Frank Klinker

Differentialrechnung

Teil 4: Die Tangentengleichung

1 Die Tangentengleichung

Wir haben die Ableitung/Steigung einer Funktion $f(x)$ in einem Punkt $P(x_0/f(x_0))$ erhalten, indem wir die Steigung von Geraden berechnet haben. Diese Geraden verliefen durch den Punkt P und einen weiteren Punkt $Q(a/f(a))$.

Wir sind dann mit der Stelle a immer weiter an x_0 "herangerutscht" und haben als Grenzwert die Ableitung/Steigung $f'(x_0)$ erhalten.

Die "Grenzgerade", die zu dieser Steigung gehört ist die Tangente.

Wie bestimmen wir nun die Geradengleichung dieser Tangente?

Dazu müssen wir uns nur zwei Dinge in Erinnerung rufen:

1. Die Tangente verläuft durch den Punkt $P(x_0/f(x_0))$
2. Die Tangente hat die Steigung $f'(x_0)$

Da also ein Punkt und die Steigung gegeben sind, können wir mit dem bekannten Verfahren eine Geradengleichung aufstellen.

Wir machen das an einigen Beispielen:

Beispiel 1. Wir wollen die Tangentengleichung der Funktion $f(x) = 0{,}25x^3 - 2x + 1$ an der Stelle $x_0 = 2$ bestimmen. Dazu berechnen wir zunächst

$$f(2) = 0{,}25 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 2 - 4 + 1 = -1$$

Der Punkt, an dem die Tangente die Funktion berührt ist also $P(2/-1)$.

Weiter brauchen wir die Steigung der Tangente, also die Steigung von $f(x)$ an er Stelle x_0. Dazu verwenden wir die Ableitung

$$f'(x) = 0{,}75x^2 - 2$$

und berechnen

$$f'(2) = 0{,}75 \cdot 2^2 - 2 = 3 - 2 = 1\,.$$

Die Tangente verläuft also durch $P(2/-1)$ und hat die Steigung $m = 1$.

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 31. August 2023

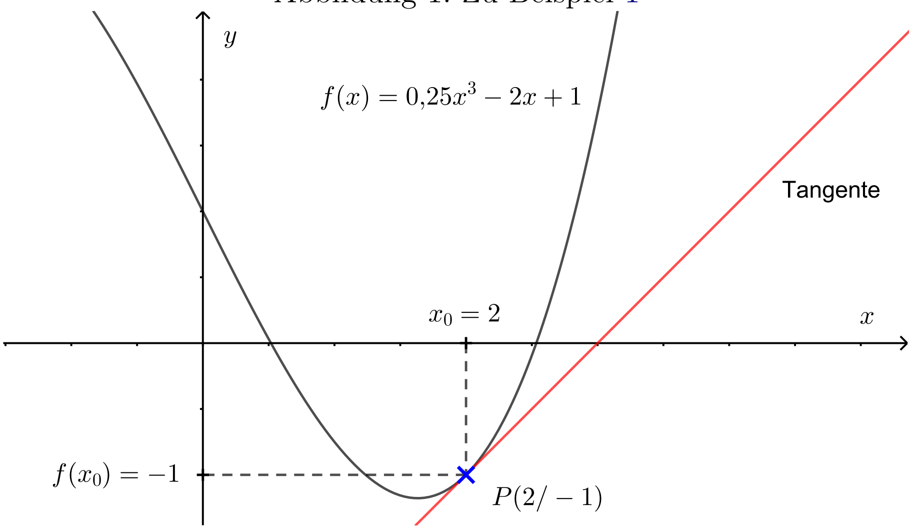
Die allgemeine Geradengleichung lautet $y = mx + b$, wobei uns $m = 1$ bereits bekannt ist, also $y = x + b$. Setzen wir hier unseren Punkt P ein, so erhalten wir

$$-1 = 2 + b \iff b = -3$$

Zusammen ergibt das die Tangentengleichung

$$y = x - 3\,.$$

Abbildung 1: Zu Beispiel 1



Beispiel 2. 1. Die Tangentengleichung von $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + 2x^3 - 4x + 8$ an der Stelle $x_0 = -2$:

$$\begin{aligned} f(-2) = &-\frac{1}{16} \cdot (-2)^4 + 2 \cdot (-2)^3 - 4 \cdot (-2) + 8 = -1 - 16 + 8 + 8 = -1 \\ &\Longrightarrow P(-2/-1) \end{aligned}$$

Es ist $f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + 6x^2 - 4$, so dass

$$\begin{aligned} f'(-2) = &-\frac{1}{4} \cdot (-2)^3 + 6 \cdot (-2)^2 - 4 = 2 + 24 - 4 = 22 \\ &\Longrightarrow m = 22 \end{aligned}$$

P einsetzen in $y = 22x + b$ gibt

$$-1 = 22 \cdot (-2) + b \iff b = 43$$

Die Tangentengleichung ist damit

$$y = 22x + 43\,.$$

2. Die Tangentengleichung von $f(x) = -x^3 - 5x^2 + x + 2$ an der Stelle $x_0 = 1$:

$$f(1) = -(1)^3 - 5 \cdot 1^2 + 1 + 2 = -1 - 5 + 1 + 3 = -3$$

$$\Longrightarrow P(1/-3)$$

Es ist $f'(x) = -3x^2 - 10x + 1$, so dass

$$\begin{aligned} f'(1) = & -3 \cdot (1)^2 - 10 \cdot 1 + 1 = -3 - 10 + 1 = -12 \\ & \Longrightarrow m = -12 \end{aligned}$$

P einsetzen in $y = -12x + b$ gibt

$$-3 = -12 \cdot 1 + b \iff b = 9$$

Die Tangentengleichung ist damit

$$y = -12x + 9\,.$$