Frank Klinker

Differentialrechnung

Teil 5: Die Rechenregeln der Differentialrechnung

1 Die Ableitung von $f(x) = x^n$

Die Ableitung von $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

In den Beispielen in Teil 3 haben wir den Ausdruck $\dfrac{a^n - x_0^n}{a - x_0}$ für die "einfachen" Fälle $n = 0, 1, 2$ so vereinfacht, dass wir $a = x_0$ einsetzen konnten. Für $n = 3$ haben wir uns den Quotienten in der Abstandsform angesehen.

Wir wollen uns hier den Quotienten $\dfrac{a^n - x_0^n}{a - x_0}$ für einen beliebigen natürlichen Exponenten n ansehen.

Dazu multiplizieren wir den folgenden Ausdruck aus:

$$\left(a^{n-1} + a^{n-2}x_0 + a^{n-3}x_0^2 + a^{n-4}x_0^3 + \ldots + a^3x_0^{n-4} + a^2x_0^{n-3} + ax_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) \cdot (a - x_0)$$

Das gibt

$$\begin{aligned}
& a^n + a^{n-1}x_0 + a^{n-2}x_0^2 + a^{n-3}x_0^3 + \ldots + a^4x_0^{n-4} + a^3x_0^{n-3} + a^2x_0^{n-2} + ax_0^{n-1} \\
& \quad - a^{n-1}x_0 - a^{n-2}x_0^2 - a^{n-3}x_0^3 - \ldots - a^4x_0^{n-4} - a^3x_0^{n-3} - a^2x_0^{n-2} - ax_0^{n-1} - x_0^n \\
= \; & a^n + \cancel{a^{n-1}x_0} + \cancel{a^{n-2}x_0^2} + \cancel{a^{n-3}x_0^3} + \ldots + \cancel{a^4x_0^{n-4}} + \cancel{a^3x_0^{n-3}} + \cancel{a^2x_0^{n-2}} + \cancel{ax_0^{n-1}} \\
& \quad - \cancel{a^{n-1}x_0} - \cancel{a^{n-2}x_0^2} - \cancel{a^{n-3}x_0^3} - \ldots - \cancel{a^4x_0^{n-4}} - \cancel{a^3x_0^{n-3}} - \cancel{a^2x_0^{n-2}} - \cancel{ax_0^{n-1}} - x_0^n \\
= \; & a^n - x_0^n
\end{aligned}$$

Schreiben wir das anders herum, dann bekommen wir

$$\frac{a^n - x_0^n}{a - x_0} = a^{n-1} + a^{n-2}x_0 + a^{n-3}x_0^2 + \ldots + a^2x_0^{n-3} + ax_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

Damit können wir die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion bestimmen:

Wir sehen uns die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ an für positive, ganze $n \in \mathbb{N}$. Für diese haben wir

$$f'(x_0) = \lim_{a \to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 16. September 2024

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{a \to x_0} \frac{a^n - x_0^n}{a - x_0} \\
&= \lim_{a \to x_0} \left(a^{n-1} + a^{n-2} x_0 + a^{n-3} x_0^2 + \ldots + a^2 x_0^{n-3} + a x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \right) \\
&= x_0^{n-1} + x_0^{n-2} x_0 + x_0^{n-3} x_0^2 + \ldots + x_0^2 x_0^{n-3} + x_0 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\
&= n\, x_0^{n-1}
\end{aligned}
$$

Für die Potenzfunktion mit Exponenten $n \in \mathbb{N}$ haben wir also tatsächlich

$$
f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = n x^{n-1}
$$

2 Die Summen- und Differenzregel

Die Summen- und Differenzenregel

Ist eine Funktion $f(x)$ selbst eine Summe (oder Differenz) zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, dann ist die Ableitung $f'(x)$ die Summe (oder Differenz) der Ableitungsfunktionen $g'(x)$ und $h'(x)$:

$$
\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}
$$

Das gilt genauso für mehr Summen und Differenzen.

Zur Berechnung der Summen- bzw. Differenzenregel sehen wir uns zunächst den Differenzenquotienten für die Funktion $f(x) = g(x) + h(x)$ an:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} &= \frac{\big(g(a) + h(a)\big) - \big(g(x_0) + h(x_0)\big)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) + h(a) - g(x_0) - h(x_0)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) - g(x_0) + h(a) - h(x_0)}{a - x_0} \\
&= \frac{\big(g(a) - g(x_0)\big) + \big(h(a) - h(x_0)\big)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) - g(x_0)}{a - x_0} + \frac{h(a) - h(x_0)}{a - x_0}
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{a \to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \\
&= \underbrace{\lim_{a \to x_0} \frac{g(a) - g(x_0)}{a - x_0}}_{= g'(x_0)} + \underbrace{\lim_{a \to x_0} \frac{h(a) - h(x_0)}{a - x_0}}_{= h'(x_0)} \\
&= g'(x_0) + h'(x_0)\,.
\end{aligned}
$$

