

Aufgaben: Stochastik

Teil 2.3: Wahrscheinlichkeit (mehrstufige Zufallsexperimente)

Aufgabe 1. In einer Urne befinden sich 5 gelbe, 2 rote und 2 blaue Kugeln sowie eine lilafarbene Kugel.

- a) Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen.
- 1) Zeichnen Sie das zugehörigen Baumdiagramm
 - 2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für
 - i) mindestens eine rote Kugel?
 - ii) genau eine rote Kugel?
 - iii) zwei gelbe Kugeln?
 - iv) zwei lilafarbene Kugeln?
 - v) genau eine rote und eine blaue Kugel?
- b) Wiederholen Sie Aufgabe a) wenn man die erste Kugel nicht zurücklegt.

Aufgabe 2. In einer Urne befinden sich 3 rote Kugeln und 9 blaue Kugeln. Es werden nun nacheinander so lange Kugeln gezogen bis eine rote Kugel erscheint. X ist die Zufallsvariable, die angibt nach welchem Zug das Spiel beendet ist.

- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird spätestens im zweiten Zug das Spiel beendet sein?
- b) Formulieren Sie die Wahrscheinlichkeit aus Aufgabe a) mithilfe von X ?
- c) Welche Werte nimmt X an?
- d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X tabellarisch an.

Aufgabe 3. Eine verbogene Münze wird dreimal geworfen und es wird jedes mal notiert ob Kopf oder Zahl fällt. Die Wahrscheinlichkeiten verhalten sich gemäß $P(Z) : P(K) = 3,5 : 4,5$.

- a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(K)$ und $P(Z)$ an.
- b) Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm.
- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Wurf zweimal hintereinander Kopf fällt.
- d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Wurf zweimal hintereinander Zahl fällt.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm

E-Mail: mail@frank-klinker.de

Version: 21. August 2025

Aufgabe 4. Wenn ein Kaninchen Nachkommen hat, dann sind das pro Wurf in der Regel zwischen vier und zehn Junge. Eine männliche Geburt tritt dabei mit einer Wahrscheinlichkeit von 51,3% auf?

- Stellen Sie das Baumdiagramm für einen Wurf mit 4 Kaninchen auf.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es in einem Wurf mit vier Kaninchen genau drei männliche?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es in einem Wurf mit vier Kaninchen mindestens zwei weibliche?

Aufgabe 5. a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von vier Schülern mindestens zwei Schüler im gleichen Monat Geburtstag haben.

Hinweis: Formulieren Sie zunächst das Gegenereignis und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit!

- Was müssen Sie in Ihrer "Formel" ändern, wenn die Grundmenge an Schülern (also die vier) größer wird?
- Was müssen Sie in Ihrer "Formel" ändern, wenn die Zeiteinheit geändert (statt Monat etwa Woche oder Tag)?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Gruppe von 80 Schülern mindestens zwei am gleichen Tag Geburtstag haben?
- Wie viele Schüler muss man zusammensammeln, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% mindestens zwei von ihnen am gleichen Tag Geburtstag haben?

Aufgabe 6. Bei einem Glücksrad ist die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn $P(G) = \frac{1}{5}$. Es darf zweimal gedreht werden und immer wenn G eintrifft erhält der Spieler 10€. Ansonsten bekommt er nichts.

- Zeichnen Sie das zugehörige Baumdiagramm.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle:

Gewinn:	0€	1€	2€	max. 1€	min. 1€
Wahrscheinlichkeit:					

Für Aufgabe 7 und Aufgabe 8 ist die geometrische Summenformel nützlich. Für alle $q \in \mathbb{R}$ lautet diese

$$\sum_{\ell=0}^{k-1} q^\ell = 1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} + q^{k-1} = \frac{1 - q^k}{1 - q}.$$

Ist sogar $-1 < q < 1$, dann kann man unendlich viele Summanden zusammenrechnen und man erhält

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} q^\ell = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - q^k}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

Aufgabe 7. Die Regeln eines Würfelspiels sind wie folgt: Man darf so lange würfeln, bis eine 1 fällt oder bis zweimal hintereinander einer der Zahlen 2, 3, 4, 5 oder 6 fällt. Im ersten Fall gewinnt man, im zweiten verliert man.

- Warum gibt es hier Probleme das vollständigen Baumdiagramm zu zeichnen?
Zeichnen Sie ein Baumdiagramm bis zur vierten Ebene, sodass alles Wesentliche erkennbar ist.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man im ersten (zweiten, dritten, k -ten) Zug gewinnt.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man schließlich gewinnt. ($P_{\text{win}} = \frac{7}{12}$)
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man im ersten (zweiten, dritten, k -ten) Zug verliert.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass man schließlich verliert. ($P_{\text{lose}} = \frac{5}{12}$)

Aufgabe 8. Max und Doris spielen ein Würfelspiel mit zwei Würfeln.

Max gewinnt, wenn er mit einem Wurf die Augensumme 6 wirft und Doris gewinnt, wenn sie die Augensumme 7 würfelt.

Max beginnt mit einem Wurf, danach folgt Doris mit zwei Würfeln, dann Max mit zwei Würfeln und so wechseln sie sich weiter mit jeweils zwei Würfeln ab.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Max? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Doris?