Frank Klinker

Differentialrechnung

Teil 5: Die Rechenregeln der Differentialrechnung

1 Die Ableitung von $f(x) = x^n$

Die Ableitung von $f(x) = x^n$ für $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}}$$

In den Beispielen in Teil 3 haben wir den Ausdruck $\frac{a^n - x_0^n}{a - x_0}$ für die "einfachen" Fälle $n = 0, 1, 2$ so vereinfacht, dass wir $a = x_0$ einsetzen konnten. Für $n = 3$ haben wir uns den Quotienten in der Abstandsform angesehen.

Wir wollen uns hier den Quotienten $\frac{a^n - x_0^n}{a - x_0}$ für einen beliebigen natürlichen Exponenten n ansehen.

Dazu multiplizieren wir den folgenden Ausdruck aus:

$$\left(a^{n-1} + a^{n-2}x_0 + a^{n-3}x_0^2 + a^{n-4}x_0^3 + \ldots + a^3x_0^{n-4} + a^2x_0^{n-3} + ax_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) \cdot (a - x_0)$$

Das gibt

$$\begin{aligned}
&a^n + a^{n-1}x_0 + a^{n-2}x_0^2 + a^{n-3}x_0^3 + \ldots + a^4x_0^{n-4} + a^3x_0^{n-3} + a^2x_0^{n-2} + ax_0^{n-1} \\
&\quad - a^{n-1}x_0 - a^{n-2}x_0^2 - a^{n-3}x_0^3 - \ldots - a^4x_0^{n-4} - a^3x_0^{n-3} - a^2x_0^{n-2} - ax_0^{n-1} - x_0^n \\
&= a^n + \cancel{a^{n-1}x_0} + \cancel{a^{n-2}x_0^2} + \cancel{a^{n-3}x_0^3} + \ldots + \cancel{a^4x_0^{n-4}} + \cancel{a^3x_0^{n-3}} + \cancel{a^2x_0^{n-2}} + \cancel{ax_0^{n-1}} \\
&\quad - \cancel{a^{n-1}x_0} - \cancel{a^{n-2}x_0^2} - \cancel{a^{n-3}x_0^3} - \ldots - \cancel{a^4x_0^{n-4}} - \cancel{a^3x_0^{n-3}} - \cancel{a^2x_0^{n-2}} - \cancel{ax_0^{n-1}} - x_0^n \\
&= a^n - x_0^n
\end{aligned}$$

Schreiben wir das anders herum, dann bekommen wir

$$\frac{a^n - x_0^n}{a - x_0} = a^{n-1} + a^{n-2}x_0 + a^{n-3}x_0^2 + \ldots + a^2x_0^{n-3} + ax_0^{n-2} + x_0^{n-1}$$

Damit können wir die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion bestimmen:

Wir sehen uns die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ an für positive, ganze $n \in \mathbb{N}$. Für diese haben wir

$$f'(x_0) = \lim_{a \to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0}$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 31. August 2023

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{a\to x_0} \frac{a^n - x_0^n}{a - x_0} \\
&= \lim_{a\to x_0} \left(a^{n-1} + a^{n-2}x_0 + a^{n-3}x_0^2 + \ldots + a^2 x_0^{n-3} + a x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) \\
&= x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + x_0^{n-3}x_0^2 + \ldots + x_0^2 x_0^{n-3} + x_0 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\
&= n\, x_0^{n-1}
\end{aligned}
$$

Für die Potenzfunktion mit Exponenten $n \in \mathbb{N}$ haben wir also tatsächlich

$$f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

2 Die Summen- und Differenzregel

Die Summen- und Differenzenregel

Ist eine Funktion $f(x)$ selbst eine Summe (oder Differenz) zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, dann ist die Ableitung $f'(x)$ die Summe (oder Differenz) der Ableitungsfunktionen $g'(x)$ und $h'(x)$:

$$\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$$

Das gilt genauso für mehr Summen und Differenzen.

