Frank Klinker

Differentialrechnung

Teil 6: Die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion, der Exponentialfunktion und der Logarithmusfunktion

1 Die Ableitung der Potenzfunktionen für rationale Exponenten

1.1 Eine zentrale Identität

In den folgenden Rechnungen wird sich die Identität

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}$$

als sehr hilfreich herausstellen. Dass diese Identität gilt, sieht man am besten, wenn man beide Seiten mit $(a - b)$ multipliziert und die rechte Seite dann vereinfacht:

$$\begin{aligned}
&\big(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}\big) \cdot (a - b) \\
&= a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} \\
&\qquad - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 - \ldots - a^3b^{n-3} - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n \\
&= a^n + \cancel{a^{n-1}b} + \cancel{a^{n-2}b^2} + \cancel{a^{n-3}b^3} + \ldots + \cancel{a^3b^{n-3}} + \cancel{a^2b^{n-2}} + \cancel{ab^{n-1}} \\
&\qquad - \cancel{a^{n-1}b} - \cancel{a^{n-2}b^2} - \cancel{a^{n-3}b^3} - \ldots - \cancel{a^3b^{n-3}} - \cancel{a^2b^{n-2}} - \cancel{ab^{n-1}} - b^n \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

Ein Spezialfall davon ist

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + q^2 + q + 1$$

1.2 Die Ableitung der konstanten Funktion

$$\boxed{f(x) = a \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0}$$

Für jede feste Zahl $a \in \mathbb{R}$ haben wir:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{a - a}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0\,.$$

Adresse: Eduard-Spranger-Berufskolleg, 59067 Hamm
E-Mail: mail@frank-klinker.de
Version: 31. August 2023

1.3 Die Ableitung der Potenzfunktion für positive, natürliche Exponenten

$$\boxed{f(x) = x^n \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = n\,x^{n-1}}$$

Mit Hilfe der obigen Identität haben wir:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \ldots + x^2x_0^{n-3} + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right) \\
&= x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + x_0^{n-3}x_0^2 + \ldots + x_0^2x_0^{n-3} + x_0x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\
&= n\,x_0^{n-1}
\end{aligned}$$

1.4 Die Ableitung der Potenzfunktion für negative, ganze Exponenten

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^n} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}}$$

Dabei haben wir $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ verwendet. Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x^n} - \frac{1}{x_0^n}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}} \cdot \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n - \left(\frac{1}{x_0}\right)^n}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n - \left(\frac{1}{x_0}\right)^n}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}} \cdot \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{xx_0}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \left(\left(\tfrac{1}{x}\right)^{n-1} + \left(\tfrac{1}{x}\right)^{n-2}\tfrac{1}{x_0} + \ldots + \tfrac{1}{x}\left(\tfrac{1}{x_0}\right)^{n-2} + \left(\tfrac{1}{x_0}\right)^{n-1}\right) \cdot \lim_{x\to x_0}\left(-\tfrac{1}{xx_0}\right) \\
&= \left(\left(\tfrac{1}{x_0}\right)^{n-1} + \left(\tfrac{1}{x_0}\right)^{n-2}\tfrac{1}{x_0} + \ldots + \tfrac{1}{x_0}\left(\tfrac{1}{x_0}\right)^{n-2} + \left(\tfrac{1}{x_0}\right)^{n-1}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{x_0^2}\right) \\
&= -\,n\left(\tfrac{1}{x_0}\right)^{n-1} \cdot \tfrac{1}{x_0^2} \\
&= -\,\frac{n}{x_0^{n+1}}
\end{aligned}$$

1.5 Die Ableitung der Potenzfunktion für Stammbruch-Exponenten

$$\boxed{f(x) = \sqrt[n]{x} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{n\,\sqrt[n]{x^{n-1}}}}$$

Wegen $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ bedeutet das $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}}$.

Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^n} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\dfrac{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^n}{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \ldots + x^{\frac{1}{n}} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \ldots + x_0^{\frac{1}{n}} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-2} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{nx_0^{\frac{n-1}{n}}}
\end{aligned}$$

1.6 Die Ableitung der Potenzfunktion für rationale Exponenten

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x^q} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = q\, x^{q-1}}$$

Wegen der vorigen Rechnungen und wegen $\frac{1}{nx^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$, brauchen wir das nur für "echte Brüche" $q = \frac{m}{n}$ zu zeigen:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{x^{\frac{m}{n}} - x_0^{\frac{m}{n}}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^m}{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m - \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^m}{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x_0^{\frac{1}{n}}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \left(\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} + \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \ldots + x^{\frac{1}{n}} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-2} + x_0^{m-1} \right) \cdot \left(\tfrac{1}{n}\, x_0^{\frac{1}{n}-1} \right) \\
&= \left(\left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1} + \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-2} x_0^{\frac{1}{n}} + \ldots + x_0^{\frac{1}{n}} \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-2} + x_0^{m-1} \right) \cdot \left(\tfrac{1}{n}\, x_0^{\frac{1}{n}-1} \right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(m \left(x_0^{\frac{1}{n}}\right)^{m-1}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{n}\, x_0^{\frac{1}{n}-1}\right) \\
&= \tfrac{m}{n}\, x^{\frac{m-1}{n}+\frac{1}{n}-1} \\
&= \tfrac{m}{n}\, x^{\frac{m}{n}-1}
\end{aligned}
$$

2 Die Ableitung der Exponentialfunktion

2.1 Die Folgen $a_n = 2^{\frac{1}{n}} - 1$ und $b_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) = 0} \qquad \boxed{\frac{1}{2} \le \lim_{n\to\infty} n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right) < 1}$$

Wir schreiben

$$a_n = 2^{\frac{1}{n}} - 1\,, \qquad b_n = n\left(2^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

und bemerken vorab:

- Weil $2 > 1 = 1^n$, ist auch $2^{\frac{1}{n}} > (1^n)^{\frac{1}{n}} = 1$. Insbesondere sind damit auch $a_n > 0$ und $b_n > 0$.
- Weil $2 < 2^n$, ist auch $2^{\frac{1}{n}} < (2^n)^{\frac{1}{n}} = 2$. Insbesondere ist $a_n \le 1$.
- Weil $(1+x)^n = 1 + nx + k_2x^2 + \ldots + k_nx^n$ mit $k_2, \ldots, k_n > 0$, ist auch $(1+x)^n > 1 + nx > nx$ für $x > 0$.
- In der Formel $(1+x)^n = 1 + k_1x + k_2x^2 + \ldots + k_nx^n$ gilt

$$k_\ell = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-\ell+1)}{\ell(\ell-1)\cdot \ldots \cdot 1} \le n^\ell$$

<u>Wir beginnen mit $a_n = 2^{\frac{1}{n}} - 1$.</u>

Es ist

$$2 = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(2^{\frac{1}{n}} - 1 + 1\right)^n = \left(a_n + 1\right)^n \ge na_n$$

und damit $0 < a_n \le \frac{2}{n}$ sowie

$$0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

und schließlich

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

<u>Wir fahren fort mit $b_n = n(2^{\frac{1}{n}} - 1)$.</u>

Wir wissen bereits, dass $b_n > 0$. Wir zeigen nun, dass b_n streng monoton fällt. Daraus folgt dann, dass es den Grenzwert der Folge b_n gibt und dieser zwischen $b_1 = 1$ und 0 liegt.

