Frank Klinker

Differentialrechnung

Teil 2: Die Ableitungsfunktion und ein erstes Beispiel

1 Was wir bisher über die Ableitung wissen

Für eine Funktion $f(x)$ haben wir uns bisher für die Steigung des Graphen in einem Punkt $\big(x_0/f(x_0)\big)$ interessiert. Diese Steigung haben wir mit $f'(x_0)$ bezeichnet und wir haben sie durch einen Näherungsprozess erhalten:

- Neben dem Punkt $\big(x_0/f(x_0)\big)$ haben wir einen weiteren Punkt $\big(a/f(a)\big)$ auf dem Graphen von $f(x)$ gewählt.
- Wir haben dann die **mittlere Steigung**
$$\frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0}$$
zwischen beiden Punkten berechnet. Dieser ständig verwendete Quotient heißt der **Differenzquotienten von $f(x)$ an der Stelle** x_0.
- Diesen Wert der mittleren Steigung haben wir als Näherungswert für die Steigung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 genommen.
- Um den Näherungswert zu verbessern haben wir nach und nach die Stelle a näher an der Stelle x_0 gewählt und die mittlere Steigung jedes mal neu berechnet.
- Wir haben gesehen: Wenn man mit a nah genug an x_0 heranrückt, dann ändert sich die mittlere Steigung fast nicht mehr.
- Diesen "Grenzwert" haben wir die **Ableitung von $f(x)$ an der Stelle** x_0 genannt und mit $f'(x_0)$ bezeichnet.
- Um das Näherungsverfahren auch in der Bezeichnung deutlich zu machen haben wir
$$f'(x_0)=\lim_{a\to x_0}\frac{f(a)-f(x_0)}{a-x_0}$$
geschrieben.

Wie man hier bereits sieht ist dieses Verfahren recht aufwändig. Insbesondere, wenn für eine gegebene Funktion $f(x)$ die Ableitung an vielen Stellen berechnen wollen.

Daher wäre es vorteilhaft, wenn wir ein effizienteres Verfahren erhalten, um z. B. die folgenden Wertetabelle für die Funktion $f(x)=x^2$ zu ergänzen:

x_0	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f'(x_0)$											

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 14. September 2023

2 Vom Differenzenquotienten zur Ableitungsfunktion

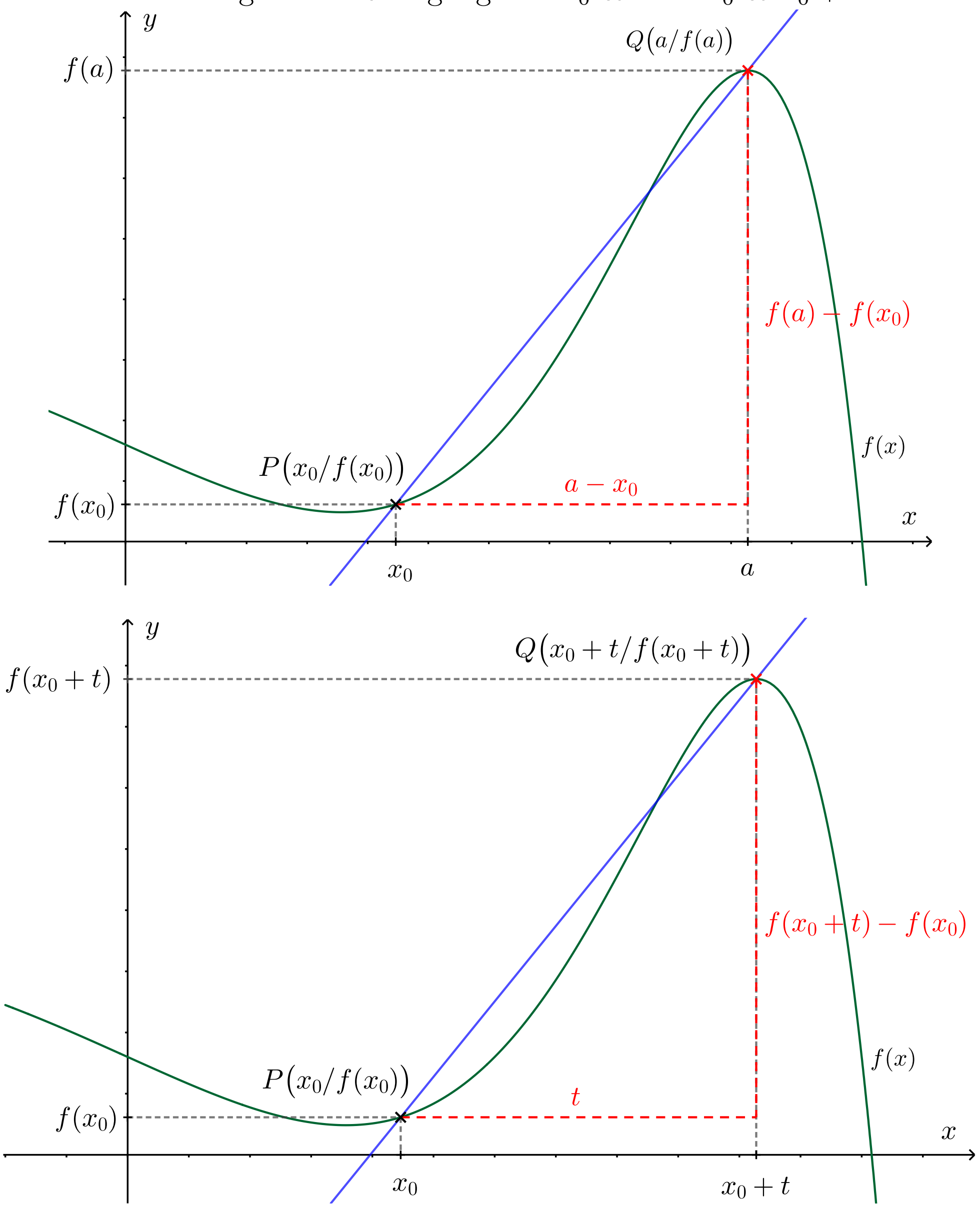
2.1 Der Übergang von x_0 & a zu x_0 & $x_0 + t$

Wir haben uns den Differenzenquotienten einer Funktion $f(x)$ in den Aufgaben bisher für sehr spezielle Stellen x_0 angesehen.

