Differentialrechnung

Teil 6: Die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion, der Exponentialfunktion und der Logarithmusfunktion

1 Die Ableitung der Potenzfunktionen

1.1 Eine zentrale Identität

In den folgenden Rechnungen wird sich die Identität

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

als sehr hilfreich herausstellen. Dass diese Identität gilt, sieht man am besten, wenn man beide Seiten mit $(a - b)$ multipliziert und die rechte Seite dann vereinfacht:

$$\begin{aligned} & (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}) \cdot (a - b) \\ &= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \dots + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} \\ &\quad - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 - \dots - a^3b^{n-3} - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n \\ &= a^n + \cancel{a^{n-1}b} + \cancel{a^{n-2}b^2} + \cancel{a^{n-3}b^3} + \dots + \cancel{a^3b^{n-3}} + \cancel{a^2b^{n-2}} + \cancel{ab^{n-1}} \\ &\quad - \cancel{a^{n-1}b} - \cancel{a^{n-2}b^2} - \cancel{a^{n-3}b^3} - \dots - \cancel{a^3b^{n-3}} - \cancel{a^2b^{n-2}} - \cancel{ab^{n-1}} - b^n \\ &= a^n - b^n \end{aligned}$$

Ein Spezialfall davon ist

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \dots + q^2 + q + 1$$

1.2 Die Ableitung der konstanten Funktion

$$\boxed{f(x) = a \implies f'(x) = 0}$$

Für jede feste Zahl $a \in \mathbb{R}$ haben wir:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a - a}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 0 = 0.$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm

E-Mail: mail@frank-klinker.de

Version: 8. September 2024

1.3 Die Ableitung der Potenzfunktion für positive, natürliche Exponenten

$$f(x) = x^n \implies f'(x) = n x^{n-1}$$

Mit Hilfe der obigen Identität haben wir:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + x^2x_0^{n-3} + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ &= x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + x_0^{n-3}x_0^2 + \dots + x_0^2x_0^{n-3} + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ &= n x_0^{n-1} \end{aligned}$$

1.4 Die Ableitung der Potenzfunktion für negative, ganze Exponenten

$$f(x) = \frac{1}{x^n} \implies f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Dabei haben wir $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ verwendet. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}} \cdot \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n - \left(\frac{1}{x_0}\right)^n}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n - \left(\frac{1}{x_0}\right)^n}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{n-2} \frac{1}{x_0} + \dots + \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-1} \right) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \left(-\frac{1}{xx_0} \right) \\ &= \left(\left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-2} \frac{1}{x_0} + \dots + \frac{1}{x_0} \left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-2} + \left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-1} \right) \cdot \left(-\frac{1}{x_0^2} \right) \\ &= -n \left(\frac{1}{x_0}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{x_0^2} \\ &= -\frac{n}{x_0^{n+1}} \end{aligned}$$

1.5 Die Ableitung der Potenzfunktion für Stammbruch-Exponenten

$$f(x) = \sqrt[n]{x} \implies f'(x) = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Wegen $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ bedeutet das $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \implies f'(x) = \frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}$.

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^n} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x_0^{\frac{1}{n}} \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} \\
 &= \frac{1}{\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x_0^{\frac{1}{n}} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} \\
 &= \frac{1}{nx_0^{\frac{n-1}{n}}}.
 \end{aligned}$$

1.6 Die Ableitung der Potenzfunktion für rationale Exponenten

$$f(x) = \frac{1}{x^q} \implies f'(x) = q x^{q-1}$$

Wegen der vorigen Rechnungen und wegen $\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, brauchen wir das nur für "echte Brüche" $q = \frac{m}{n}$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{m}{n}} - x_0^{\frac{m}{n}}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^m}{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^m}{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x_0^{\frac{1}{n}} \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-2} + x_0^{m-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} \right) \\
 &= \left(\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \dots + x_0^{\frac{1}{n}} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-2} + x_0^{m-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(m \left(x_0^{\frac{1}{n}} \right)^{m-1} \right) \cdot \left(\frac{1}{n} x_0^{\frac{1}{n}-1} \right) \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} - 1} \\
&= \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1} .
\end{aligned}$$

1.7 Die Ableitung der Potenzfunktion für irrationale Exponenten

$$f(x) = x^r \implies f'(x) = r x^{r-1}$$

Hierfür benötigt man die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion $g(x) = e^x$ und ihrer Umkehrfunktion $h(x) = \ln(x)$: Für diese gilt $g(x) = e^x \implies g'(x) = e^x$ und $h(x) = \ln(x) \implies h'(x) = \frac{1}{x}$.

