

## Aufgaben: Zahlentheorie

### Teil 2c: Teilerfremdheit und die Eulersche $\varphi$ -Funktion

---

**Aufgabe 1.** Bestimmen Sie  $\varphi(N)$ , indem Sie die Menge der zur Zahl  $N$  jeweils die teilerfremden Zahlen auflisten und diese abzählen:

- a)  $N = 18$       b)  $N = 30$       c)  $N = 74$       d)  $N = 52$

**Aufgabe 2.** In den folgenden Aufgaben sind  $p, p_1, p_2, \dots, p_n$  unterschiedliche Primzahlen und  $r, r_1, r_2, \dots, r_n$  positive ganze Zahlen.

- a) Ist  $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ , dann ist

$$\varphi(N) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot \dots \cdot (p_n - 1).$$

- c) Ist  $N = p^r$ , dann ist

$$\varphi(N) = p^{r-1}(p - 1) = N \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

- e) Ist  $N = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_n^{r_n}$ , dann ist

$$\varphi(N) = N \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

**Aufgabe 3.** Mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 2 berechnen Sie:

- a)  $\varphi(8)$                       b)  $\varphi(546)$   
c)  $\varphi(56)$                       d)  $\varphi(288)$   
e)  $\varphi(16200)$                       f)  $\varphi(391)$