Frank Klinker

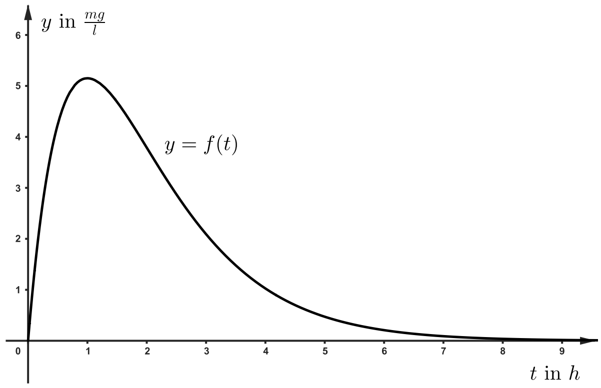
Modellierungsaufgaben mit Exponentialfunktionen

Aufgabe 1.

Bei einem Medikament kann man bei fester Vergabemenge die Blutkonzentration des Wirkstoffs in Abhängigkeit der Zeit durch die Funktion

$$f(t) = 14\,t\,e^{-t}$$

beschreiben. Die Blutkonzentration $f(t)$ hat die Einheit Milligramm pro Liter, $\frac{mg}{\ell}$, und die Zeit t wird in Stunden, h, gemessen.



a) Begründen Sie, warum die korrekte Notation der Funktion

$$f(t) = 14\frac{mg}{\ell \cdot h}\,t\,e^{-\frac{t}{h}}$$

lauten müsste.

Sie dürfen im Folgenden auf die Einheiten verzichten, sollen aber in Ihren Antworten diese mit angeben.

b) Berechnen Sie nachvollziehbar $f'(t)$ und $f''(t)$.

c) Wie großkann die Blutkonzentration maximal werden? Führen Sie die notwendigen Rechnungen im Detail durch.

d) Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die Blutkonzentration am stärksten fällt.

e) Zeigen Sie durch Rechnung, dass $F(t) = -14(t+1)e^{-t}$ eine Stammfunktion von $f(t)$ ist.

f) Wie hoch ist die mittlere Konzentration im Blut während der ersten vier Stunden nach Einnahme des Medikaments.

g) Berechnen Sie $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachkontext.

h) Formulieren Sie einen Lösungsansatz für folgendes Problem: "Nach welcher Zeit ist die Blutkonzentration auf 1% des Maximalwertes gefallen?"

Bestimmen Sie einen Näherungswert für diesen Zeitpunkt.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 29. Juli 2025

Aufgabe 2.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{100}x^5}$. Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben:

a) Berechnen Sie für die Funktion alle Stellen mit neutraler Steigung.

b) Welche Grenzwerte hat die Funktion f für $x \to \infty$? Begründen Sie kurz.

c) Die Funktion g ist definiert als $g(x) = (f(x))^2$. Zeigen Sie rechnerisch, dass $g(x) = x^4 e^{-\frac{1}{50}x^5}$ und dass $G(x) = -10\, e^{-\frac{1}{50}x^5}$ eine Stammfunktion von $g(x)$ ist.

Lässt man den Graphen der Funktion $f(x)$ um die x-Achse rotieren, dann erhält man einen sogenannten Rotationskörper. Betrachten man $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$, dann berechnet sich sein Volumen V mit der Formel

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx\,.$$

d) Berechnen Sie das Volumen für die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, x_0]$ für beliebiges $x_0 > 0$.

e) Berechnen Sie das Volumen für den Rotationskörper aus d) für $x_0 \to \infty$.

f) Die Funktion $f(x)$ wird für $x < 0$ durch die Funktion $h(x) = -0{,}2x$ ergänzt.

Zeigen Sie rechnerisch, dass Übergang an der Verklebestelle $x = 0$ stetig ist.

Ist der Übergang auch differenzierbar? Begründen Sie rechnerisch.