

Lineare und affine Abbildungen der Ebene

Teil 3: Matrizenrechnung

Aufgabe 1. Berechnen Sie die folgenden Matrixprodukte

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \text{d)} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} & \text{e)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} & \text{f)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{g)} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -0,5 \\ 0,5 & 0 \end{pmatrix} & \text{h)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} & \text{i)} \begin{pmatrix} 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{j)} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} & \text{k)} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \text{l)} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 2. Die lineare Abbildung $f(x, y)$ ist durch $A_f = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ und die affine Abbildung $g(x, y)$ durch $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ definiert.

- a) Berechnen Sie mit Hilfe der Matrizenrechnung für beide Abbildungen die Bilder der Punkte $D(2/3)$, $E(-2/4)$, $F(2/-1)$ und $G(0/7)$.
- b) Die Hintereinanderausführungen $h(x, y) = f(g(x, y))$ und $k(x, y) = g(f(x, y))$ sind ebenfalls affine Abbildungen. Berechnen Sie mit Hilfe der Matrizenrechnung die Matrizen und Verschiebungsfunktionen von $h(x, y)$ und $k(x, y)$.

Aufgabe 3. Überprüfen Sie zunächst, ob die folgenden Matrizen invertierbar sind. Berechnen Sie die inversen Matrizen anschließend falls möglich.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} & \text{d)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{e)} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{f)} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \text{g)} \begin{pmatrix} -3,25 & 6,50 \\ -2,00 & 4,00 \end{pmatrix} & \text{h)} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die inversen Abbildungen zu $f(x, y)$ und $g(x, y)$ aus Aufgabe 2.