Zur Berechnung der Summen- bzw. Differenzenregel sehen wir uns zunächst den Differenzenquotienten für die Funktion $f(x) = g(x) + h(x)$ an:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} &= \frac{\big(g(a) + h(a)\big) - \big(g(x_0) + h(x_0)\big)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) + h(a) - g(x_0) - h(x_0)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) - g(x_0) + h(a) - h(x_0)}{a - x_0} \\
&= \frac{\big(g(a) - g(x_0)\big) + \big(h(a) - h(x_0)\big)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) - g(x_0)}{a - x_0} + \frac{h(a) - h(x_0)}{a - x_0}
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$f'(x_0) = \lim_{a\to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} = \underbrace{\lim_{a\to x_0} \frac{g(a) - g(x_0)}{a - x_0}}_{= g'(x_0)} + \underbrace{\lim_{a\to x_0} \frac{h(a) - h(x_0)}{a - x_0}}_{= h'(x_0)} = g'(x_0) + h'(x_0)\,.$$

Für die Differenz $f(x) = g(x) - h(x)$ klappt das genauso:

$$\frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} = \frac{\big(g(a) - h(a)\big) - \big(g(x_0) - h(x_0)\big)}{a - x_0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{g(a) - h(a) - g(x_0) + h(x_0)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) - g(x_0) - h(a) + h(x_0)}{a - x_0} \\
&= \frac{\big(g(a) - g(x_0)\big) - \big(h(a) - h(x_0)\big)}{a - x_0} \\
&= \frac{g(a) - g(x_0)}{a - x_0} - \frac{h(a) - h(x_0)}{a - x_0}
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$f'(x_0) = \lim_{a \to x_0} \frac{f(a) - f(x_0)}{a - x_0} = \underbrace{\lim_{a \to x_0} \frac{g(a) - g(x_0)}{a - x_0}}_{= g'(x_0)} - \underbrace{\lim_{a \to x_0} \frac{h(a) - h(x_0)}{a - x_0}}_{= h'(x_0)} = g'(x_0) - h'(x_0)\,.$$

3 Die Faktorregel

> **Die Faktorregel**
>
> Ist eine Funktion $f(x)$ selbst das Produkt einer Funktionen $g(x)$ mit einer Zahl c, dann ist die Ableitung $f'(x)$ das Produkt der Ableitungsfunktionen $g'(x)$ mit der Zahl c:
>
> $$\boxed{f(x) = c \cdot g(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = c \cdot g'(x)}$$

Auch zur Berechnung der Faktorregel sehen wir uns den Differenzenquotienten an. Dieses Mal für die Funktion $f(x) = c \cdot g(x)$ an und mit Hilfe des Differenzenquotienten in der Abstandsform:

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} &= \frac{c \cdot g(x_0 + t) - c \cdot g(x_0)}{t} \\
&= \frac{c \cdot \big(g(x_0 + t) - g(x_0)\big)}{t} \\
&= c \cdot \frac{g(x_0 + t) - g(x_0)}{t}
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$f'(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = c \cdot \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{g(x_0 + t) - g(x_0)}{t}}_{= g'(x_0)} = c \cdot g'(x_0)\,.$$

4 Die Produktregel

Die Produktregel

Ist eine Funktion $f(x)$ selbst das Produkt zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, dann kann man die Ableitung $f'(x)$ mit Hilfe der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ und ihrer Ableitungen berechnen:

$$\boxed{f(x) = g(x) \cdot h(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)}$$

Wie zuvor gehen wir uns vom Differenzenquotienten aus, nämlich für die Funktion $f(x) = g(x) \cdot h(x)$:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(x) \cdot h(x) - g(x_0) \cdot h(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{g(x) \cdot h(x) - g(x_0) \cdot h(x) + g(x_0) \cdot h(x) - g(x) \cdot h(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{g(x) \cdot h(x) - g(x_0) \cdot h(x)}{x - x_0} + \frac{g(x_0) \cdot h(x) - g(x_0) \cdot h(x_0)}{x - x_0} \\
&= \frac{\big(g(x) - g(x_0)\big) \cdot h(x)}{x - x_0} + \frac{g(x_0) \cdot \big(h(x) - h(x_0)\big)}{x - x_0} \\
&= \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot h(x) + g(x_0) \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \,.
\end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \Big(\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot h(x) + g(x_0) \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \Big) \\
&= \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{= g'(x_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} h(x)}_{= h(x_0)} + g(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}}_{= h'(x_0)} \\
&= g'(x_0) \cdot h(x_0) + g(x_0) \cdot h'(x_0) \,.
\end{aligned}$$