Für die Differenz $f(x) = g(x) - h(x)$ klappt das genauso:

$$\begin{aligned}
\frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} &= \frac{\big(g(a) - h(a)\big) - \big(g(x_0) - h(x_0)\big)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) - h(a) - g(x_0) + h(x_0)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) - g(x_0) - h(a) + h(x_0)}{a - x_0} \\
&= \frac{\big(g(a) - g(x_0)\big) - \big(h(a) - h(x_0)\big)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) - g(x_0)}{a - x_0} - \frac{h(a) - h(x_0)}{a - x_0}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{a \to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} \\
&= \underbrace{\lim_{a \to x_0} \frac{g(a) - g(x_0)}{a - x_0}}_{= g'(x_0)} - \underbrace{\lim_{a \to x_0} \frac{h(a) - h(x_0)}{a - x_0}}_{= h'(x_0)} \\
&= g'(x_0) - h'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

3 Die Faktorregel

Die Faktorregel

Ist eine Funktion $f(x)$ selbst das Produkt einer Funktionen $g(x)$ mit einer Zahl c, dann ist die Ableitung $f'(x)$ das Produkt der Ableitungsfunktionen $g'(x)$ mit der Zahl c:

$$\boxed{f(x) = c \cdot g(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x)}$$

Auch zur Berechnung der Faktorregel sehen wir uns den Differenzenquotienten an. Dieses Mal für die Funktion $f(x) = c \cdot g(x)$ an und mit Hilfe des Differenzenquotienten in der Abstandsform:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} &= \frac{c \cdot g(x_0 + t) - c \cdot g(x_0)}{t} \\
&= \frac{c \cdot \big(g(x_0 + t) - g(x_0)\big)}{t} \\
&= c \cdot \frac{g(x_0 + t) - g(x_0)}{t}
\end{aligned}$$

Damit ist

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

$$
\begin{aligned}
&= c \cdot \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{g(x_0 + t) - g(x_0)}{t}}_{= g'(x_0)} \\
&= c \cdot g'(x_0)\,.
\end{aligned}
$$

4 Die Produktregel

Die Produktregel

Ist eine Funktion $f(x)$ selbst das Produkt zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, dann kann man die Ableitung $f'(x)$ mit Hilfe der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ und ihrer Ableitungen berechnen:

$$
\boxed{f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}
$$

Wie zuvor gehen wir uns vom Differenzenquotienten aus, nämlich für die Funktion $f(x) = g(x) \cdot h(x)$:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(x) \cdot h(x) - g(x_0) \cdot h(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{g(x) \cdot h(x) - g(x_0) \cdot h(x) + g(x_0) \cdot h(x) - g(x) \cdot h(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{g(x) \cdot h(x) - g(x_0) \cdot h(x)}{x - x_0} + \frac{g(x_0) \cdot h(x) - g(x_0) \cdot h(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{\big(g(x) - g(x_0)\big) \cdot h(x)}{x - x_0} + \frac{g(x_0) \cdot \big(h(x) - h(x_0)\big)}{x - x_0} \\
&= \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot h(x) + g(x_0) \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}\,.
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \Big(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot h(x) + g(x_0) \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \Big) \\
&= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{= g'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} h(x)}_{= h(x_0)} + g(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}}_{= h'(x_0)} \\
&= g'(x_0) \cdot h(x_0) + g(x_0) \cdot h'(x_0)\,.
\end{aligned}
$$

5 Die Kettenregel

Die Kettenregel

Ist eine Funktion $f(x)$ die Verkettung Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ in der Form $f(x) = g(h(x))$, dann kann man die Ableitung $f'(x)$ wie folgt berechnen:

$$\boxed{f(x) = g(h(x)) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)}$$

Spezialfall $h(x) = ax + b$, also $f(x) = g(a\,x + b)$:

$$\boxed{f(x) = g(a\,x + b) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = a\,g'(ax + b)}$$

Auch hier bemühen wir den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{\big(g(h(x)) - g(h(x_0))\big) \cdot \big(h(x) - h(x_0)\big)}{\big(h(x) - h(x_0)\big) \cdot (x - x_0)} \\
&= \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{h(x) - h(x_0)} \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Ableitung:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{h(x) - h(x_0)} \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \right) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{h(x) - h(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\
&\overset{(*)}{=} \underbrace{\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}}_{= g'(y_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}}_{= h'(x_0)} \quad \text{mit} \quad y_0 = h(x_0) \\
&= g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

An der Stelle $(*)$ haben wir verwendet, dass $y = h(x) \to h(x_0) = y_0$, wenn $x \to x_0$.

6 Anwendungen

6.1 Die Potenzregel für negative Exponenten

Die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^n}$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^n} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}}$$

Bemerkung: Schreibt man $f(x)$ und $f'(x)$ in der Form

$$f(x) = x^{-n} \quad \text{und} \quad f'(x) = -nx^{-n-1}\,,$$

dann sieht man, dass die Potenzregel aus Abschnitt 1 in ihrer bekannten Form auch für negative Exponenten gilt.