Statt zu zeigen, dass $b_n > b_{n+1}$ ist, betrachten $b_n - b_{n+1}$ und zeigen, dass diese Differenz positiv ist:

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n+1} &= n\big(2^{\frac{1}{n}} - 1\big) - (n+1)\big(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\big) \\
&= n\big(2^{\frac{1}{n}} - 1\big) - n\big(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\big) - \big(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\big) \\
&= n\big(2^{\frac{1}{n}} - 2^{\frac{1}{n+1}}\big) - \big(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\big) \\
&= n2^{\frac{1}{n+1}}\big(2^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} - 1\big) - \big(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\big) \\
&= n\big(2^{\frac{1}{n(n+1)}}\big)^n\big(2^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1\big) - \big(\big(2^{\frac{1}{n(n+1)}}\big)^n - 1\big)
\end{aligned}$$

Wir verwenden ab jetzt die Abkürzung $z = 2^{\frac{1}{n(n+1)}}$. Für z gilt $z > 1$ sowie $z^k < z^n$ für $k < n$:

$$\begin{aligned}
b_n - b_{n+1} &= nz^n(z-1) - (z^n - 1) \\
&= nz^n(z-1) - (z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1)(z-1) \\
&> nz^n(z-1) - \big(z^n + z^n + \ldots + z^n + z^n\big)(z-1) \\
&= nz^n(z-1) - nz^n(z-1) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Damit existiert $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ und liegt zwischen 0 und 1.

Wegen

$$\begin{aligned}
\big(1 + \tfrac{1}{2n}\big)^n &= 1 + k_1\tfrac{1}{2n} + k_2\big(\tfrac{1}{2n}\big)^2 + \ldots + k_{n-1}\big(\tfrac{1}{2n}\big)^{n-1} + k_n\big(\tfrac{1}{2n}\big)^n \\
&< 1 + n\tfrac{1}{2n} + n^2\big(\tfrac{1}{2n}\big)^2 + \ldots + n^{n-1}\big(\tfrac{1}{2n}\big)^{n-1} + n^n\big(\tfrac{1}{2n}\big)^n \\
&= 1 + \tfrac{1}{2} + \big(\tfrac{1}{2}\big)^2 + \ldots + \big(\tfrac{1}{2}\big)^{n-1} + \big(\tfrac{1}{2}\big)^n \\
&= \frac{1 - \big(\frac{1}{2}\big)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2
\end{aligned}$$

ist aber sogar

$$b_n = n\big(2^{\frac{1}{n}} - 1\big) > n\Big(\big((1 + \tfrac{1}{2n})^n\big)^{\frac{1}{n}} - 1\Big) = n\Big(1 + \tfrac{1}{2n} - 1\Big) = \frac{1}{2}$$

und damit

$$\frac{1}{2} \leq b < 1$$

2.2 Die Ableitung von $f(x) = 2^x$ an der Stelle $x_0 = 0$

$$\boxed{f(x) = 2^x \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = b \;\text{ mit }\; b = \lim_{n\to\infty} n\big(2^{\frac{1}{n}} - 1\big)}$$

Zunächst einmal gilt

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 2^0}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x}$$

Für alle $0 < x < 1$ gibt es eine natürliche Zahl n, sodass $\frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}$. Damit ist

$$\begin{aligned} n\big(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\big) &\le \frac{2^x - 1}{x} \le (n+1)\big(2^{\frac{1}{n}} - 1\big) \\ \iff \quad (n+1)\big(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\big) - \big(2^{\frac{1}{n+1}} - 1\big) &\le \frac{2^x - 1}{x} \le n\big(2^{\frac{1}{n}} - 1\big) + \big(2^{\frac{1}{n}} - 1\big) \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen a_n und b_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ von oben ist das

$$b_{n+1} - a_{n+1} \le \frac{1}{x}\big(2^x - 1\big) \le b_n + a_n$$

Für $x \to 0$ muss n immer größer gewählt werden, also $n \to \infty$, so dass

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &\le \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} \le \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} a_n \\ \iff \quad b - 0 &\le \lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} \le b + 0 \end{aligned}$$

und damit schließlich $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2^x - 1}{x} = b$

2.3 Die Ableitung von $f(x) = a^x$ an der Stelle $x_0 = 0$

$$\boxed{f(x) = a^x \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = \log_2(a) \cdot b \;\text{ mit }\; b = \lim_{n\to\infty} n\big(2^{\frac{1}{n}} - 1\big)}$$

