Frank Klinker

Differentialrechnung

Teil 3: Erste Rechenregeln und die Ableitung ganzrationaler Funktionen

1 Beispiele: Die Ableitung der Potenzfunktionen

Wir hatten bereits ein erstes Beispiel für eine Ableitungsfunktion berechnet, nämlich für die Normalparabel $f(x) = x^2$:

$$\boxed{f(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2x}$$

Wir wollen uns nun zunächst einige weitere einfache Beispiele ansehen.

Anschließend wenden wir uns zwei einfache Regeln im Umgang mit Ableitungen zu.

Das beides hilft uns dann später, die Ableitungsfunktionen für **alle** ganzrationalen Funktionen mit einem einfachen Algorithmus zu bestimmen.

Aber zunächst einige weitere Beispiele:

Beispiel 1. Wir sehen uns die konstante Funktion $f(x) = 1$ an. Für diese haben wir

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{a \to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \\ &= \lim_{a \to x_0} \frac{1 - 1}{a - x_0} \\ &= \lim_{a \to x_0} 0 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir haben also

$$\boxed{f(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0}$$

Beispiel 2. Wir sehen uns die spezielle lineare Funktion $f(x) = x$ an. Für diese haben wir

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{a \to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \\ &= \lim_{a \to x_0} \frac{a - x_0}{a - x_0} \\ &= \lim_{a \to x_0} 1 \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 14. September 2023

Zusammengefasst heißt das:

$$\boxed{f(x) = x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 1}$$

Beispiel 3. Wir sehen uns die spezielle kubische Funktion $f(x) = x^3$ an. Für diese haben wir

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+t) - f(x_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(x_0+t) - x_0^3}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 t + 3x_0 t^2 + t^3 - \cancel{x_0^3}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t}(3x_0^2 + 3x_0 t + t^2)}{\cancel{t}} \\
&= \lim_{t\to 0} (3x_0^2 + 3x_0 t + t^2) \\
&= 3x_0^2 \,.
\end{aligned}$$

Wir haben also:

$$\boxed{f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3x^2}$$

Unsere bisherigen Beispiele fassen wir in der linken Tabelle zusammen:

$f(x)$	$f'(x)$
1	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

etwas komplizierter

$f(x)$	$f'(x)$
x^0	$0x^{-1}$
x^1	$1x^0$
x^2	$2x^1$
x^3	$3x^2$

In der rechten Tabelle kann man ein Bildungsschema erkennen und wir fassen das zusammen:

Die Potenzregel der Ableitung

$$\boxed{f(x) = x^{n} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

2 Die Summen-, Differenzen- und Faktorregel der Differentialrechnung

Wir formulieren die Summen-, Differenzen- und Faktorregel hier ohne Begründung an und geben anschließend jeweils einige Beispiele.

Die Summen-, Differenzen- und Faktorregel

- Ist eine Funktion $f(x)$ selbst eine Summe (oder Differenz) zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, dann ist die Ableitung $f'(x)$ die Summe (oder Differenz) der Ableitungsfunktionen $g'(x)$ und $h'(x)$:

  $$\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$$

  Das gilt genauso für mehr Summen und Differenzen.

- Ist eine Funktion $f(x)$ selbst das Produkt einer Funktionen $g(x)$ mit einer Zahl c, dann ist die Ableitung $f'(x)$ das Produkt der Ableitungsfunktionen $g'(x)$ mit der Zahl c:

  $$\boxed{f(x) = c \cdot g(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x)}$$

Beispiel 4.

1. $f(x) = x^3 + x$ ist die Summe aus den Funktionen x^3 und x. Damit ist $f'(x) = 3x^2 + 1$.
2. $f(x) = x^2 - x + 1$ ist die Summe/Differenz der Funktionen x^2, x und 1. Damit ist $f'(x) = 2x - 1 + 0 = 2x - 1$.
3. $f(x) = 4x^2$ ist die Funktion x^2 mit dem Faktor 4. Damit ist $f'(x) = 4 \cdot 2x = 8x$.
4. $f(x) = -8$ ist die Funktion 1 mit dem Faktor -8. Damit ist $f'(x) = -8 \cdot 0 = 0$.

3 Zentrales Beispiel: Die Ableitung ganzrationaler Funktionen

Mit den Beispielen und den Rechenregeln lassen sich jetzt alle ganzrationalen Funktionen ableiten. Diese lassen sich nämlich als Summen und/oder Differenzen von Potenzfunktionen verstehen, wobei letztere noch jeweils mit einem Faktor versehen sein können.

Zur Verdeutlichung des Algorithmus beginnen wir mit drei Beispielen:

Beispiel 5.

Bsp. i.

$$\begin{array}{lllll} f(x) = & 4x^3 & -8x^2 & +2x & +1 \\ f(x) = & \color{blue}{4} \cdot x^{\color{red}{3}} & -\color{blue}{8} \cdot x^{\color{red}{2}} & +\color{blue}{2} \cdot x^{\color{red}{1}} & +\color{blue}{1} \cdot x^{\color{red}{0}} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ f'(x) = & \color{blue}{4} \cdot \color{red}{3} \cdot x^{\color{red}{3}-1} & -\color{blue}{8} \cdot \color{red}{2} \cdot x^{\color{red}{2}-1} & +\color{blue}{2} \cdot \color{red}{1} \cdot x^{\color{red}{1}-1} & +\color{blue}{1} \cdot \color{red}{0} \cdot x^{\color{red}{0}-1} \\ f'(x) = & 12x^2 & -16x & +2 & \end{array}$$

Bsp. ii.

$$\begin{array}{lllll} g(x) = & x^5 & -3x^3 & +3x^2 & -3 \\ g(x) = & \color{blue}{1} \cdot x^{\color{red}{5}} & -\color{blue}{3} \cdot x^{\color{red}{3}} & +\color{blue}{3} \cdot x^{\color{red}{2}} & -\color{blue}{3} \cdot x^{\color{red}{0}} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ g'(x) = & \color{blue}{1} \cdot \color{red}{5} \cdot x^{\color{red}{5}-1} & -\color{blue}{3} \cdot \color{red}{3} \cdot x^{\color{red}{3}-1} & +\color{blue}{3} \cdot \color{red}{2} \cdot x^{\color{red}{2}-1} & -\color{blue}{3} \cdot \color{red}{0} \cdot x^{\color{red}{0}-1} \\ g'(x) = & 5x^4 & -9x^2 & +6x & \end{array}$$

Bsp. iii.

$$\begin{array}{llll} h(x) = & -3x^7 & -x^3 & +2x^2 \\ h(x) = & -\color{blue}{3} \cdot x^{\color{red}{7}} & -\color{blue}{1} \cdot x^{\color{red}{3}} & +\color{blue}{2} \cdot x^{\color{red}{2}} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ h'(x) = & \color{blue}{3} \cdot \color{red}{7} \cdot x^{\color{red}{7}-1} & -\color{blue}{1} \cdot \color{red}{3} \cdot x^{\color{red}{3}-1} & +\color{blue}{2} \cdot \color{red}{2} \cdot x^{\color{red}{2}-1} \\ h'(x) = & -21x^6 & -3x^2 & +4x \end{array}$$

Wir fassen zusammen:

> **Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ einer ganzrationalen Funktion $f(x)$**
>
> Zu jedem Summanden von $f(x)$ erhält man den zugehörigen Summanden von $f'(x)$, indem man
>
> - den Vorfaktor der Potenz von x mit dem Exponenten dieser Potenz multipliziert und
> - den Exponenten der Potenz von x um Eins verringert.