

Aufgaben: Kurvendiskussion
Teil 4.3: Funktionen mit Parametern III

Aufgabe 1. Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = 3x(1 - t\sqrt{x}), \quad x \geq 0.$$

Der Graph von $f_t(x)$ wird mit C_t bezeichnet.

- a) Begründen Sie kurz, warum der Definitionsbereich für alle Funktionen $f_t(x)$ aus den positiven Zahlen und der Null besteht.
- b) Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von C_t mit der x -Achse und geben Sie die Tangentensteigungen in diesen Punkten an.

Untersuchen Sie C_t auf Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Zeichnen Sie C_t für $t = \frac{1}{2}$ im Bereich $0 \leq x \leq 5$ (LE = 2 cm).

- c) Es sei Q der Punkt auf C_t mit der Abszisse $\frac{1}{t^2}$. Auf der Kurvennormalen von C_t in Q wird ein Punkt $P(u/v)$ mit $0 < u < \frac{1}{t^2}$ gewählt. Die Gerade durch $(0/0)$ und P , die x -Achse und die Parallele zur y -Achse durch P begrenzen ein Dreieck.

Bestimmen Sie P so, dass dieses Dreieck einen maximalen Flächeninhalt hat. Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

- d) Es sei $0 < t < 3$. Die Gerade g mit der Gleichung $y = tx$ und C_t begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt $A_1(t)$. Die Gerade g , C_t und die Parallele zur y -Achse durch Q aus Aufgabe c) begrenzen eine Fläche mit Inhalt $A_2(t)$.

Bestimmen Sie t so, dass $A_1(t)$ und $A_2(t)$ gleich groß sind.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Funktionenschar f_a durch

$$f_a(x) = \frac{e^x}{(e^x + a)^2}, \quad \text{mit } a > 0.$$

- a) Begründen Sie kurz, warum der Definitionsbereich für alle Funktionen f_a ganz \mathbb{R} ist.

- b) Untersuchen Sie die Graphen von f_a auf Nullstellen, Extrema und Wendepunkte und sein Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$. Skizzieren Sie den Graphen für $a = 0,05$.
Verzichten Sie bei der Untersuchung auf Wendepunkte auf das hinreichende Kriterium!

Zwischenergebnisse: $f'_a(x) = \frac{e^x(a - e^x)}{(e^x + a)^3}, \quad f''_a(x) = \frac{e^x(e^{2x} - 4ae^x + a^2)}{(e^x + a)^4}$

- c) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve der Extrema der Funktion f_a .
d) Zeigen Sie

$$f_a(\ln(a) + x) = f_a(\ln(a) - x).$$

Welche Bedeutung hat das für den Graphen von f_a ?

- e) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von f_a .
f) Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktionen f_a den Graphen von $g(x) = 0,25e^{-x}$ nur in einem Punkt schneidet.
d) In welchem Verhältnis teilt der Graph der Funktion $g(x) = 0,25e^{-x}$ die Fläche zwischen dem Graphen von $f_a(x)$ und der x -Achse über dem Intervall $[\ln(a); \infty]$.