild K_1, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $u > -1$ schließen eine Fläche ein.

Berechnen Sie den Flächenhalt $A(u)$ der entstehenden Fläche.

Berechnen Sie auch $\lim\limits_{u\to\infty} A(u)$.

Aufgabe 3. Ein mathematisches Modell beschreibt die Zugriffszahlen einer Webseite. Für die Zeit zwischen 10:00 Uhr und 22:00 Uhr gilt

$$f_k(t) = 4t^2e^{2-kt} + 10 \quad \text{mit} \quad k \in \,]0,2;1[\quad \text{und} \quad t \in [0,12]\,.$$

t gibt hierbei die Zeit in Stunden ab 10:00 Uhr an und $f_k(t)$ beschreibt die Besucheranzahl in 1000. Der Parameter k wird situationsabhängig fixiert.

a) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass die Änderungsrate der Besucherzahlen durch

$$f_k'(t) = (8t - 4kt^2)e^{2-kt}\,.$$

b) Zeigen Sie durch Rechnung

$$f_k''(t) = 4(k^2t^2 - 4kt + 2)e^{2-kt}\,.$$

c) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter k den Zeitpunkt $t \in \,]0;12[$, zu der sich laut Modell die meisten Besucher auf der Webseite befinden.

d) Um 13:00 Uhr besuchen 70000 Menschen die Webseite. Berechnen Sie den zugehörigen Parameter k.

Im Folgenden wird das Modell durch die Wahl $k = 0.5$ fixiert.

e) Geben Sie an, wie viele Besucher die Webseite um 12:00 Uhr hat.

f) Der Server war um 13:20 Uhr noch erreichbar, fiel danach allerdings zu einem Zeitpunkt innerhalb der folgenden 20 Minuten aus. Zu diesem Zeitpunkt waren 73000 Besucher auf der Webseite.

Berechnen Sie mit einem geeigneten numerischen Verfahren mit einer Genauigkeit von drei Nachkommastellen, um wie viel Uhr der Server ausgefallen ist.

Hinweis: Als Startwert bietet sich $t = 3{,}5$ an, also 13:30 Uhr.

g) Aus Marketinggründen möchte man gerne wissen, zu welchem Zeitpunkt die Änderungsrate der Besucher am größten ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt.

h) Um 18:00 Uhr verliert die Funktion $f_{0,5}$ ihre Aussagekraft. Ab diesem Zeitpunkt wird statt dessen die Besucherzahl durch eine lineare Funktion g modelliert.

Dabei stimmen um 18:00 Uhr die Besucherzahlen in den beiden Funktionen überein. Ebenso sind zu diesem Zeitpunkt die Änderungsraten beider Funktionen gleich.

Ermitteln Sie ausgehend von diesen Informationen, zu welcher Uhrzeit in diesem Modell niemand mehr die Webseite besucht.