

Aufgaben: Zahlentheorie

Teil 3.1: Teilerfremdheit und die Eulersche φ -Funktion

Aufgabe 1. Bestimmen Sie $\varphi(N)$, indem Sie die Menge der zur Zahl N jeweils die teilerfremden Zahlen auflisten und diese abzählen:

- a) $N = 18$ b) $N = 30$ c) $N = 74$ d) $N = 52$

Aufgabe 2. In den folgenden Aufgaben sind p, p_1, p_2, \dots, p_n unterschiedliche Primzahlen und r, r_1, r_2, \dots, r_n positive ganze Zahlen.

- a) Ist $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$, dann ist

$$\varphi(N) = (p_1 - 1) \cdot (p_2 - 1) \cdot \dots \cdot (p_n - 1).$$

- c) Ist $N = p^r$, dann ist

$$\varphi(N) = p^{r-1}(p - 1) = N \cdot \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

- e) Ist $N = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_n^{r_n}$, dann ist

$$\varphi(N) = N \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Aufgabe 3. Mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 2 berechnen Sie:

- a) $\varphi(8)$ b) $\varphi(546)$
c) $\varphi(56)$ d) $\varphi(288)$
e) $\varphi(16200)$ f) $\varphi(391)$