Damit ist

$$f(x) = x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \cdot \ln(x)}$$

Mit der Kettenregel folgt deshalb

$$f'(x) = e^{r \cdot \ln(x)} \cdot (r \cdot \ln(x))' = x^r \cdot \frac{r}{x} = r \cdot x^{r-1} .$$

2 Die Ableitung der Exponentialfunktion

2.1 Die Folgen $a_n = 2^{\frac{1}{n}} - 1$ und $b_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2^{\frac{1}{n}} - 1) = 0$$

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1) < 1$$

Wir schreiben

$$a_n = 2^{\frac{1}{n}} - 1, \quad b_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$$

und bemerken vorab:

- Weil $2 > 1 = 1^n$, ist auch $2^{\frac{1}{n}} > (1^n)^{\frac{1}{n}} = 1$. Insbesondere sind damit auch $a_n > 0$ und $b_n > 0$.
- Weil $2 < 2^n$, ist auch $2^{\frac{1}{n}} < (2^n)^{\frac{1}{n}} = 2$. Insbesondere ist $a_n \leq 1$.
- In der Formel $(1+x)^n = 1 + k_1x + k_2x^2 + \dots + k_nx^n$ gilt

$$k_\ell = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-\ell+1)}{\ell(\ell-1) \cdot \dots \cdot 1} \leq n^\ell$$

- Weil $(1+x)^n = 1 + nx + k_2x^2 + \dots + k_nx^n$ mit $k_2, \dots, k_n > 0$, ist auch $(1+x)^n > 1 + nx > nx$ für $x > 0$.

Die Folge $a_n = 2^{\frac{1}{n}} - 1$

Es ist

$$2 = (2^{\frac{1}{n}})^n = (2^{\frac{1}{n}})^n = (2^{\frac{1}{n}} - 1 + 1)^n = (a_n + 1)^n \geq na_n$$

und damit $0 < a_n \leq \frac{2}{n}$ sowie

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$$

und schließlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Die Folge $b_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$

Wir wissen bereits, dass $b_n > 0$. Wir zeigen nun, dass b_n streng monoton fällt. Daraus folgt dann, dass es den Grenzwert der Folge b_n gibt und dieser zwischen $b_1 = 1$ und 0 liegt.

Statt zu zeigen, dass $b_n > b_{n+1}$ ist, betrachten $b_n - b_{n+1}$ und zeigen, dass diese Differenz positiv ist:

$$\begin{aligned} b_n - b_{n+1} &= n(2^{\frac{1}{n}} - 1) - (n+1)(2^{\frac{1}{n+1}} - 1) \\ &= n(2^{\frac{1}{n}} - 1) - n(2^{\frac{1}{n+1}} - 1) - (2^{\frac{1}{n+1}} - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= n\left(2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}}\right) - \left(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) \\
&= n2^{\frac{1}{n+1}}\left(2^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} - 1\right) - \left(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) \\
&= n\left(2^{\frac{1}{n(n+1)}}\right)^n\left(2^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\right) - \left(\left(2^{\frac{1}{n(n+1)}}\right)^n - 1\right).
\end{aligned}$$

Wir verwenden ab jetzt die Abkürzung $z = 2^{\frac{1}{n(n+1)}}$. Für z gilt $z > 1$ sowie $z^k < z^n$ für $k < n$:

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n+1} &= nz^n(z - 1) - (z^n - 1) \\
&= nz^n(z - 1) - (z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)(z - 1) \\
&> nz^n(z - 1) - (z^n + z^n + \dots + z^n + z^n)(z - 1) \\
&= nz^n(z - 1) - nz^n(z - 1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit existiert $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ und liegt zwischen 0 und 1.