Dazu haben wir uns eine weitere Stelle a und einen zugehörigen Punkt auf dem Graphen angesehen.

Wir ändern nun die Sichtweise: statt einer weiteren Stelle a wie in Abb. 1(oben) konzentrieren wir uns auf den Abstand t zu unserer eigentlichen Stelle x_0 wie in Abb. 1(unten).

Abbildung 1: Der Übergang von x_0 & a zu x_0 & $x_0 + t$



Der Differenzenquotient schreibt sich mit $a = x_0 + t$ dann

$$\frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} = \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \,.$$

Außerdem wird die Ableitung $f'(x_0)$ dann statt mit Hilfe von $a \to x_0$ jetzt mit Hilfe von $t \to 0$ berechnet:

$$f'(x_0) = \lim_{a \to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \,.$$

Bemerkung 1. Der praktische Vorteil ist, dass wir statt eines Startwertes a in der Nähe von x_0 jetzt einen kleinen Abstand t wählen können, um den Näherungsprozess zur Bestimmung von $f'(x_0)$ zu beginnen.

In dieser Form lässt sich das Verfahren oft einfacher programmieren: statt x_0 und a als Eingangsgrößen hat man nur noch x_0 und einen festen "Startabstand" t, den man "gegen 0 laufen lässt".

2.2 Beispiel: Die Ableitung von $f(x) = x^2$ an <u>allen</u> Stellen

Wir wollen nun für die Funktion $f(x) = x^2$ an <u>allen</u> Stellen x_0 gleichzeitig die Ableitung $f'(x_0)$ berechnen.

Dazu gehen wir auf beide oben beschriebene Arten vor: zunächst nutzen wir a und x_0 und berechnen den Grenzwert $a \to x_0$, anschließend wiederholen wir die Rechnung mit $x_0 + t$ und x_0 und berechnen den Grenzwert $t \to 0$.

Die Ableitung von $f(x) = x^2$ mit dem Grenzwert $a \to x_0$

Hier sehen wir uns den Differenzenquotienten in der "üblichen" Form an, und vereinfachen diesen:

$$\begin{aligned} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} &= \frac{a^2 - x_0^2}{a - x_0} \\ &= \frac{(a - x_0)(a + x_0)}{a - x_0} && \text{(Binomische Formel)} \\ &= \frac{\cancel{(a - x_0)}(a + x_0)}{\cancel{a - x_0}} \\ &= a + x_0 \end{aligned}$$

Damit bekommen wir:

$$f'(x_0) = \lim_{a \to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} = \lim_{a \to x_0} (a + x_0) \,.$$

- In dem allgemeinen Ausdruck $\lim\limits_{a \to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}$ müssen wir tatsächlich a "näherungsweise gegen x_0 laufen lassen" und den Differenzenquotienten jedes Mal neu berechnen. Das liegt daran, dass man $a = x_0$ nicht einsetzen darf: man würde dann durch die Null teilen!

- Nach unseren Rechnungen haben wir das Problem nicht mehr und wir können uns die Näherung gegen x_0 sparen: Wir dürfen direkt $a = x_0$ einsetzen!

Das gibt uns am Ende für die Funktion $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{a \to x_0} (a + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0$$

Die Ableitung von $f(x) = x^2$ mit dem Grenzwert $t \to 0$

Dazu betrachten wir den Differenzenquotienten in der "Abstandsversion" ohne x_0 tatsächlich festzulegen. Dann vereinfachen wir diesen:

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} &= \frac{(x_0+t)^2 - x_0^2}{t} \\ &= \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0 t + t^2 - \cancel{x_0^2}}{t} \\ &= \frac{2x_0 t + t^2}{t} \\ &= \frac{\cancel{t}(2x_0 + t)}{\cancel{t}} \\ &= 2x_0 + t\end{aligned}$$

Damit haben wir also

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} (2x_0 + t)\,.$$

Auch hier können wir den "Grenzwert" $t \to 0$ ganz einfach durchzuführen: Wir dürfen $t = 0$ einsetzen

$$f'(x_0) = \lim_{t \to 0} (2x_0 + t) = 2x_0 + 0 = 2x_0.$$

2.3 Die Ableitungsfunktion

Mit den Rechnungen von oben können wir unsere Wertetabelle vom Anfang ausfüllen: Die Ableitungen von $f(x) = x^2$ an ausgewählten Stellen zwischen -5 und 5 sind:

x_0	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f'(x_0)$	-10	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	10

Wir können jetzt also für alle x-Werte die Ableitung der Fiunktion $f(x) = x^2$ an dieser Stelle berechnen. Damit haben wir eine neue Funktion erhalten, nämlich die **Ableitungsfunktion** $f'(x) = 2x$.

$$\boxed{f(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x}$$

Auf die gleiche Art kann man jetzt auch für andere Funktionen die Ableitungsfunktion bestimmen, indem man $f'(x) = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$ berechnet.

Das kann für allgemeinere Funktionen recht kompliziert sein. Deshalb ist es hilfreich einige Basisbeispiele und Rechenregeln im Umgang mit der Ableitung zu haben.