5 Die Quotientenregel

Die Quotientenregel

Ist eine Funktion $f(x)$ selbst der Quotient zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, dann kann man die Ableitung $f'(x)$ mit Hilfe der Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ und ihrer Ableitungen berechnen:

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2)}}$$

Spezialfall $g(x) = 1$, also $f(x) = \dfrac{1}{h(x)}$:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{h(x)} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{h'(x)}{h(x)^2)}}$$

Wir kümmern uns zunächst um den Spezialfall $f(x) = \dfrac{1}{h(x)}$ und nutzen wieder den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\frac{1}{h(x)} - \frac{1}{h(x_0)}}{x - x_0} = \frac{\frac{h(x_0) - h(x)}{h(x) \cdot h(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \frac{1}{h(x) \cdot h(x_0)} \cdot \frac{h(x_0) - h(x)}{x - x_0} \\
&= -\frac{1}{h(x) \cdot h(x_0)} \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \Big(-\frac{1}{h(x) \cdot h(x_0)} \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \Big) \\
&= -\underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{1}{h(x) \cdot h(x_0)}}_{= \frac{1}{h(x_0)^2}} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}}_{= h'(x_0)} = -\frac{h'(x)}{h(x_0)^2} \, .
\end{aligned}$$

Die Quotientenregel ergibt sich dann aus der Produktregel und

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x) \cdot \frac{1}{h(x)}$$

zu

$$\begin{aligned}
f'(x) &= g'(x) \cdot \frac{1}{h(x)} + g(x) \cdot \Big(\frac{1}{h(x)} \Big)' \\
&= g'(x) \cdot \frac{1}{h(x)} + g(x) \cdot \Big(-\frac{h'(x)}{h(x)^2} \Big) \\
&= \frac{g'(x) \cdot h(x)}{h(x)^2} - \frac{g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2} \\
&= \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2}
\end{aligned}$$

.

6 Die Kettenregel

Die Kettenregel

Ist eine Funktion $f(x)$ die Verkettung Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ in der Form $f(x) = g(h(x))$, dann kann man die Ableitung $f'(x)$ wie folgt berechnen:

$$\boxed{f(x) = g(h(x)) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)}$$

Spezialfall $h(x) = ax + b$, also $f(x) = g(a\,x + b)$:

$$\boxed{f(x) = g(a\,x + b) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = a\,g'(ax + b)}$$

Auch hier bemühen wir den Differenzenquotienten:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{x - x_0} \\
&= \frac{\big(g(h(x)) - g(h(x_0))\big) \cdot \big(h(x) - h(x_0)\big)}{\big(h(x) - h(x_0)\big) \cdot (x - x_0)} \\
&= \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{h(x) - h(x_0)} \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die Ableitung:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \Big(\frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{h(x) - h(x_0)} \cdot \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \Big) \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{g(h(x)) - g(h(x_0))}{h(x) - h(x_0)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\
&\overset{(*)}{=} \underbrace{\lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}}_{= g'(y_0)} \cdot \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0}}_{= h'(x_0)} \qquad \text{mit} \quad y_0 = h(x_0) \\
&= g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0)\,.
\end{aligned}$$

An der Stelle $(*)$ haben wir verwendet, dass $y = h(x) \to h(x_0) = y_0$, wenn $x \to x_0$.

7 Die Ableitung der Umkehrfunktion

Die Ableitung der Umkehrfunktion

Ist eine Funktion $f(x)$ invertierbar mit Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, dann gilt

$$\boxed{\big(f^{-1}\big)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

ist $f(x)$ invertierbar mit Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$, dann gilt insbesondere

$$f(f^{-1}(x)) = x\,.$$

Leitet man die rechte Seite der Gleichung ab, so erhält man 1. Die Ableitung der linken Seite berechnet man mit der Kettenregel. Damit ergibt sich:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$$

und nach Umstellen

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\,.$$