Wegen

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n &= 1 + k_1 \frac{1}{2n} + k_2 \left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \dots + k_{n-1} \left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1} + k_n \left(\frac{1}{2n}\right)^n \\
&< 1 + n \frac{1}{2n} + n^2 \left(\frac{1}{2n}\right)^2 + \dots + n^{n-1} \left(\frac{1}{2n}\right)^{n-1} + n^n \left(\frac{1}{2n}\right)^n \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

ist aber sogar

$$b_n = n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) > n\left(\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right) = n\left(1 + \frac{1}{2n} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\frac{1}{2} \leq b < 1.$$

2.2 Die Ableitung von $f(x) = 2^x$ an der Stelle $x_0 = 0$

$$\boxed{f(x) = 2^x \implies f'(0) = b \text{ mit } b = \lim_{n \rightarrow \infty} n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)}$$

Zunächst einmal gilt

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 2^0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x}.$$

Für alle $0 < x < 1$ gibt es eine natürliche Zahl n , sodass $\frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n}$. Damit ist

$$\begin{aligned}
n\left(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) &\leq \frac{2^x - 1}{x} \leq (n+1)\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) \\
\iff (n+1)\left(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) - \left(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\right) &\leq \frac{2^x - 1}{x} \leq n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) + \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right).
\end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen a_n und b_n mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ von oben ist das

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{2^x - 1}{x} \leq b_n + a_n.$$

Für $x \rightarrow 0$ muss n immer größer gewählt werden, also $n \rightarrow \infty$, so dass

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ \iff b - 0 &\leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} \leq b + 0 \end{aligned}$$

und damit schließlich $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = b$.

2.3 Die Ableitung von $f(x) = a^x$ an der Stelle $x_0 = 0$

$$f(x) = a^x \implies f'(0) = \log_2(a) \cdot b \text{ mit } b = \lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Es ist $f(x) = a^x = 2^{\log_2(a^x)} = 2^{\log_2(a) \cdot x} = g(\log_2(a) \cdot x)$ mit $g(u) = 2^u$.

Mit der Kettenregel folgt aus dieser Darstellung

$$f'(0) = \log_2(a) \cdot g'(\log_2(a) \cdot 0) = \log_2(a) \cdot g'(0) = \log_2(a) \cdot b.$$

2.4 Die Ableitung von $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x \implies f'(x) = \log_2(a) \cdot b \cdot a^x \text{ mit } b = \lim_{n \rightarrow \infty} n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$$

Für $f(x) = a^x$ haben wir

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} \\ &= a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0 - 0} \\ &= a^{x_0} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{a^u - 1}{u - 0} \\ &= a^{x_0} f'(0). \end{aligned}$$

3 Die Eulersche Zahl e , die natürliche Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus

Die Eulersche Zahl e ist definiert als die Basis der Exponentialfunktion für die $f'(x) = f(x)$ ist, also $f'(0) = 1$.

Wegen $f'(0) = \log_2(e) \cdot b$ ist $f'(0) = 1$ gleichbedeutend mit $\log_2(e) = \frac{1}{b}$ oder $e = 2^{\frac{1}{b}}$, also

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{b_n}}.$$

Die zugehörige Exponentialfunktion heißt *natürliche Exponentialfunktion*:

$$f(x) = e^x.$$

Die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wir schreiben statt $\log_e(x)$ abkürzend

$$f^{-1}(x) = \ln(x).$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$b = \ln(2) \quad \text{und} \quad f(x) = a^x \implies f'(x) = \ln(a) a^x.$$

Erstens ist wegen $e = 2^{\frac{1}{b}}$

$$1 = \ln\left(2^{\frac{1}{b}}\right) = \frac{1}{b} \cdot \ln(2)$$

und zweitens ist für $f(x) = a^x$

$$f'(0) = \log_2(a) \cdot b = \log_2(a) \cdot \ln(2) = \log_2(a) \cdot \log_e(2) = \log_e(a) = \ln(a).$$

3.1 Die Ableitung von $f(x) = \ln(x)$ und $f(x) = \log_a(x)$

$$f(x) = \ln(x) \implies f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \log_a(x) \implies f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

$f(x) = \ln(x)$

$f(x) = \ln(x)$ ist die Umkehrfunktion von $g(x) = e^x$, also $\ln(x) = g^{-1}(x)$. Die Ableitung der Umkehrfunktion liefert uns nun mit $g'(x) = e^x$

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}.$$

$f(x) = \log_a(x)$

Wir nutzen die Logarithmenregel $\log_c(a) \log_a(x) = \log_c(x)$ mit $c = e$. Das gibt $f(x) = \log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$. Damit haben wir

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}.$$