Es ist $f(x) = a^x = 2^{\log_2(a^x)} = 2^{\log_2(a)\cdot x} = g(\log_2(a) \cdot x)$ mit $g(u) = 2^u$.
Mit der Kettenregel folgt aus dieser Darstellung

$$f'(x) = \log_2(a) \cdot g'(\log_2(a) \cdot 0) = \log_2(a) \cdot g'(0) = \log_2(a) \cdot b$$

2.4 Die Ableitung von $f(x) = a^x$

$$\boxed{f(x) = a^x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \log_2(a) \cdot b \cdot a^x \;\text{ mit }\; b = \lim_{n\to\infty} n\big(2^{\frac{1}{n}} - 1\big)}$$

Für $f(x) = a^x$ haben wir

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)}{x - x_0} \\
&= a^{x_0} \lim_{x\to x_0} \frac{a^{x-x_0} - 1}{x - x_0 - 0} \\
&= a^{x_0} \lim_{u\to 0} \frac{a^u - 1}{u - 0} \\
&= a^{x_0} f'(0)
\end{aligned}
$$

2.5 Die Eulersche Zahl e, die natürliche Exponentialfunktion und der natürliche Logarithmus

Die Eulersche Zahl e ist definiert als die Basis der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, für die $f'(0) = 1$ ist.

Wegen $f'(0) = \log_2(e) \cdot b$ ist $f'(0) = 1$ gleichbedeutend mit $\log_2(e) = \frac{1}{b}$ oder $e = 2^{\frac{1}{b}}$ und schließlich

$$\boxed{e = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{b_n}}}$$

Die zugehörige Exponentialfunktion heißt *natürliche Exponentialfunktion*:

$$f(x) = e^x$$

Die Umkehrfunktion von $f(x) = e^x$ heißt *natürlicher Logarithmus* und wir schreiben statt $\log_e(x)$ abkürzend

$$f^{-1}(x) = \ln(x)$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$\boxed{b = \ln(2)} \qquad \text{und} \qquad \boxed{f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = \ln(a)\, a^x}$$

Erstens ist wegen $e = 2^{\frac{1}{b}}$

$$1 = \ln\left(2^{\frac{1}{b}}\right) = \frac{1}{b} \cdot \ln(2)$$

und zweitens ist für $f'(x) = a^x$

$$f'(0) = \log_2(a) \cdot b = \log_2(a) \cdot \ln(2) = \log_2(a) \cdot \log_e(2) = \log_e(a) = \ln(a)$$

2.6 Die Ableitung von $f(x) = \ln(x)$ und $f(x) = \log_a(x)$

$$\boxed{f(x) = \ln(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{f(x) = \log_a(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}}$$

$\underline{f(x) = \ln(x)}$

$f(x) = \ln(x)$ ist die Umkehrfunktion von $g(x) = e^x$, also $\ln(x) = g^{-1}(x)$. Die Ableitung der Umkehrfunktion liefert uns nun mit $g'(x) = e^x$

$$f'(x) = (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'\big(g^{-1}(x)\big)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$

$\underline{f(x) = \log_a(x)}$

Wir nutzen die Logarithmenregel $\log_b(a)\log_a(x) = \log_b(x)$ mit $b = e$. Das gibt $f(x) = \log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$. Damit haben wir

$$f'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$$

3 Die Ableitung der Potenzfunktion für irrationale Exponenten

$$\boxed{f(x) = x^r \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = r\, x^{r-1}}$$

Es ist

$$f(x) = x^r = e^{\ln(x^r)} = e^{r \cdot \ln(x)}$$

Mit der Kettenregel folgt deshalb

$$f'(x) = e^{r \cdot \ln(x)} \cdot (r \cdot \ln(x))' = x^r \cdot \frac{r}{x} = r \cdot x^{r-1}$$