Wir suchen die Ableitung von $f(x) = \frac{1}{x^n}$. Dazu multiplizieren wir $f(x)$ mit der Funktion $g(x) = x^n$ und erhalten

$$f(x) \cdot g(x) = 1.$$

Diese Gleichung leiten wir auf beiden Seiten ab, wobei wir auf der linken Seite die Produktregel nutzen:

$$\begin{aligned} & f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & f'(x) \cdot x^n + \frac{1}{x^n} \cdot nx^{n-1} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & f'(x) \cdot x^n + \frac{n}{x} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} \end{aligned}$$

6.2 Die Potenzregel für Stammbruch-Exponenten

Die Ableitung von $f(x) = \sqrt[n]{x}$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}}$$

Bemerkung: Schreibt man $f(x)$ und $f'(x)$ in der Form

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{und} \quad f'(x) = \tfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}\,,$$

dann sieht man, dass die Potenzregel aus Abschnitt 1 in ihrer bekannten Form auch für Stammbruch-Exponenten gilt.

Wir suchen die Ableitung von $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Dazu sehen wir uns stattdessen für $g(x) = x^n$ die verkettete Funktion $g(f(x))$ und erhalten

$$g\big(f(x)\big) = x,$$

weil $g(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x)$ ist.

Diese Gleichung leiten wir auf beiden Seiten ab, wobei wir auf der linken Seite die Kettenregel nutzen:

$$\begin{aligned} & g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 1 \\ \overset{g'(x)=nx^{n-1}}{\iff} \quad & n\big(f(x)\big)^{n-1} \cdot f'(x) = 1 \\ \iff \quad & n\big(\sqrt[n]{x}\big)^{n-1} \cdot f'(x) = 1 \\ \iff \quad & f'(x) = \frac{1}{n\big(\sqrt[n]{x}\big)^{n-1}} \,. \end{aligned}$$

Die Bemerkung gilt wegen

$$\frac{1}{\big(\sqrt[n]{x}\big)^{n-1}} = \frac{1}{\big(x^{\frac{1}{n}}\big)^{n-1}} = \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{x^{1-\frac{1}{n}}} = x^{\frac{1}{n}-1} \,.$$

6.3 Die Potenzregel für Bruch-Exponenten

Die Ableitung von $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ für $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^{>0}$

$$\boxed{f(x) = x^{\frac{m}{n}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}}$$

Bemerkung: Damit gilt die Potenzregel aus Abschnitt 1 in ihrer bekannten Form auch für Bruch-Exponenten gilt.

Wir schreiben $f(x)$ in der Form $f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \big(x^{\frac{1}{n}}\big)^m$. Das bedeutet, dass $f(x)$ sich als Verkettung $f(x) = g(h(x))$ schreiben lässt mit $g(x) = x^m$ und $h(x) = x^{\frac{1}{n}}$.

Mit $g'(x) = mx^{m-1}$, also

$$g'(h(x)) = m\big(x^{\frac{1}{n}}\big)^{m-1} = mx^{\frac{m-1}{n}} = mx^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}}$$

und $h'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$ und der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(h(x)) \cdot h'(x) \\ &= m\, x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{n}\, x^{\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-1} \\ &= \frac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1} \end{aligned}$$

6.4 Die Quotientenregel

Die Quotientenregel

Ist eine Funktion $f(x)$ selbst der Quotient zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, dann kann man die Ableitung $f'(x)$ mit Hilfe der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ und ihrer Ableitungen berechnen:

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\big(h(x)\big)^2}}$$

Spezialfall $g(x) = 1$, also $f(x) = \dfrac{1}{h(x)}$:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{h(x)} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{h'(x)}{\big(h(x)\big)^2}}$$

Wir suchen die Ableitung der Funktion $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$. Das schreiben wir als

$$f(x) \cdot h(x) = g(x)\,.$$

Wir leiten beide Seiten der Gleichung ab und nutzen dabei auf der linken Seite die Produktregel:

$$\begin{aligned}
& f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x) = g'(x) \\
\Longleftrightarrow\ & f'(x) \cdot h(x) + \frac{g(x)}{h(x)} \cdot h'(x) = g'(x) \\
\Longleftrightarrow\ & f'(x) \cdot h(x) = g'(x) - \frac{g(x) \cdot h'(x)}{h(x)} \\
\Longleftrightarrow\ & f'(x) \cdot h(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)} \\
\Longleftrightarrow\ & f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\big(h(x)\big)^2}
\end{aligned}$$

6.5 Die Ableitung der Umkehrfunktion

Die Ableitung der Umkehrfunktion

Ist eine Funktion $f(x)$ invertierbar mit Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, dann gilt

$$\boxed{\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Ist $f(x)$ invertierbar mit Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, dann gilt insbesondere

$$f(f^{-1}(x)) = x\,.$$

Leitet man die rechte Seite der Gleichung ab, so erhält man 1. Die Ableitung der linken Seite berechnet man mit der Kettenregel. Damit ergibt sich:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

und nach Umstellen

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,.$$

Bemerkung: Die gleiche Idee haben wir bereits bei der Ableitung der Wurzelfunktion $\sqrt[n]{x}$ verwendet, siehe Abschnitt 6.2.